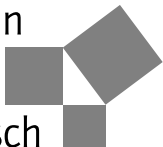


Tabelle 6.2 Differenziationsregeln (s. S. 450)

Regel	Formel für die Ableitung
Konstantenregel	$c' = 0 \quad (c \text{ const})$
Faktorregel	$(cu)' = cu' \quad (c \text{ const})$
Summenregel	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel für zwei Funktionen	$(uv)' = u'v + uv'$
Produktregel für n Funktionen	$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^n u_1 \cdots u_i' \cdots u_n$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
Kettenregel für zwei Funktionen	$y = u(v(x)):$ $y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$
Kettenregel für drei Funktionen	$y = u(v(w(x))):$ $y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dw} \frac{dw}{dx}$
Potenzregel	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$ speziell: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
Logarithmische Differenziation	$\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y} y' \implies y' = y \frac{d(\ln y)}{dx}$ speziell: $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) \quad (u > 0)$
Differenziation der Umkehrfunktion	φ inverse Funktion zu f , d. h. $y = f(x) \iff x = \varphi(y)$: $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
Implizite Differenziation	$F(x, y) = 0: F_x + F_y y' = 0$ oder $y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad \left(F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}; F_y \neq 0 \right)$
Ableitung in Parameterdarstellung	$x = x(t), y = y(t)$ (t Parameter): $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$
Ableitung in Polarkoordinaten	$\rho = \rho(\varphi):$ $\begin{matrix} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{matrix}$ (Winkel φ als Parameter) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi} \quad \left(\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \right)$

	Inhaltsverzeichnis	III	⇒
	Tabellenverzeichnis	XXXVII	⇒
1	Arithmetik	1	⇒
2	Funktionen und ihre Darstellung	49	⇒
3	Geometrie	132	⇒
4	Lineare Algebra	277	⇒
5	Algebra und Diskrete Mathematik	330	⇒
6	Differenzialrechnung	444	⇒
7	Unendliche Reihen	470	⇒
8	Integralrechnung	493	⇒
9	Differenzialgleichungen	553	⇒
10	Variationsrechnung	625	⇒
11	Lineare Integralgleichungen	636	⇒
12	Funktionalanalysis	669	⇒
13	Vektoranalysis und Feldtheorie	716	⇒
14	Funktionentheorie	745	⇒
15	Integraltransformationen	781	⇒
16	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik	819	⇒
17	Dynamische Systeme und Chaos	871	⇒
18	Optimierung	923	⇒
19	Numerische Mathematik	964	⇒
20	Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica	1040	⇒
21	Tabellen	1071	⇒
22	Literatur	1160	⇒
	Stichwortverzeichnis	1177	⇒



Edition
Harri 
Deutsch 

Taschenbuch der Mathematik

von

I. N. Bronstein

K. A. Semendjajew

G. Musiol

H. Mühlig

11., aktualisierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56702

Im Auftrag des Verlages Harri Deutsch erarbeitete und erweiterte Lizenzausgabe der bis 1977 erschienenen russischen Originalausgabe:

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten

©FIZMATLIT, Moskau

11., aktualisierte Auflage 2020

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5792-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Prof. Dr. G. Musiol, 01127 Dresden

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Legatoria Editoriale Giovanni Olivotto S.p.A., 36100 Vicenza, Italia

Vorwort

Auch im Internetzeitalter bleibt der BRONSTEIN das Nachschlagewerk der Mathematik.

Das Taschenbuch enthält einen Querschnitt der Mathematik, wie er sowohl für Studenten als auch für praktisch tätige Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker sowie für die einschlägigen Hochschullehrer erforderlich ist. Dem traditionellen Anliegen des Buches – vorgegeben von den Erstautoren I. N. BRONSTEIN und K. A. SEMENDJAJEW (1937) – folgend, stehen Anschaulichkeit und leichte Verständlichkeit für den Ingenieur und Naturwissenschaftler im Vordergrund. So sind für diesen Nutzerkreis Grenzen der Anwendbarkeit und Hinweise auf Besonderheiten bei Anwendungen wichtiger als möglichst allgemeine Formulierungen und strenge mathematische Beweise. Für weitergehende Fragen wird jeweils auf die Fachliteratur verwiesen.

Der Einsatz einer zweiten Farbe in der aktuellen 11. Auflage trägt den geänderten Lesegewohnheiten Rechnung, erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert so das schnelle Auffinden der gesuchten Information.

DeskTop Bronstein

Parallel zur gedruckten Ausgabe wird die digitale Version *DeskTop Bronstein* angeboten, eine plattformunabhängige vernetzte HTML-Struktur mit farbigen Abbildungen und einer auf dem erweiterten Index basierenden Suchfunktion.

Sie enthält zusätzlich zum kompletten Inhalt der gedruckten Ausgabe die beiden Kapitel „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ und „Quantencomputer“ sowie weiterführende Methoden für partielle Differenzialgleichungen im Unterkapitel „Partielle Differenzialgleichungen“. Einen Unterschied gibt es beim Unterkapitel „LIE-Gruppen und LIE-Algebren“: die Version im Buch ist vorwiegend für Ingenieure gedacht, die im *DeskTop Bronstein* enthaltene Variante für Physiker.

Danksagung

Allen Lesern der deutschen und der zahlreichen fremdsprachigen Ausgaben des BRONSTEIN, allen Fachkollegen und Koautoren, die mit ihren Stellungnahmen, Bemerkungen, Anregungen und Zuarbeiten zu den vorangegangenen Auflagen des Buches die Überarbeitung erleichtert haben, möchten wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank zum Ausdruck bringen.

Ebenso gilt unser Dank dem Verlag Europa-Lehrmittel, in dem der BRONSTEIN seit der 9. Auflage erscheint und insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn für die seit vielen Auflagen bewährte gute Zusammenarbeit.

Dresden, im Juni 2020

Herausgeber und Verlag

Koautoren

Einige Kapitel und Abschnitte sind in Zusammenarbeit mit Koautoren entstanden.

Kapitel bzw. Abschnitt	Koautor
Sphärische Trigonometrie (3.4.1 bis 3.4.3.3)	Dr. H. NICKEL †, Dresden
Sphärische Kurven (3.4.3.4)	Prof. L. MARSOLEK, Berlin
Geometrische Transformationen, Koordinatentransformationen, Planare Projektionen (3.5.4, 3.5.5)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Quaternionen und Anwendungen (4.4),	PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen)
Logik (5.1), Mengenlehre (5.2), Klassische Algebraische Strukturen (5.3), Anwendungen von Gruppen (außer 5.3.4, 5.3.5.4 bis 5.3.5.6), Ringe und Körper (5.3.7), Vektorräume (5.3.8), BOOLEsche Algebra und Schaltalgebra (5.7), Universelle Algebra (5.6), Darstellung von Gruppen (5.3.4), weitere Anwendungen von Gruppen (5.3.5.4 bis 5.3.5.6)	Dr. J. BRUNNER, Dresden
LIE-Gruppen und LIE-Algebren (5.3.6)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Zahlentheorie, Kryptologie, Graphen (5.4, 5.5, 5.8)	PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen)
Fuzzy-Logik (5.9)	Prof. Dr. U. BAUMANN, Dresden
Wichtige Formeln für die Sphärischen BESSEL-Funktionen (9.1.2.5, 2, 5)	Prof. Dr. A. GRAUEL, Soest
Statistische Interpretation der Wellenfunktion (9.2.4.4)	Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden
Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos (9.2.5)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung, Lösungen (9.2.5.3, 2)	Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden
Integralgleichungen (11)	Dr. J. BRAND, Dresden
Funktionalanalysis (12)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Elliptische Funktionen (14.6)	Prof. Dr. M. WEBER, Dresden
Dynamische Systeme und Chaos (17)	Dr. N. M. FLEISCHER †, Moskau
Optimierung (18)	Prof. Dr. V. REITMANN, St. Petersburg
Nutzung von Computern: (19.8.1, 19.8.2), Interaktive Systeme: Mathematica (19.8.4.2), Maple (19.8.4.3), Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Interaktive Systeme: Matlab (19.8.4.1)	Prof. Dr. G. FLACH, Dresden
Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20): Anpassung an Mathematica 10	PD Dr. B. MULANSKY, Clausthal
	Dr. J. Tóth, Budapest

Zusätzliche Kapitel mit Koautoren im DeskTop Bronstein.

