Tabelle 6.2 Differenziationsregeln (s. S. 450)

Regel	**Formel für die Ableitung**
Konstantenregel	$c' = 0 \quad (c \ \text{const})$
Faktorregel	$(cu)' = cu' \quad (c \ \text{const})$
Summenregel	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel für zwei Funktionen	$(uv)' = u'v + uv'$
Produktregel für n Funktionen	$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdots u_i' \cdots u_n$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
Kettenregel für zwei Funktionen	$y = u(v(x)): \quad y' = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$
Kettenregel für drei Funktionen	$y = u(v(w(x))): \quad y' = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}$
Potenzregel	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0)$ speziell : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
Logarithmische Differenziation	$\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y}y' \Longrightarrow y' = y\frac{d(\ln y)}{dx}$ speziell : $(u^v)' = u^v\left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) \quad (u > 0)$
Differenziation der Umkehrfunktion	φ inverse Funktion zu f , d. h. $y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y)$: $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
Implizite Differenziation	$F(x, y) = 0\colon F_x + F_y\, y' = 0$ oder $y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad \left(F_x = \frac{\partial F}{\partial x}\,,\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\,;\ \ F_y \neq 0\right)$
Ableitung in Parameterdarstellung	$x = x(t)\,,\ y = y(t)$ (t Parameter): $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\,,\ \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right)$
Ableitung in Polarkoordinaten	$\rho = \rho(\varphi)\colon \begin{array}{l} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{array}$ (Winkel φ als Parameter) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi} \quad \left(\dot{\rho} = \frac{dx}{d\varphi}\right)$

Taschenbuch der Mathematik

von

I. N. Bronstein
K. A. Semendjajew
G. Musiol
H. Mühlig

11., aktualisierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56702

Im Auftrag des Verlages Harri Deutsch erarbeitete und erweiterte Lizenzausgabe der bis 1977 erschienenen russischen Orginalausgabe:
I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten
©FIZMATLIT, Moskau

11., aktualisierte Auflage 2020

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5792-1

Satz: Prof. Dr. G. Musiol, 01127 Dresden
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Legatoria Editoriale Giovanni Olivotto S.p.A., 36100 Vicenza, Italia

Vorwort

Auch im Internetzeitalter bleibt der BRONSTEIN das Nachschlagewerk der Mathematik.

Das Taschenbuch enthält einen Querschnitt der Mathematik, wie er sowohl für Studenten als auch für praktisch tätige Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker sowie für die einschlägigen Hochschullehrer erforderlich ist. Dem traditionellen Anliegen des Buches – vorgegeben von den Erstautoren I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew (1937) – folgend, stehen Anschaulichkeit und leichte Verständlichkeit für den Ingenieur und Naturwissenschaftler im Vordergrund. So sind für diesen Nutzerkreis Grenzen der Anwendbarkeit und Hinweise auf Besonderheiten bei Anwendungen wichtiger als möglichst allgemeine Formulierungen und strenge mathematische Beweise. Für weitergehende Fragen wird jeweils auf die Fachliteratur verwiesen.

Der Einsatz einer zweiten Farbe in der aktuellen 11. Auflage trägt den geänderten Lesegewohnheiten Rechnung, erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert so das schnelle Auffinden der gesuchten Information.

DeskTop Bronstein
Parallel zur gedruckten Ausgabe wird die digitale Version *DeskTop Bronstein* angeboten, eine plattformunabhängige vernetzte HTML–Struktur mit farbigen Abbildungen und einer auf dem erweiterten Index basierenden Suchfunktion.
Sie enthält zusätzlich zum kompletten Inhalt der gedruckten Ausgabe die beiden Kapitel „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ und „Quantencomputer“ sowie weiterführende Methoden für partielle Differenzialgleichungen im Unterkapitel „Partielle Differenzialgleichungen“. Einen Unterschied gibt es beim Unterkapitel „Lie–Gruppen und Lie–Algebren“: die Version im Buch ist vorwiegend für Ingenieure gedacht, die im *DeskTop Bronstein* enthaltene Variante für Physiker.

Danksagung
Allen Lesern der deutschen und der zahlreichen fremdsprachigen Ausgaben des BRONSTEIN, allen Fachkollegen und Koautoren, die mit ihren Stellungnahmen, Bemerkungen, Anregungen und Zuarbeiten zu den vorangegangenen Auflagen des Buches die Überarbeitung erleichtert haben, möchten wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank zum Ausdruck bringen.

Ebenso gilt unser Dank dem Verlag Europa-Lehrmittel, in dem der BRONSTEIN seit der 9. Auflage erscheint und insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn für die seit vielen Auflagen bewährte gute Zusammenarbeit.

Dresden, im Juni 2020 — Herausgeber und Verlag

Koautoren

Einige Kapitel und Abschnitte sind in Zusammenarbeit mit Koautoren entstanden.

Kapitel bzw. Abschnitt	Koautor
Sphärische Trigonometrie (3.4.1 bis 3.4.3.3)	Dr. H. Nickel †, Dresden
Sphärische Kurven (3.4.3.4)	Prof. L. Marsolek, Berlin
Geometrische Transformationen, Koordinatentransformationen, Planare Projektionen (3.5.4, 3.5.5)	Dr. I. Steinert, Düsseldorf
Quaternionen und Anwendungen (4.4),	PD Dr. S. Bernstein, Freiberg (Sachsen)
Logik (5.1), Mengenlehre (5.2), Klassische Algebraische Strukturen (5.3), Anwendungen von Gruppen (außer 5.3.4, 5.3.5.4 bis 5.3.5.6), Ringe und Körper (5.3.7), Vektorräume (5.3.8), Boolesche Algebra und Schaltalgebra (5.7), Universelle Algebra (5.6),	Dr. J. Brunner, Dresden
Darstellung von Gruppen (5.3.4), weitere Anwendungen von Gruppen (5.3.5.4 bis 5.3.5.6)	Prof. Dr. R. Reif, Dresden
Lie–Gruppen und Lie–Algebren (5.3.6)	PD Dr. S. Bernstein, Freiberg (Sachsen)
Zahlentheorie, Kryptologie, Graphen (5.4, 5.5, 5.8)	Prof. Dr. U. Baumann, Dresden
Fuzzy–Logik (5.9)	Prof. Dr. A. Grauel, Soest
Wichtige Formeln für die Sphärischen Bessel–Funktionen (9.1.2.5,**2**,5)	Prof. Dr. P. Ziesche, Dresden
Statistische Interpretation der Wellenfunktion (9.2.4.4)	Prof. Dr. R. Reif, Dresden
Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos (9.2.5)	Prof. Dr. P. Ziesche, Dresden
Nichtlineare Schrödinger–Gleichung, Lösungen (9.2.5.3,**2**)	Dr. J. Brand, Dresden
Integralgleichungen (11)	Dr. I. Steinert, Düsseldorf
Funktionalanalysis (12)	Prof. Dr. M. Weber, Dresden
Elliptische Funktionen (14.6)	Dr. N. M. Fleischer †, Moskau
Dynamische Systeme und Chaos (17)	Prof. Dr. V. Reitmann, St. Petersburg
Optimierung (18)	Dr. I. Steinert, Düsseldorf
Nutzung von Computern: (19.8.1, 19.8.2), Interaktive Systeme: Mathematica (19.8.4.2), Maple (19.8.4.3), Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20)	Prof. Dr. G. Flach, Dresden
Interaktive Systeme: Matlab (19.8.4.1)	PD Dr. B. Mulansky, Clausthal
Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20): Anpassung an Mathematica 10	Dr. J. Tóth, Budapest

Zusätzliche Kapitel mit Koautoren im DeskTop Bronstein.