LIE-Gruppen (5.3.5), LIE-Algebren (5.3.6)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Nichtlineare Partielle Differenzialgleichungen: Inverse Streutheorie (Methoden in Analogie zur FOURIER-Methode) (9.2.6)	Dr. B. RUMPF, Dresden
Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (21)	Prof. Dr. A. BUCHLEITNER, PD Dr. M. TIERSCH,
Quantencomputer (22)	Dr. Th. WELLENS, Freiburg
	Prof. Dr. A. BUCHLEITNER, PD Dr. M. TIERSCH,
	Dr. Th. WELLENS, Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

XXXVII

1	Arithmetik	1
1.1	Elementare Rechenregeln	1
1.1.1	Zahlen	1
1.1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	1
1.1.1.2	Irrationale und transzendente Zahlen	1
1.1.1.3	Reelle Zahlen	2
1.1.1.4	Kettenbrüche	3
1.1.1.5	Kommensurabilität	4
1.1.2	Beweismethoden	5
1.1.2.1	Direkter Beweis	5
1.1.2.2	Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch	5
1.1.2.3	Vollständige Induktion	5
1.1.2.4	Konstruktiver Beweis	6
1.1.3	Summen und Produkte	6
1.1.3.1	Summen	6
1.1.3.2	Produkte	7
1.1.4	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	8
1.1.4.1	Potenzen	8
1.1.4.2	Wurzeln	8
1.1.4.3	Logarithmen	9
1.1.4.4	Spezielle Logarithmen	9
1.1.5	Algebraische Ausdrücke	10
1.1.5.1	Definitionen	10
1.1.5.2	Einteilung der algebraischen Ausdrücke	11
1.1.6	Ganzrationale Ausdrücke	11
1.1.6.1	Darstellung in Form eines Polynoms	11
1.1.6.2	Zerlegung eines Polynoms in Faktoren	11
1.1.6.3	Spezielle Formeln	12
1.1.6.4	Binomischer Satz	12
1.1.6.5	Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome	14
1.1.7	Gebrochenrationale Ausdrücke	14
1.1.7.1	Rückführung auf die einfachste Form	14
1.1.7.2	Bestimmung des ganzrationalen Anteils	15
1.1.7.3	Partialbruchzerlegung	15
1.1.7.4	Umformung von Proportionen	17
1.1.8	Irrationale Ausdrücke	17
1.2	Endliche Reihen	19
1.2.1	Definition der endlichen Reihe	19
1.2.2	Arithmetische Reihen	19
1.2.3	Geometrische Reihe	20
1.2.4	Spezielle endliche Reihen	20
1.2.5	Mittelwerte	20
1.2.5.1	Arithmetisches Mittel	20
1.2.5.2	Geometrisches Mittel	21
1.2.5.3	Harmonisches Mittel	21
1.2.5.4	Quadratisches Mittel	21
1.2.5.5	Vergleich der Mittelwerte für zwei positive Größen a und b	21

1.3	Finanzmathematik	22
1.3.1	Prozentrechnung	22
1.3.1.1	Prozent	22
1.3.1.2	Aufschlag	22
1.3.1.3	Abschlag oder Rabatt	22
1.3.2	Zinseszinsrechnung	23
1.3.2.1	Zinsen	23
1.3.2.2	Zinseszinsen	23
1.3.3	Tilgungsrechnung	24
1.3.3.1	Tilgung	24
1.3.3.2	Gleiche Tilgungsraten	24
1.3.3.3	Gleiche Annuitäten	25
1.3.4	Rentenrechnung	25
1.3.4.1	Rente	25
1.3.4.2	Nachschüssig konstante Rente	26
1.3.4.3	Kontostand nach n Rentenzahlungen	26
1.3.5	Abschreibungen	27
1.3.5.1	Abschreibungsarten	27
1.3.5.2	Lineare Abschreibung	27
1.3.5.3	Arithmetisch-degressive Abschreibung	27
1.3.5.4	Digitale Abschreibung	28
1.3.5.5	Geometrisch-degressive Abschreibung	28
1.3.5.6	Abschreibung mit verschiedenen Abschreibungsarten	29
1.4	Ungleichungen	29
1.4.1	Reine Ungleichungen	29
1.4.1.1	Definitionen	29
1.4.1.2	Eigenschaften der Ungleichungen vom Typ I und II	30
1.4.2	Spezielle Ungleichungen	31
1.4.2.1	Dreiecksungleichung für reelle Zahlen	31
1.4.2.2	Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen	31
1.4.2.3	Ungleichungen für den Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen	31
1.4.2.4	Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel	31
1.4.2.5	Ungleichung für das arithmetische und das quadratische Mittel	31
1.4.2.6	Ungleichungen für verschiedene Mittelwerte zweier reeller Zahlen	31
1.4.2.7	Bernoullische Ungleichung	32
1.4.2.8	Binomische Ungleichung	32
1.4.2.9	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	32
1.4.2.10	Tschebyscheffsche Ungleichung	32
1.4.2.11	Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Ungleichung	33
1.4.2.12	Höldersche Ungleichung	33
1.4.2.13	Minkowskische Ungleichung	34
1.4.3	Lösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades	34
1.4.3.1	Allgemeines	34
1.4.3.2	Ungleichungen 1. Grades	34
1.4.3.3	Ungleichungen 2. Grades	34
1.4.3.4	Allgemeiner Fall der Ungleichung 2. Grades	35
1.5	Komplexe Zahlen	35
1.5.1	Imaginäre und komplexe Zahlen	35
1.5.1.1	Imaginäre Einheit	35
1.5.1.2	Komplexe Zahlen	35
1.5.2	Geometrische Darstellung	36
1.5.2.1	Vektordarstellung	36

1.5.2.2	Gleichheit komplexer Zahlen	36
1.5.2.3	Trigonometrische Form der komplexen Zahlen	36
1.5.2.4	Exponentialform einer komplexen Zahl	37
1.5.2.5	Konjugiert komplexe Zahlen	37
1.5.3	Rechnen mit komplexen Zahlen	37
1.5.3.1	Addition und Subtraktion	37
1.5.3.2	Multiplikation	38
1.5.3.3	Division	38
1.5.3.4	Allgemeine Regeln für die vier Grundrechenarten	39
1.5.3.5	Potenzieren einer komplexen Zahl	39
1.5.3.6	Radizieren oder Ziehen der n -ten Wurzel aus einer komplexen Zahl	39
1.6	Algebraische und transzendente Gleichungen	39
1.6.1	Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform	39
1.6.1.1	Definitionen	39
1.6.1.2	Systeme aus n algebraischen Gleichungen	40
1.6.1.3	Scheinbare Wurzeln	40
1.6.2	Gleichungen 1. bis 4. Grades	41
1.6.2.1	Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen)	41
1.6.2.2	Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen)	41
1.6.2.3	Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen)	42
1.6.2.4	Gleichungen 4. Grades	44
1.6.2.5	Gleichungen 5. und höheren Grades	45
1.6.3	Gleichungen n -ten Grades	45
1.6.3.1	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen	45
1.6.3.2	Gleichungen mit reellen Koeffizienten	46
1.6.4	Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische Gleichungen	47
1.6.4.1	Definition	47
1.6.4.2	Exponentialgleichungen	47
1.6.4.3	Logarithmische Gleichungen	48
1.6.4.4	Trigonometrische Gleichungen	48
1.6.4.5	Gleichungen mit Hyperbelfunktionen	48
2	Funktionen und ihre Darstellung	49
2.1	Funktionsbegriff	49
2.1.1	Definition der Funktion	49
2.1.1.1	Funktion	49
2.1.1.2	Reelle Funktion	49
2.1.1.3	Funktion von mehreren Veränderlichen	49
2.1.1.4	Komplexe Funktion	49
2.1.1.5	Weitere Funktionen	49
2.1.1.6	Funktionale	49
2.1.1.7	Funktion und Abbildung	50
2.1.2	Methoden zur Definition einer reellen Funktion	50
2.1.2.1	Angabe einer Funktion	50
2.1.2.2	Analytische Darstellung reeller Funktionen	50
2.1.3	Einige Funktionstypen	51
2.1.3.1	Monotone Funktionen	51
2.1.3.2	Beschränkte Funktionen	52
2.1.3.3	Extremwerte von Funktionen	52
2.1.3.4	Gerade Funktionen	52
2.1.3.5	Ungerade Funktionen	52
2.1.3.6	Darstellung mithilfe gerader und ungerader Funktionen	53

2.1.3.7	Periodische Funktionen	53
2.1.3.8	Inverse oder Umkehrfunktionen	53
2.1.4	Grenzwert von Funktionen	54
2.1.4.1	Definition des Grenzwertes einer Funktion	54
2.1.4.2	Zurückführung auf den Grenzwert einer Folge	54
2.1.4.3	Konvergenzkriterium von Cauchy	54
2.1.4.4	Unendlicher Grenzwert einer Funktion	55
2.1.4.5	Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion	55
2.1.4.6	Grenzwert einer Funktion für x gegen unendlich	55
2.1.4.7	Sätze über Grenzwerte von Funktionen	56
2.1.4.8	Berechnung von Grenzwerten	56
2.1.4.9	Größenordnung von Funktionen und Landau-Symbole	58
2.1.5	Stetigkeit einer Funktion	59
2.1.5.1	Stetigkeit und Unstetigkeitsstelle	59
2.1.5.2	Definition der Stetigkeit	60
2.1.5.3	Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten	60
2.1.5.4	Stetigkeit und Unstetigkeitspunkte elementarer Funktionen	61
2.1.5.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	62
2.2	Elementare Funktionen	63
2.2.1	Algebraische Funktionen	63
2.2.1.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	63
2.2.1.2	Gebrochenrationale Funktionen	63
2.2.1.3	Irrationale Funktionen	64
2.2.2	Transzendente Funktionen	64
2.2.2.1	Exponentialfunktionen	64
2.2.2.2	Logarithmische Funktionen	64
2.2.2.3	Trigonometrische Funktionen	64
2.2.2.4	Inverse trigonometrische Funktionen	64
2.2.2.5	Hyperbelfunktionen	64
2.2.2.6	Inverse Hyperbelfunktionen	64
2.2.3	Zusammengesetzte Funktionen	64
2.3	Polynome	65
2.3.1	Lineare Funktion	65
2.3.2	Quadratisches Polynom	65
2.3.3	Polynom 3. Grades	65
2.3.4	Polynom n -ten Grades	66
2.3.5	Parabel n -ter Ordnung	66
2.4	Gebrochenrationale Funktionen	67
2.4.1	Spezielle gebrochen lineare Funktion	67
2.4.2	Gebrochenlineare Funktion	67
2.4.3	Kurve 3. Ordnung, Typ I	68
2.4.4	Kurve 3. Ordnung, Typ II	68
2.4.5	Kurve 3. Ordnung, Typ III	69
2.4.6	Reziproke Potenz	71
2.5	Irrationale Funktionen	72
2.5.1	Quadratwurzel aus einem linearen Binom	72
2.5.2	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom	72
2.5.3	Potenzfunktion	72
2.6	Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen	73
2.6.1	Exponentialfunktion	73
2.6.2	Logarithmische Funktionen	73
2.6.3	Gaußsche Glockenkurve	74

2.6.4	Exponentialsumme	74
2.6.5	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve	76
2.6.6	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion	76
2.7	Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)	77
2.7.1	Grundlagen	77
2.7.1.1	Definition und Darstellung	77
2.7.1.2	Wertebereiche und Funktionsverläufe	79
2.7.2	Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen	81
2.7.2.1	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	81
2.7.2.2	Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel (Additionstheoreme)	81
2.7.2.3	Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache	82
2.7.2.4	Trigonometrische Funktionen des halben Winkels	83
2.7.2.5	Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen	83
2.7.2.6	Produkte trigonometrischer Funktionen	83
2.7.2.7	Potenzen trigonometrischer Funktionen	84
2.7.3	Beschreibung von Schwingungen	84
2.7.3.1	Problemstellung	84
2.7.3.2	Superposition oder Überlagerung von Schwingungen	84
2.7.3.3	Vektordiagramm für Schwingungen	85
2.7.3.4	Dämpfung von Schwingungen	85
2.8	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen)	86
2.8.1	Definition der zyklometrischen Funktionen	86
2.8.2	Zurückführung auf die Hauptwerte	86
2.8.3	Beziehungen zwischen den Hauptwerten	87
2.8.4	Formeln für negative Argumente	88
2.8.5	Summe und Differenz von $\arcsin x$ und $\arcsin y$	88
2.8.6	Summe und Differenz von $\arccos x$ und $\arccos y$	88
2.8.7	Summe und Differenz von $\arctan x$ und $\arctan y$	88
2.8.8	Spezielle Beziehungen für $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$	89
2.9	Hyperbelfunktionen	89
2.9.1	Definition der Hyperbelfunktionen	89
2.9.2	Grafische Darstellung der Hyperbelfunktionen	90
2.9.2.1	Hyperbelsinus	90
2.9.2.2	Hyperbelkosinus	90
2.9.2.3	Hyperbeltangens	91
2.9.2.4	Hyperbelkotangens	91
2.9.3	Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen	91
2.9.3.1	Hyperbelfunktionen einer Variablen	91
2.9.3.2	Darstellung einer Hyperbelfunktion durch eine andere gleichen Argumentes	91
2.9.3.3	Formeln für negative Argumente	91
2.9.3.4	Hyperbelfunktionen der Summe und der Differenz zweier Argumente (Additionstheoreme)	92
2.9.3.5	Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments	92
2.9.3.6	Formel von Moivre für Hyperbelfunktionen	92
2.9.3.7	Hyperbelfunktionen des halben Arguments	92
2.9.3.8	Summen und Differenzen von Hyperbelfunktionen	92
2.9.3.9	Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen mithilfe komplexer Argumente	93
2.10	Areafunktionen	93
2.10.1	Definitionen	93
2.10.1.1	Areasinus	93