Lie–Gruppen (5.3.5), Lie–Algebren (5.3.6)	Prof. Dr. R. Reif, Dresden
Nichtlineare Partielle Differenzialgleichungen: Inverse Streutheorie (Methoden in Analogie zur Fourier–Methode) (9.2.6)	Dr. B. Rumpf, Dresden
Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (21)	Prof. Dr. A. Buchleitner, PD Dr. M. Tiersch, Dr. Th. Wellens, Freiburg
Quantencomputer (22)	Prof. Dr. A. Buchleitner, PD Dr. M. Tiersch, Dr. Th. Wellens, Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Arithmetik

1.1 Elementare Rechenregeln

1.1.1 Zahlen

1.1.1.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

1. Definitionsbereiche und Bezeichnungen

Alle ganzen und gebrochenen Zahlen, die positiven und negativen sowie die Null, werden *rationale Zahlen* genannt. Man verwendet die folgenden Bezeichnungen (s. 5.2.1,**1.**, S. 335):

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z}= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}= \{x|x = \dfrac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$.

Die natürlichen Zahlen sind aus dem Bedürfnis des Abzählens bzw. des Ordnens entstanden. Die natürlichen Zahlen werden auch als *nichtnegative ganze Zahlen* bezeichnet.

2. Eigenschaften der Menge der rationalen Zahlen

- Die Menge der rationalen Zahlen ist unendlich.
- Die Menge ist *geordnet*, d. h., für je zwei verschiedene rationale Zahlen a und b kann man angeben, welche von beiden kleiner als die andere ist.
- Die Menge ist *überall dicht*, d. h., zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen a und b ($a < b$) existiert wenigstens eine rationale Zahl c ($a < c < b$). Daraus folgt, dass zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen unendlich viele weitere rationale Zahlen liegen.

3. Arithmetische Operationen

Die arithmetischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) mit zwei beliebigen rationalen Zahlen sind stets möglich und liefern im Ergebnis wieder eine rationale Zahl. Eine Ausnahme davon ist die *Division durch Null*, die *unmöglich* ist: Die Schreibweise $a : 0$ hat keinen bestimmten Sinn, da es keine bestimmte rationale Zahl b gibt, die der Gleichung $b \cdot 0 = a$ mit $a \neq 0$ genügt. Für $a = 0$ kann b eine beliebige rationale Zahl sein. Die oft verwendete Schreibweise $a : 0 = \infty$ (unendlich) bedeutet nicht, dass diese Division möglich ist; es ist lediglich eine Abkürzung für die Aussage: Wenn sich der Nenner Null nähert, wächst der Quotient absolut genommen über alle Grenzen.

4. Dezimalbruch und Kettenbruch

Jede rationale Zahl a kann in der Form eines endlichen oder unendlichen periodischen Dezimalbruches oder auch in der Form eines Kettenbruches dargestellt werden (s. 1.1.1.4, S. 3).

5. Geometrische Darstellung

Wenn auf einer Geraden ein Anfangspunkt 0 (*Nullpunkt*), eine positive Richtung (*Orientierung*) und eine Längeneinheit l (*Maßstab*, s. auch 2.17.1, S. 117) festgelegt worden sind **(Abb.1.1)**, dann entspricht jeder rationalen Zahl a ein bestimmter Punkt dieser Geraden. Er hat die Koordinate a und ist ein so genannter *rationaler Punkt*. Die Gerade wird *Zahlengerade* genannt. Da die Menge der rationalen Zahlen überall dicht ist, gibt es zwischen je zwei beliebigen rationalen Punkten unendlich viele weitere rationale Punkte.

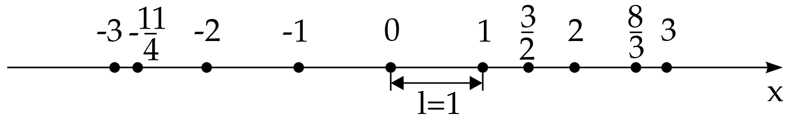

Abbildung 1.1

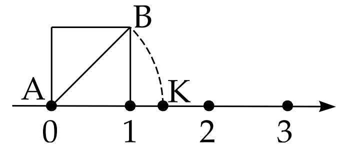

Abbildung 1.2

1.1.1.2 Irrationale und transzendente Zahlen

Für die Analysis reicht die Menge der rationalen Zahlen nicht aus. Obgleich sie überall dicht ist, füllt sie nicht die gesamte Zahlengerade aus. Wenn man z. B. die Diagonale AB des Einheitsquadrats um A