	2.10.1.2	Areakosinus	93
	2.10.1.3	Areatangens	93
	2.10.1.4	Areakotangens	93
	2.10.2	Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus	94
	2.10.3	Beziehungen zwischen den verschiedenen Areafunktionen	95
	2.10.4	Summen und Differenzen von Areafunktionen	95
	2.10.5	Formeln für negative Argumente	95
2.11		Kurven dritter Ordnung	95
	2.11.1	Semikubische Parabel	95
	2.11.2	Versiera der Agnesi	96
	2.11.3	Kartesisches Blatt	96
	2.11.4	Zissoide	97
	2.11.5	Strophoide	97
2.12		Kurven vierter Ordnung	98
	2.12.1	Konchoide des Nikomedes	98
	2.12.2	Allgemeine Konchoide	99
	2.12.3	Pascalsche Schnecke	99
	2.12.4	Kardioide	100
	2.12.5	Cassinische Kurven	101
	2.12.6	Lemniskate	102
2.13		Zykloiden	102
	2.13.1	Gewöhnliche Zykloide	102
	2.13.2	Verlängerte und verkürzte Zykloiden oder Trochoiden	102
	2.13.3	Epizykloide	103
	2.13.4	Hypozykloide und Astroide	104
	2.13.5	Verlängerte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide	106
2.14		Spiralen	106
	2.14.1	Archimedische Spirale	106
	2.14.2	Hyperbolische Spirale	107
	2.14.3	Logarithmische Spirale	107
	2.14.4	Evolvente des Kreises	107
	2.14.5	Klothoide	108
2.15		Verschiedene andere Kurven	108
	2.15.1	Kettenlinie oder Katenoide	108
	2.15.2	Schleppkurve oder Traktrix	108
2.16		Aufstellung empirischer Kurven	110
	2.16.1	Verfahrensweise	110
		2.16.1.1 Kurvenbildervergleiche	110
		2.16.1.2 Rektifizierung	110
		2.16.1.3 Parameterbestimmung	110
	2.16.2	Gebräuchlichste empirische Formeln	111
		2.16.2.1 Potenzfunktionen	111
		2.16.2.2 Exponentialfunktionen	111
		2.16.2.3 Quadratisches Polynom	112
		2.16.2.4 Gebrochenlineare Funktion	113
		2.16.2.5 Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom	113
		2.16.2.6 Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve	114
		2.16.2.7 Kurve 3. Ordnung, Typ II	114
		2.16.2.8 Kurve 3. Ordnung, Typ III	114
		2.16.2.9 Kurve 3. Ordnung, Typ I	114
		2.16.2.10 Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion	115

2.16.2.11	Exponentialsumme	115
2.16.2.12	Vollständig durchgerechnetes Beispiel	116
2.17	Skalen und Funktionspapiere	117
2.17.1	Skalen	117
2.17.2	Funktionspapiere	119
2.17.2.1	Einfach-logarithmisches Funktionspapier	119
2.17.2.2	Doppelt-logarithmisches Funktionspapier	119
2.17.2.3	Funktionspapier mit einer reziproken Skala	119
2.17.2.4	Hinweis	120
2.18	Funktionen von mehreren Veränderlichen	121
2.18.1	Definition und Darstellung	121
2.18.1.1	Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	121
2.18.1.2	Geometrische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	121
2.18.2	Verschiedene ebene Definitionsbereiche	122
2.18.2.1	Definitionsbereich einer durch eine Menge gegebenen Funktion	122
2.18.2.2	Zweidimensionale Gebiete	122
2.18.2.3	Drei- und mehrdimensionale Gebiete	122
2.18.2.4	Methoden zur Definition einer Funktion	122
2.18.2.5	Formen der analytischen Darstellung einer Funktion	124
2.18.2.6	Abhängigkeit von Funktionen	125
2.18.3	Grenzwerte	126
2.18.3.1	Definition	126
2.18.3.2	Exakte Formulierung	126
2.18.3.3	Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche	126
2.18.3.4	Iterierte Grenzwerte	126
2.18.4	Stetigkeit	127
2.18.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	127
2.18.5.1	Nullstellensatz von Bolzano	127
2.18.5.2	Zwischenwertsatz	127
2.18.5.3	Satz über die Beschränktheit einer Funktion	127
2.18.5.4	Satz von Weierstrass über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes	127
2.19	Nomographie	128
2.19.1	Nomogramme	128
2.19.2	Netztafeln	128
2.19.3	Fluchtlinientafeln	129
2.19.3.1	Fluchtlinientafeln mit drei geraden Skalen durch einen Punkt	129
2.19.3.2	Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen und einer dazu geneigten geradlinigen Skala	130
2.19.3.3	Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen, geradlinigen Skalen und einer Kurvenskala	130
2.19.4	Netztafeln für mehr als drei Veränderliche	131
3	Geometrie	132
3.1	Planimetrie	132
3.1.1	Grundbegriffe	132
3.1.1.1	Punkt, Gerade, Strahl, Strecke	132
3.1.1.2	Winkel	132
3.1.1.3	Winkel an zwei sich schneidenden Geraden	133
3.1.1.4	Winkelpaare an geschnittenen Parallelen	133
3.1.1.5	Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß	134

3.1.2	Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen	134
3.1.2.1	Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen	134
3.1.2.2	Definition der Hyperbelfunktionen	135
3.1.3	Ebene Dreiecke	136
3.1.3.1	Aussagen zu ebenen Dreiecken	136
3.1.3.2	Symmetrie	137
3.1.4	Ebene Vierecke	139
3.1.4.1	Parallelogramm	139
3.1.4.2	Rechteck und Quadrat	139
3.1.4.3	Rhombus oder Raute	139
3.1.4.4	Trapez	139
3.1.4.5	Allgemeines Viereck	140
3.1.4.6	Sehnenviereck	140
3.1.4.7	Tangentenviereck	141
3.1.5	Ebene Vielecke oder Polygone	141
3.1.5.1	Allgemeines Vieleck	141
3.1.5.2	Regelmäßige konvexe Vielecke	141
3.1.5.3	Einige regelmäßige konvexe Vielecke	142
3.1.6	Ebene Kreisfiguren	143
3.1.6.1	Kreis	143
3.1.6.2	Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisausschnitt (Kreissektor) .	145
3.1.6.3	Kreisring	145
3.2	Ebene Trigonometrie	146
3.2.1	Dreiecksberechnungen	146
3.2.1.1	Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken	146
3.2.1.2	Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken	146
3.2.2	Geodätische Anwendungen	149
3.2.2.1	Geodätische Koordinaten	149
3.2.2.2	Winkel in der Geodäsie	150
3.2.2.3	Vermessungstechnische Anwendungen	152
3.3	Stereometrie	155
3.3.1	Geraden und Ebenen im Raum	155
3.3.2	Kanten, Ecken, Raumwinkel	156
3.3.3	Polyeder	157
3.3.4	Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind	160
3.4	Sphärische Trigonometrie	164
3.4.1	Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel	164
3.4.1.1	Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel	164
3.4.1.2	Spezielle Koordinatensysteme	166
3.4.1.3	Sphärisches Zweieck	167
3.4.1.4	Sphärisches Dreieck	167
3.4.1.5	Polardreieck	168
3.4.1.6	Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke	168
3.4.1.7	Dreikant	169
3.4.2	Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke	169
3.4.2.1	Allgemeine Aussagen	169
3.4.2.2	Grundformeln und Anwendungen	170
3.4.2.3	Weitere Formeln	172
3.4.3	Berechnung sphärischer Dreiecke	174
3.4.3.1	Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen	174
3.4.3.2	Rechtwinklig sphärisches Dreieck	174

	3.4.3.3	Schiefwinklig sphärisches Dreieck	176
	3.4.3.4	Sphärische Kurven	180
3.5		Vektoralgebra und analytische Geometrie	186
	3.5.1	Vektoralgebra	186
	3.5.1.1	Definition des Vektors	186
	3.5.1.2	Rechenregeln	187
	3.5.1.3	Koordinaten eines Vektors	188
	3.5.1.4	Richtungskoeffizient oder Entwicklungskoeffizient	189
	3.5.1.5	Skalarprodukt und Vektorprodukt	189
	3.5.1.6	Mehrfache multiplikative Verknüpfungen	191
	3.5.1.7	Vektorielle Gleichungen	193
	3.5.1.8	Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors	194
	3.5.1.9	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra	195
	3.5.2	Analytische Geometrie der Ebene	196
	3.5.2.1	Ebene Koordinatensysteme	196
	3.5.2.2	Koordinatentransformationen	197
	3.5.2.3	Spezielle Punkte in der Ebene	198
	3.5.2.4	Flächeninhalte	200
	3.5.2.5	Gleichung einer Kurve	200
	3.5.2.6	Gerade	201
	3.5.2.7	Kreis	204
	3.5.2.8	Ellipse	205
	3.5.2.9	Hyperbel	207
	3.5.2.10	Parabel	210
	3.5.2.11	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	212
	3.5.3	Analytische Geometrie des Raumes	215
	3.5.3.1	Grundlagen	215
	3.5.3.2	Räumliche Koordinatensysteme	217
	3.5.3.3	Koordinatentransformationen	219
	3.5.3.4	Drehung mithilfe von Richtungskosinussen	220
	3.5.3.5	Drehung mithilfe von Cardan–Winkeln	221
	3.5.3.6	Drehung mithilfe von Euler–Winkeln	222
	3.5.3.7	Spezielle Punkte im Raum	223
	3.5.3.8	Gleichung einer Fläche	224
	3.5.3.9	Gleichung einer Raumkurve	225
	3.5.3.10	Ebenen im Raum	225
	3.5.3.11	Geraden im Raum	228
	3.5.3.12	Schnittpunkte und Winkel von Ebenen und Geraden im Raum	229
	3.5.3.13	Flächen 2. Ordnung, Gleichungen in Normalform	231
	3.5.3.14	Flächen 2. Ordnung, allgemeine Theorie	234
	3.5.4	Geometrische Transformationen und Koordinatentransformationen	236
	3.5.4.1	Geometrische 2D–Transformationen	236
	3.5.4.2	Homogene Koordinaten, Matrixdarstellung	238
	3.5.4.3	Koordinatentransformation	238
	3.5.4.4	Verkettung von Transformationen	239
	3.5.4.5	3D–Transformationen	240
	3.5.4.6	Deformationstransformationen	243
	3.5.5	Planare Projektionen	244
	3.5.5.1	Klassifizierung	244
	3.5.5.2	Ansichtskoordinatensystem	245
	3.5.5.3	Tafelprojektionen	245
	3.5.5.4	Axonometrische Projektion	246

	3.5.5.5	Isometrische Projektion	246
	3.5.5.6	Schiefe Parallelprojektion	247
	3.5.5.7	Perspektivische Projektion	248
3.6		Differenzialgeometrie	250
	3.6.1	Ebene Kurven	250
	3.6.1.1	Definitionen ebener Kurven	250
	3.6.1.2	Lokale Elemente einer Kurve	250
	3.6.1.3	Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten	256
	3.6.1.4	Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung	261
	3.6.1.5	Evoluten und Evolventen	262
	3.6.1.6	Einhüllende von Kurvenscharen	262
	3.6.2	Raumkurven	263
	3.6.2.1	Definitionen für Raumkurven	263
	3.6.2.2	Begleitendes Dreibein	264
	3.6.2.3	Krümmung und Windung	266
	3.6.3	Flächen	269
	3.6.3.1	Definitionen für Flächen	269
	3.6.3.2	Tangentialebene und Flächennormale	270
	3.6.3.3	Linienelement auf einer Fläche	271
	3.6.3.4	Krümmung einer Fläche	273
	3.6.3.5	Regelflächen und abwickelbare Flächen	275
	3.6.3.6	Geodätische Linien auf einer Fläche	276
4		Lineare Algebra	277
	4.1	Matrizen	277
	4.1.1	Begriff der Matrix	277
	4.1.2	Quadratische Matrizen	278
	4.1.3	Vektoren	279
	4.1.4	Rechenoperationen mit Matrizen	280
	4.1.5	Rechenregeln für Matrizen	283
	4.1.6	Vektor- und Matrizennormen	285
	4.1.6.1	Vektornormen	285
	4.1.6.2	Matrizennormen	285
	4.2	Determinanten	286
	4.2.1	Definitionen	286
	4.2.2	Rechenregeln für Determinanten	286
	4.2.3	Berechnung von Determinanten	287
	4.3	Tensoren	288
	4.3.1	Transformation des Koordinatensystems	288
	4.3.2	Tensoren in kartesischen Koordinaten	289
	4.3.3	Tensoren mit speziellen Eigenschaften	291
	4.3.3.1	Tensoren 2. Stufe	291
	4.3.3.2	Invariante Tensoren	291
	4.3.4	Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen	292
	4.3.4.1	Kovariante und kontravariante Basisvektoren	292
	4.3.4.2	Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe	293
	4.3.4.3	Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe	294
	4.3.4.4	Rechenregeln	295
	4.3.5	Pseudotensoren	295
	4.3.5.1	Punktspiegelung am Koordinatenursprung	295
	4.3.5.2	Einführung des Begriffs Pseudotensor	296

4.4	Quaternionen und Anwendungen	297
4.4.1	Quaternionen	298
4.4.1.1	Definition und Darstellung	298
4.4.1.2	Matrizendarstellung von Quaternionen	299
4.4.1.3	Rechenregeln	300
4.4.2	Darstellung von Drehungen im $\mathbb{R}^3$	302
4.4.2.1	Drehungen eines Objektes um die Koordinatenachsen	303
4.4.2.2	Cardan–Winkel	303
4.4.2.3	Euler–Winkel	304
4.4.2.4	Drehung um eine beliebige Achse durch den Nullpunkt	304
4.4.2.5	Drehungen und Quaternionen	305
4.4.2.6	Quaternionen und Cardan–Winkel	307
4.4.2.7	Effizienz der Algorithmen	309
4.4.3	Anwendungen der Quaternionen	310
4.4.3.1	3D–Rotationen in der Computergrafik	310
4.4.3.2	Interpolation mittels Rotationsmatrizen	311
4.4.3.3	Stereografische Projektion	311
4.4.3.4	Satellitennavigation	312
4.4.3.5	Vektoranalysis	313
4.4.3.6	Einheitsbiquaternionen und Starrkörperbewegungen	314
4.5	Lineare Gleichungssysteme	315
4.5.1	Lineare Systeme, Austauschverfahren	315
4.5.1.1	Lineare Systeme	315
4.5.1.2	Austauschverfahren	315
4.5.1.3	Lineare Abhängigkeiten	316
4.5.1.4	Invertierung einer Matrix	316
4.5.2	Lösung linearer Gleichungssysteme	316
4.5.2.1	Definition und Lösbarkeit	316
4.5.2.2	Anwendung des Austauschverfahrens	318
4.5.2.3	Cramersche Regel	319
4.5.2.4	Gaußscher Algorithmus	320
4.5.3	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	321
4.5.3.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmittelprobleme	321
4.5.3.2	Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme	322
4.6	Eigenwertaufgaben bei Matrizen	322
4.6.1	Allgemeines Eigenwertproblem	322
4.6.2	Spezielles Eigenwertproblem	322
4.6.2.1	Charakteristisches Polynom	322
4.6.2.2	Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen	324
4.6.2.3	Hauptachsentransformation quadratischer Formen	325
4.6.2.4	Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten	327
4.6.3	Singulärwertzerlegung	329
5	Algebra und Diskrete Mathematik	330
5.1	Logik	330
5.1.1	Aussagenlogik	330
5.1.2	Ausdrücke der Prädikatenlogik	333
5.2	Mengenlehre	335
5.2.1	Mengenbegriff, spezielle Mengen	335
5.2.2	Operationen mit Mengen	336
5.2.3	Relationen und Abbildungen	339