dreht, sodass B in den Punkt K der Zahlengeraden übergeht **(Abb.1.2)**, dann hat K keine rationale Koordinate. Erst die Einführung der *irrationalen Zahlen* ermöglicht es, jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl zuzuordnen. Eine exakte Definition der irrationalen Zahlen kann z. B. durch Intervallschachtelung (s. [22.18], Bd. 1) erfolgen oder mithilfe des DEDEKINDschen Schnittes (s. Hinweis in 5.2.4,**3.**, S. 342). Für die Anschauung genügt die Feststellung, dass die irrationalen Zahlen auf der Zahlengeraden die Punkte einnehmen, die als Lücken zwischen den rationalen Zahlen vorhanden sind, und dass jede irrationale Zahl durch einen nichtperiodischen unendlichen Dezimalbruch oder einen nichtperiodischen unendlichen Kettenbruch dargestellt werden kann.
Zu den irrationalen Zahlen gehören insbesondere die nicht ganzzahligen reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n > 1\,,\ \text{ganzzahlig; ganzzahlige Koeffizienten})\,. \qquad (1.1a)$$

Man nennt solche Wurzeln *algebraische Irrationalitäten*.

■ **A:** Einfachste Beispiele für algebraische Irrationalitäten sind die reellen Wurzeln der Gleichungen $x^n - a = 0$ $(a > 0)$, also Zahlen der Form $\sqrt[n]{a}$, wenn sie nicht rational sind.

■ **B:** $\sqrt[2]{2} = 1,414\ldots$, $\sqrt[3]{10} = 2,154\ldots$ sind algebraische Irrationalitäten.

Irrationale Zahlen, die keine algebraischen Irrationalitäten sind, nennt man *transzendente Zahlen*.

■ **A:** $\pi = 3,141592\ldots$, $e = 2,718281\ldots$ sind transzendente Zahlen.

■ **B:** Die dekadischen Logarithmen der ganzen positiven Zahlen mit Ausnahme von Zahlen der Form 10^n sind transzendente Zahlen.

Die nichtganzzahligen Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_1, a_0\ \text{ganzzahlig}) \qquad (1.1b)$$

werden *quadratische Irrationalitäten* genannt. Sie haben die Form $(a + b\sqrt{D})/c$ $(a, b, c$ ganzrational, $c \neq 0\,;\ D > 0\,,$ quadratfrei$)\,.$

■ Die Teilung einer Strecke a im Verhältnis des Goldenen Schnittes $x/a = (a - x)/x$ (s. 3.5.2.3,**3.**, S. 199) führt im Falle $a = 1$ auf die quadratische Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$. Die Lösung $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ ist eine quadratische Irrationalität. Sie enthält die irrationale Zahl $\sqrt{5}$.

1.1.1.3 Reelle Zahlen

Alle rationalen und irrationalen Zahlen werden zu den reellen Zahlen zusammengefasst. Sie bilden die *Menge der reellen Zahlen*, die mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird.

1. Haupteigenschaften

Die reellen Zahlen besitzen die folgenden Haupteigenschaften:
- Die Menge der reellen Zahlen ist unendlich.
- Die Menge der reellen Zahlen ist *geordnet* (s. 1.1.1.1,**2.**, S. 1).
- Die Menge der reellen Zahlen ist *überall dicht* (s. 1.1.1.1,**2.**, S. 1).
- Die Menge der reellen Zahlen ist *stetig*, d. h., jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine reelle Zahl. Das gilt für die Menge der rationalen Zahlen nicht.

2. Arithmetische Operationen

Die arithmetischen Operationen sind mit reellen Zahlen stets durchführbar und ergeben stets wieder eine reelle Zahl. Eine Ausnahme ist die Division durch Null (s. 1.1.1.1,**2.**, S. 1). Das Potenzieren und seine Umkehrung sind ebenfalls im System der reellen Zahlen möglich; aus jeder positiven reellen Zahl lassen sich beliebige Wurzeln ziehen; zu jeder positiven reellen Zahl gibt es einen Logarithmus mit beliebiger positiver Basis, ausgenommen die Eins als Basis.
Eine weitergehende Verallgemeinerung des Zahlbegriffs in der Analysis führt zu den *komplexen Zahlen* (s. 1.5, S. 35).