5.2.4	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	341
5.2.5	Mächtigkeit von Mengen	342
5.3	Klassische algebraische Strukturen	344
5.3.1	Operationen	344
5.3.2	Halbgruppen	344
5.3.3	Gruppen	344
5.3.3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	344
5.3.3.2	Untergruppen und direkte Produkte	346
5.3.3.3	Abbildungen zwischen Gruppen	347
5.3.4	Darstellung von Gruppen	348
5.3.4.1	Definitionen	348
5.3.4.2	Spezielle Darstellungen	351
5.3.4.3	Direkte Summe von Darstellungen	352
5.3.4.4	Direktes Produkt von Darstellungen	352
5.3.4.5	Reduzible und irreduzible Darstellungen	352
5.3.4.6	Erstes Schursches Lemma	353
5.3.4.7	Clebsch–Gordan–Reihe	353
5.3.4.8	Irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe S_M	354
5.3.5	Anwendungen von Gruppen	354
5.3.5.1	Symmetrieoperationen, Symmetrieelemente	354
5.3.5.2	Symmetriegruppen	355
5.3.5.3	Symmetrieoperationen bei Molekülen	355
5.3.5.4	Symmetriegruppen in der Kristallographie	357
5.3.5.5	Symmetriegruppen in der Quantenmechanik	359
5.3.5.6	Weitere Anwendungsbeispiele aus der Physik	360
5.3.6	Lie–Gruppen und Lie–Algebren	360
5.3.6.1	Einführung	360
5.3.6.2	Matrix–Lie–Gruppen	361
5.3.6.3	Wichtige Anwendungen	364
5.3.6.4	Lie–Algebra	365
5.3.6.5	Anwendungen in der Robotik	367
5.3.7	Ringe und Körper	370
5.3.7.1	Definitionen	370
5.3.7.2	Unterringe, Ideale	371
5.3.7.3	Homomorphismen, Isomorphismen, Homomorphiesatz	372
5.3.7.4	Endliche Körper und Schieberegister	372
5.3.8	Vektorräume	374
5.3.8.1	Definition	374
5.3.8.2	Lineare Abhängigkeit	375
5.3.8.3	Lineare Operatoren	375
5.3.8.4	Unterräume, Dimensionsformel	376
5.3.8.5	Euklidische Vektorräume, Euklidische Norm	376
5.3.8.6	Bilineare Abbildungen, Bilinearformen	377
5.4	Elementare Zahlentheorie	379
5.4.1	Teilbarkeit	379
5.4.1.1	Teilbarkeit und elementare Teilbarkeitsregeln	379
5.4.1.2	Primzahlen	379
5.4.1.3	Teilbarkeitskriterien	381
5.4.1.4	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	382
5.4.1.5	Fibonacci–Zahlen	384
5.4.2	Lineare Diophantische Gleichungen	384
5.4.3	Kongruenzen und Restklassen	386

5.4.4	Sätze von Fermat, Euler und Wilson	390
5.4.5	Weitere Primzahltests	391
5.4.6	Codierungen	392
5.4.6.1	Prüfzeichenverfahren	392
5.4.6.2	Fehlerkorrigierende Codes	394
5.5	Kryptologie	396
5.5.1	Aufgabe der Kryptologie	396
5.5.2	Kryptosysteme	396
5.5.3	Mathematische Präzisierung	397
5.5.4	Sicherheit von Kryptosystemen	397
5.5.4.1	Methoden der klassischen Kryptologie	398
5.5.4.2	Affine Substitutionen	398
5.5.4.3	Vigenere-Chiffre	398
5.5.4.4	Matrixsubstitutionen	399
5.5.5	Methoden der klassischen Kryptoanalyse	399
5.5.5.1	Statistische Analyse	399
5.5.5.2	Kasiski-Friedman-Test	399
5.5.6	One-Time-Tape	400
5.5.7	Verfahren mit öffentlichem Schlüssel	400
5.5.7.1	Konzept von Diffie und Hellman	400
5.5.7.2	Einwegfunktionen	401
5.5.7.3	RSA-Verfahren	401
5.5.8	AES-Algorithmus (Advanced Encryption Standard)	402
5.5.9	IDEA-Algorithmus (International Data Encryption Algorithm)	402
5.6	Universelle Algebra	403
5.6.1	Definition	403
5.6.2	Kongruenzrelationen, Faktoralgebren	403
5.6.3	Homomorphismen	403
5.6.4	Homomorphiesatz	404
5.6.5	Varietäten	404
5.6.6	Termalgebren, freie Algebren	404
5.7	Boolesche Algebren und Schaltalgebra	405
5.7.1	Definition	405
5.7.2	Dualitätsprinzip	405
5.7.3	Endliche Boolesche Algebren	406
5.7.4	Boolesche Algebren als Ordnungen	406
5.7.5	Boolesche Funktionen, Boolesche Ausdrücke	406
5.7.6	Normalformen	408
5.7.7	Schaltalgebra	408
5.8	Algorithmen der Graphentheorie	411
5.8.1	Grundbegriffe und Bezeichnungen	411
5.8.2	Durchlaufungen von ungerichteten Graphen	414
5.8.2.1	Kantenfolgen	414
5.8.2.2	Eulersche Linien	415
5.8.2.3	Hamilton-Kreise	416
5.8.3	Bäume und Gerüste	417
5.8.3.1	Bäume	417
5.8.3.2	Gerüste	418
5.8.4	Matchings	419
5.8.5	Planare Graphen	420
5.8.6	Bahnen in gerichteten Graphen	421
5.8.7	Transportnetze	422

5.9	Fuzzy-Logik	424
5.9.1	Grundlagen der Fuzzy-Logik	424
5.9.1.1	Interpretation von Fuzzy-Mengen (Unscharfe Mengen)	424
5.9.1.2	Zugehörigkeitsfunktionen	425
5.9.1.3	Fuzzy-Mengen	427
5.9.2	Verknüpfungen unscharfer Mengen	428
5.9.2.1	Konzept für eine Verknüpfung (Aggregation) unscharfer Mengen	429
5.9.2.2	Praktische Verknüpfungen unscharfer Mengen	429
5.9.2.3	Kompensatorische Operatoren	432
5.9.2.4	Erweiterungsprinzip	432
5.9.2.5	Unscharfe Komplementfunktion	432
5.9.3	Fuzzy-wertige Relationen	433
5.9.3.1	Fuzzy-Relationen	433
5.9.3.2	Fuzzy-Relationenprodukt $R \circ S$	435
5.9.4	Fuzzy-Inferenz	436
5.9.5	Defuzzifizierungsmethoden	438
5.9.6	Wissensbasierte Fuzzy-Systeme	439
5.9.6.1	Methode Mamdani	439
5.9.6.2	Methode Sugeno	439
5.9.6.3	Kognitive Systeme	440
5.9.6.4	Wissensbasiertes Interpolationssystem	442
6	Differenzialrechnung	444
6.1	Differenziation von Funktionen einer Veränderlichen	444
6.1.1	Differenzialquotient	444
6.1.2	Differenziationsregeln für Funktionen einer Veränderlicher	445
6.1.2.1	Ableitungen elementarer Funktionen	445
6.1.2.2	Grundregeln für das Differenzieren	445
6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung	451
6.1.3.1	Definition der Ableitungen höherer Ordnung	451
6.1.3.2	Ableitungen höherer Ordnung der einfachsten Funktionen	451
6.1.3.3	Leibnizsche Regel	451
6.1.3.4	Höhere Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung	452
6.1.3.5	Ableitungen höherer Ordnung der inversen Funktion	452
6.1.4	Hauptsätze der Differenzialrechnung	453
6.1.4.1	Monotoniebedingungen	453
6.1.4.2	Satz von Fermat	453
6.1.4.3	Satz von Rolle	454
6.1.4.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	454
6.1.4.5	Satz von Taylor für Funktionen von einer Veränderlichen	455
6.1.4.6	Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	455
6.1.5	Bestimmung von Extremwerten und Wendepunkten	455
6.1.5.1	Maxima und Minima	455
6.1.5.2	Notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremwertes	456
6.1.5.3	Ermittlung der relativen Extremwerte einer differenzierbaren, explizit gegebenen Funktion $y = f(x)$	456
6.1.5.4	Bestimmung der globalen Extremwerte	457
6.1.5.5	Bestimmung der Extremwerte einer implizit gegebenen Funktion	457
6.2	Differenziation von Funktionen von mehreren Veränderlichen	458
6.2.1	Partielle Ableitungen	458
6.2.1.1	Partielle Ableitung einer Funktion	458
6.2.1.2	Geometrische Bedeutung bei zwei Veränderlichen	458