3. Zahlenintervall

Eine zusammenhängende Menge reeller Zahlen mit den Endpunkten a und b, wobei $a < b$ ist und auch a gleich $-\infty$ und b gleich $+\infty$ sein kann, wird *Zahlenintervall mit den Endpunkten a und b* genannt.

Wenn der Endpunkt nicht selbst zum Intervall gehört, spricht man vom *offenen Intervallende*, im entgegengesetzten Falle vom *abgeschlossenen Intervallende*.
Die Angabe eines Zahlenintervalls erfolgt durch seine Endpunkte a und b, indem diese in Klammern gesetzt werden. Eine eckige Klammer steht für ein geschlossenes Intervallende, eine runde für ein offenes. Es wird zwischen beiderseits *offenen Intervallen* (a, b), *halboffenen Intervallen* $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ und *abgeschlossenen Intervallen* $[a, b]$ unterschieden. Für offene Intervalle findet man auch die Bezeichnung $]a, b[$ anstelle von (a, b), analog $[a, b[$ anstelle von $[a, b)$. In der grafischen Darstellung wird ein offenes Ende durch eine Pfeilspitze, ein abgeschlossenes Intervallende durch einen Punkt gekennzeichnet.

1.1.1.4 Kettenbrüche

Kettenbrüche sind ineinandergeschachtelte Brüche, mit deren Hilfe reelle Zahlen, also rationale und irrationale Zahlen, dargestellt und besser approximiert werden können, als es die Dezimalzahldarstellung (s. 19.8.1.1,**1.**, S. 1018) erlaubt (s. ■ **A** und ■ **B** auf S. 4).

1. Rationale Zahlen

Kettenbrüche rationaler Zahlen sind endlich. Für positive rationale Zahlen $\frac{p}{q} > 1$ haben sie die nebenstehende Form.

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}. \tag{1.2}$$

Abkürzend schreibt man $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.
Die Zahlen a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ können mithilfe des Euklid*ischen Algorithmus* wie folgt ermittelt werden:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} \quad \left(0 < \frac{r_1}{q} < 1\right), \tag{1.3a}$$

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} \quad \left(0 < \frac{r_2}{r_1} < 1\right), \tag{1.3b}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} \quad \left(0 < \frac{r_3}{r_2} < 1\right), \tag{1.3c}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \quad \left(0 < \frac{r_n}{r_{n-1}} < 1\right), \tag{1.3d}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n \quad (r_{n+1} = 0). \tag{1.3e}$$

Die Zahlen p, q sowie r_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind positive natürliche Zahlen.

■ $$\frac{61}{27} = 2 + \frac{7}{27} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{7}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}} = [2; 3, 1, 6].$$

2. Irrationale Zahlen

Kettenbrüche irrationaler Zahlen α brechen nicht ab. Sie heißen daher unendliche Kettenbrüche, und man schreibt $[a_0; a_1, a_1, \ldots]$.

■ $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{x_1}$ mit $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{x_2}$ mit $x_2 = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{x_3}$ usw. Wie $x_2 = x_1$, so gilt auch $x_3 = x_2, x_4 = x_3, \ldots$. Man erhält $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \cdots$, d. h. für $\sqrt{2}$ gilt die Kettenbruchentwicklung $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$.

Wenn sich in einem unendlichen Kettenbruch einige der Zahlen a_k wiederholen, dann spricht man von einem *periodischen Kettenbruch*. Es gilt: Jeder periodische Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalität (s. 1.1.1.2, S. 2) dar, und umgekehrt besitzt jede quadratische Irrationalität eine periodische Kettenbruchdarstellung.

■ Die Zahl $\sqrt{2}$ ist eine quadratische Irrationalität und hat die periodische Kettenbruchdarstellung $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$.

3. Approximation reeller Zahlen

Ist $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ eine beliebige reelle Zahl, dann stellt jeder endliche Kettenbruch

$$\alpha_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p}{q} \tag{1.4}$$

eine Approximation von α dar. Der Kettenbruch α_k wird auch als k–ter Näherungsbruch von α bezeichnet. Er lässt sich rekursiv wie folgt berechnen:

$$\alpha_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \quad (k \geq 1;\ \ p_{-1} = 1, p_0 = a_0; q_{-1} = 0, q_0 = 1)\,. \tag{1.5}$$

Nach dem *Approximationssatz von* Liouville gilt folgende Fehlerabschätzung:

$$|\alpha - \alpha_k| = |\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{q_k^2}\,. \tag{1.6}$$

Darüber hinaus kann man zeigen, dass die Näherungsbrüche α_k die reelle Zahl α mit wachsender Genauigkeit von unten und von oben abwechselnd approximieren. Die Näherungsbrüche konvergieren besonders schnell gegen α, wenn die Zahlen a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ in (1.4) große Werte aufweisen. Demzufolge liegt die schlechteste Konvergenz bei Zahlen der Form $[1; 1, 1, \ldots]$ vor.

■ **A:** Aus der Dezimalzahldarstellung von π erhält man gemäß (1.3a) die Kettenbruchdarstellung $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$. Die zugehörigen Näherungsbrüche (1.5) mit den Abschätzungen gemäß (1.6) lauten: $\alpha_1 = \frac{22}{7}$ mit $|\pi - \alpha_1| < \frac{1}{7^2} \approx 2 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_2 = \frac{333}{106}$ mit $|\pi - \alpha_2| < \frac{1}{106^2} \approx 9 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_3 = \frac{355}{113}$ mit $|\pi - \alpha_3| < \frac{1}{113^2} \approx 8 \cdot 10^{-5}$. Die tatsächlichen Fehler sind wesentlich kleiner. Sie liegen bei α_1 unter $1{,}3 \cdot 10^{-3}$, bei α_2 unter $8{,}4 \cdot 10^{-5}$ und bei α_3 unter $2{,}7 \cdot 10^{-7}$. Die Näherungsbrüche α_1, α_2 und α_3 stellen eine wesentlich bessere Näherung für π dar als π in Dezimalzahldarstellung mit entsprechender Stellenzahl.

■ **B:** Für die Formel des Goldenen Schnittes $x/a = (a - x)/x$ (s. 3.5.2.3,**3.**, S. 199) kann man die folgenden beiden Kettenbruchdarstellungen angeben: $x = a[1; 1, 1, \ldots]$ und $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{a}{2}(1 + [2; 4, 4, 4, \ldots])$. Der Näherungsbruch α_4 bringt im ersten Fall eine Genauigkeit von $0{,}018\,a$, im zweiten Fall $0{,}000\,001\,a$.

1.1.1.5 Kommensurabilität

Zwei Zahlen a und b heißen *kommensurabel*, d. h. mit gleichem Maß messbar, wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten Zahl c sind. Aus $a = mc$, $b = nc$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ folgt dann

$$\frac{a}{b} = x \ \ (x \text{ rational})\,. \tag{1.7}$$

Im entgegengesetzten Falle sind a und b *inkommensurabel.*

■ **A:** Die Länge einer Diagonale und die Seitenlänge eines Quadrates sind inkommensurabel, weil sie die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ zum Quotienten haben.

■ **B:** Strecken, die gemäß dem Goldenen Schnitt (s. 3.5.2.3,**3.**, S. 199) bemessen werden, sind inkommensurabel, weil dieser die irrationale Zahl $\sqrt{5}$ enthält. Somit sind auch Diagonale und Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks (s. 3.1.5.3, S. 142) inkommensurabel. Man geht heute davon aus, dass Hippasos von Metapontum (450 v. u. Z.) am Pentagramm, das aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks (s. 3.1.5.3, S. 142) gebildet wird, die irrationalen Zahlen entdeckt hat.