6.2.1.3	Begriff des Differenzials	458
6.2.1.4	Haupteigenschaften des Differenzials	459
6.2.1.5	Partielles Differenzial	460
6.2.2	Vollständiges Differenzial und Differenziale höherer Ordnung	460
6.2.2.1	Begriff des vollständigen Differenzials einer Funktion von mehreren Veränderlichen (totales Differenzial)	460
6.2.2.2	Ableitungen und Differenziale höherer Ordnungen	461
6.2.2.3	Satz von Taylor für Funktionen von mehreren Veränderlichen	462
6.2.3	Differenziationsregeln für Funktionen von mehreren Veränderlichen	463
6.2.3.1	Differenziation von zusammengesetzten Funktionen	463
6.2.3.2	Differenziation impliziter Funktionen	463
6.2.4	Substitution von Variablen in Differenzialausdrücken und Koordinatentransformationen	465
6.2.4.1	Funktion von einer Veränderlichen	465
6.2.4.2	Funktion zweier Veränderlicher	466
6.2.5	Extremwerte von Funktionen von mehreren Veränderlichen	467
6.2.5.1	Definition des relativen Extremums	467
6.2.5.2	Geometrische Bedeutung	467
6.2.5.3	Bestimmung der Extremwerte einer differenzierbaren Funktion von zwei Veränderlichen	468
6.2.5.4	Bestimmung der Extremwerte einer Funktion von n Veränderlichen	468
6.2.5.5	Lösung von Approximationsaufgaben	469
6.2.5.6	Bestimmung der Extremwerte unter Vorgabe von Nebenbedingungen	469
7	Unendliche Reihen	470
7.1	Zahlenfolgen	470
7.1.1	Eigenschaften von Zahlenfolgen	470
7.1.1.1	Definition der Zahlenfolge	470
7.1.1.2	Monotone Zahlenfolgen	470
7.1.1.3	Beschränkte Zahlenfolgen	470
7.1.2	Grenzwerte von Zahlenfolgen	471
7.2	Reihen mit konstanten Gliedern	472
7.2.1	Allgemeine Konvergenzsätze	472
7.2.1.1	Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen	472
7.2.1.2	Allgemeine Sätze über die Konvergenz von Reihen	473
7.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern	473
7.2.2.1	Vergleichskriterium	473
7.2.2.2	Quotientenkriterium von d'Alembert	474
7.2.2.3	Wurzelkriterium von Cauchy	474
7.2.2.4	Integralkriterium von Cauchy	475
7.2.3	Absolute und bedingte Konvergenz	475
7.2.3.1	Definition	475
7.2.3.2	Eigenschaften absolut konvergenter Reihen	476
7.2.3.3	Alternierende Reihen	476
7.2.4	Einige spezielle Reihen	477
7.2.4.1	Summenwerte einiger Reihen mit konstanten Gliedern	477
7.2.4.2	Bernoullische und Eulersche Zahlen	478
7.2.5	Abschätzung des Reihenrestes	479
7.2.5.1	Abschätzung mittels Majorante	479
7.2.5.2	Alternierende konvergente Reihen	480
7.2.5.3	Spezielle Reihen	480
7.3	Funktionenreihen	480
7.3.1	Definitionen	480

7.3.2	Gleichmäßige Konvergenz	481
7.3.2.1	Definition, Satz von Weierstrass	481
7.3.2.2	Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen	482
7.3.3	Potenzreihen	482
7.3.3.1	Definition, Konvergenz	482
7.3.3.2	Rechnen mit Potenzreihen	483
7.3.3.3	Entwicklung in Taylor-Reihen, MacLaurinsche Reihe	484
7.3.4	Näherungsformeln	485
7.3.5	Asymptotische Potenzreihen	485
7.3.5.1	Asymptotische Gleichheit	485
7.3.5.2	Asymptotische Potenzreihen	485
7.4	Fourier-Reihen	487
7.4.1	Trigonometrische Summe und Fourier-Reihe	487
7.4.1.1	Grundbegriffe	487
7.4.1.2	Wichtigste Eigenschaften von Fourier-Reihen	488
7.4.2	Koeffizientenbestimmung für symmetrische Funktionen	489
7.4.2.1	Symmetrien verschiedener Art	489
7.4.2.2	Formen der Entwicklung in eine Fourier-Reihe	490
7.4.3	Koeffizientenbestimmung mithilfe numerischer Methoden	490
7.4.4	Fourier-Reihe und Fourier-Integral	491
7.4.5	Hinweise zur Tabelle einiger Fourier-Entwicklungen	492
8	Integralrechnung	493
8.1	Unbestimmtes Integral	493
8.1.1	Stammfunktion oder Integral	493
8.1.1.1	Unbestimmte Integrale	494
8.1.1.2	Integrale elementarer Funktionen	494
8.1.2	Integrationsregeln	494
8.1.3	Integration rationaler Funktionen	498
8.1.3.1	Integrale ganzrationaler Funktionen (Polynome)	498
8.1.3.2	Integrale gebrochenrationaler Funktionen	498
8.1.3.3	Vier Fälle bei der Partialbruchzerlegung	498
8.1.4	Integration irrationaler Funktionen	501
8.1.4.1	Substitution zur Rückführung auf Integrale rationaler Funktionen	501
8.1.4.2	Integration binomischer Integranden	502
8.1.4.3	Elliptische Integrale	502
8.1.5	Integration trigonometrischer Funktionen	504
8.1.5.1	Substitution	504
8.1.5.2	Vereinfachte Methoden	504
8.1.6	Integration weiterer transzendenter Funktionen	505
8.1.6.1	Integrale mit Exponentialfunktionen	505
8.1.6.2	Integrale mit Hyperbelfunktionen	505
8.1.6.3	Anwendung der partiellen Integration	506
8.1.6.4	Integrale transzendenter Funktionen	506
8.2	Bestimmte Integrale	506
8.2.1	Grundbegriffe, Regeln und Sätze	506
8.2.1.1	Definition und Existenz des bestimmten Integrals	506
8.2.1.2	Eigenschaften bestimmter Integrale	507
8.2.1.3	Weitere Sätze über Integrationsgrenzen	509
8.2.1.4	Berechnung bestimmter Integrale	511
8.2.2	Anwendungen bestimmter Integrale	513
8.2.2.1	Allgemeines Prinzip zur Anwendung des bestimmten Integrals	513