1.1.2 Beweismethoden

Im wesentlichen unterscheidet man drei Beweismethoden:
- direkter Beweis,
- indirekter Beweis,
- vollständige Induktion.

Außerdem spricht man noch vom konstruktiven Beweis.

1.1.2.1 Direkter Beweis

Es wird von einem bereits als richtig bewiesenen Satz (Voraussetzung p) ausgegangen und daraus die Wahrheit des zu beweisenden Satzes (Behauptung q) abgeleitet. Bei der logischen Schlussfolgerung wird vorwiegend die Implikation oder die Äquivalenz verwendet.

1. Direkter Beweis mithilfe der Implikation

In der *Implikation* $p \Rightarrow q$ folgt aus der Wahrheit der Voraussetzung die Wahrheit der Behauptung (s. 4. Zeile der Wahrheitstafel für die „Implikation“ 5.1.1,**3.**, S. 330).

■ Die Ungleichung $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ für $a > 0\,,\ b > 0$ ist zu beweisen. Voraussetzung ist die als richtig erkannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Daraus folgt durch Subtraktion von $4ab$: $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$; und aus dieser Ungleichung erhält man unmittelbar die Behauptung, wenn man sich beim Radizieren wegen $a > 0$ und $b > 0$ auf das positive Vorzeichen beschränkt.

2. Direkter Beweis mithilfe der Äquivalenz

Der Beweis wird durch *Verifizieren*, d. h. durch den Nachweis der Wahrheit, geführt. Man geht dabei von der Wahrheit der Behauptung q aus und zeigt die Wahrheit der Behauptung p, was allerdings nur bei einer *Äquivalenz* $p \Leftrightarrow q$ möglich ist. Praktisch bedeutet dies, dass alle Operationen, die q in p überführen, umkehrbar eindeutig sein müssen.

■ Die Ungleichung $1 + a + a^2 + \cdots + a^n < \dfrac{1}{1-a}$ für $0 < a < 1$ ist zu beweisen.
Durch Multiplikation mit $1-a$ erhält man (wegen $1-a > 0$ bleibt das Ungleichheitszeichen bestehen, s. auch (1.102b)): $1 - a + a - a^2 + a^2 - a^3 \pm \cdots + a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1} < 1$.
Wegen $0 < a^{n+1} < 1$ ist die entstandene Ungleichung richtig, und da die durchgeführten Rechenoperationen umkehrbar eindeutig sind, ist auch die Ausgangsungleichung richtig.

1.1.2.2 Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch

Um die Behauptung q zu beweisen, geht man von der *Negation* $\bar{q}$ aus und schließt von $\bar{q}$ auf eine falsche Aussage r, d. h. $\bar{q} \Rightarrow r$ (s. auch 5.1.1,**7.**, S. 332). Dann muss aber auch $\bar{q}$ falsch sein, da man bei der Implikation nur von einer falschen Voraussetzung zu einer falschen Behauptung kommt (s. 1. Zeile der Wahrheitstafel für die „Implikation“ 5.1.1,**3.**, S. 330). Wenn aber $\bar{q}$ falsch ist, muss q wahr sein.

■ Es ist zu beweisen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational. Also gilt $\sqrt{2} = a/b$ mit ganzen Zahlen a, b und $b \neq 0$, und man kann annehmen a, b sind *teilerfremd*, d. h., sie besitzen keinen gemeinsamen Teiler. Man erhält $(\sqrt{2})^2 = 2 = a^2/b^2$ oder $a^2 = 2b^2$, d. h., a^2 wäre eine gerade Zahl, was nur dann möglich ist, wenn $a = 2n$ eine gerade Zahl ist. Es müsste dann wegen $a^2 = 4n^2 = 2b^2$ auch b eine gerade Zahl sein. Das ist offensichtlich ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a und b teilerfremd sind.

1.1.2.3 Vollständige Induktion

Mit dieser Beweismethode werden Sätze oder Formeln bewiesen, die von natürlichen Zahlen n abhängen. Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet:
Ist eine Aussage für eine natürliche Zahl n_0 wahr, und folgt aus der Wahrheit der Aussage für eine