8.2.2.2	Anwendungen in der Geometrie	514
8.2.2.3	Anwendungen in Mechanik und Physik	517
8.2.3	Uneigentliche Integrale, Stieltjes- und Lebesgue-Integrale	519
8.2.3.1	Verallgemeinerungen des Integralbegriffs	519
8.2.3.2	Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen	520
8.2.3.3	Integrale mit unbeschränktem Integranden	522
8.2.4	Parameterintegrale	525
8.2.4.1	Definition des Parameterintegrals	525
8.2.4.2	Differenziation unter dem Integralzeichen	525
8.2.4.3	Integration unter dem Integralzeichen	525
8.2.5	Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen	526
8.3	Kurvenintegrale	528
8.3.1	Kurvenintegrale 1. Art	529
8.3.1.1	Definitionen	529
8.3.1.2	Existenzsatz	529
8.3.1.3	Berechnung des Kurvenintegrals 1. Art	530
8.3.1.4	Anwendungen des Kurvenintegrals 1. Art	530
8.3.2	Kurvenintegrale 2. Art	530
8.3.2.1	Definitionen	530
8.3.2.2	Existenzsatz	532
8.3.2.3	Berechnung der Kurvenintegrale 2. Art	532
8.3.3	Kurvenintegrale allgemeiner Art	533
8.3.3.1	Definition	533
8.3.3.2	Eigenschaften des Kurvenintegrals allgemeiner Art	533
8.3.3.3	Umlaufintegral	534
8.3.4	Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Integrationsweg	534
8.3.4.1	Zweidimensionaler Fall	534
8.3.4.2	Existenz der Stammfunktion	535
8.3.4.3	Dreidimensionaler Fall	535
8.3.4.4	Berechnung der Stammfunktion	535
8.3.4.5	Verschwinden des Umlaufintegrals	536
8.4	Mehrfachintegrale	537
8.4.1	Doppelintegral	537
8.4.1.1	Begriff des Doppelintegrals	537
8.4.1.2	Berechnung des Doppelintegrals	538
8.4.1.3	Anwendungen von Doppelintegralen	540
8.4.2	Dreifachintegral	540
8.4.2.1	Begriff des Dreifachintegrals	541
8.4.2.2	Berechnung des Dreifachintegrals	541
8.4.2.3	Anwendungen von Dreifachintegralen	545
8.5	Oberflächenintegrale	545
8.5.1	Oberflächenintegrale 1. Art	545
8.5.1.1	Begriff des Oberflächenintegrals 1. Art	545
8.5.1.2	Berechnung des Oberflächenintegrals 1. Art	547
8.5.1.3	Anwendungen des Oberflächenintegrals 1. Art	548
8.5.2	Oberflächenintegrale 2. Art	548
8.5.2.1	Begriff des Oberflächenintegrals 2. Art	548
8.5.2.2	Berechnung des Oberflächenintegrals 2. Art	550
8.5.3	Oberflächenintegral allgemeiner Art	551
8.5.3.1	Begriff des Oberflächenintegrals allgemeiner Art	551
8.5.3.2	Eigenschaften des Oberflächenintegrals allgemeiner Art	551

9	Differenzialgleichungen	553
9.1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	553
9.1.1	Differenzialgleichungen 1. Ordnung	554
9.1.1.1	Existenzsatz, Richtungsfeld	554
9.1.1.2	Wichtige Integrationsmethoden	555
9.1.1.3	Implizite Differenzialgleichungen	558
9.1.1.4	Singuläre Integrale und singuläre Punkte	559
9.1.1.5	Näherungsmethoden zur Integration von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	562
9.1.2	Differenzialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differenzialgleichungen	564
9.1.2.1	Grundlegende Betrachtungen	564
9.1.2.2	Erniedrigung der Ordnung	565
9.1.2.3	Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung	567
9.1.2.4	Lösung linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	569
9.1.2.5	Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	571
9.1.2.6	Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung	574
9.1.3	Randwertprobleme	582
9.1.3.1	Problemstellung	582
9.1.3.2	Haupteigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte	583
9.1.3.3	Entwicklung nach Eigenfunktionen	584
9.1.3.4	Singuläre Fälle	584
9.2	Partielle Differenzialgleichungen	585
9.2.1	Partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung	585
9.2.1.1	Lineare partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung	585
9.2.1.2	Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung	587
9.2.2	Lineare partielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung	590
9.2.2.1	Klassifikation und Eigenschaften der Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen	590
9.2.2.2	Klassifikation und Eigenschaften der Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen	592
9.2.2.3	Integrationsmethoden für lineare partielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung	593
9.2.3	Partielle Differenzialgleichungen aus Naturwissenschaft und Technik	603
9.2.3.1	Problemstellungen und Randbedingungen	603
9.2.3.2	Wellengleichung	605
9.2.3.3	Wärmeleitungs- und Diffusionsgleichung für ein homogenes Medium	606
9.2.3.4	Potenzialgleichung	607
9.2.4	Schrödinger-Gleichung	607
9.2.4.1	Begriff der Schrödinger-Gleichung	607
9.2.4.2	Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung	608
9.2.4.3	Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung	608
9.2.4.4	Statistische Interpretation der Wellenfunktion	609
9.2.4.5	Kräftefreie Bewegung eines Teilchens in einem Quader	611
9.2.4.6	Teilchenbewegung im symmetrischen Zentralfeld	613
9.2.4.7	Linearer harmonischer Oszillator	616
9.2.5	Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos	619
9.2.5.1	Physikalisch-mathematische Problemstellung	619
9.2.5.2	Korteweg-de-Vries-Gleichung	620
9.2.5.3	Nichtlineare Schrödinger-Gleichung	621

9.2.5.4	Sinus–Gordon–Gleichung	622
9.2.5.5	Weitere nichtlineare Evolutionsgleichungen mit Solitonlösungen . .	624
10	Variationsrechnung	625
10.1	Aufgabenstellung	625
10.2	Historische Aufgaben	626
10.2.1	Isoperimetrisches Problem	626
10.2.2	Brachistochronenproblem	626
10.3	Variationsaufgaben mit Funktionen einer Veränderlichen	626
10.3.1	Einfache Variationsaufgabe und Extremale	626
10.3.2	Eulersche Differenzialgleichung der Variationsrechnung	627
10.3.3	Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen	628
10.3.4	Variationsaufgaben mit höheren Ableitungen	629
10.3.5	Variationsaufgaben mit mehreren gesuchten Funktionen	630
10.3.6	Variationsaufgaben in Parameterdarstellung	630
10.4	Variationsaufgaben mit Funktionen von mehreren Veränderlichen	632
10.4.1	Einfache Variationsaufgabe	632
10.4.2	Allgemeinere Variationsaufgaben	633
10.5	Numerische Lösung von Variationsaufgaben	633
10.6	Ergänzungen	634
10.6.1	Erste und zweite Variation	634
10.6.2	Anwendungen in der Physik	635
11	Lineare Integralgleichungen	636
11.1	Einführung und Klassifikation	636
11.2	Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art	637
11.2.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen	637
11.2.2	Methode der sukzessiven Approximation, Neumann–Reihe	640
11.2.3	Fredholmsche Lösungsmethode, Fredholmsche Sätze	642
11.2.3.1	Fredholmsche Lösungsmethode	642
11.2.3.2	Fredholmsche Sätze	644
11.2.4	Numerische Verfahren für Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art	645
11.2.4.1	Approximation des Integrals	645
11.2.4.2	Kernapproximation	647
11.2.4.3	Kollokationsmethode	649
11.3	Fredholmsche Integralgleichungen 1. Art	651
11.3.1	Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen	651
11.3.2	Begriffe, analytische Grundlagen	652
11.3.3	Zurückführung der Integralgleichung auf ein lineares Gleichungssystem . . .	653
11.3.4	Lösung der homogenen Integralgleichung 1. Art	655
11.3.5	Konstruktion zweier spezieller Orthonormalsysteme zu einem gegebenen Kern	656
11.3.6	Iteratives Verfahren	657
11.4	Volterrasche Integralgleichungen	658
11.4.1	Theoretische Grundlagen	658
11.4.2	Lösung durch Differenziation	659
11.4.3	Neumannsche Reihe zur Lösung der Volterraschen Integralgleichungen 2. Art	660
11.4.4	Volterrasche Integralgleichungen vom Faltungstyp	661
11.4.5	Numerische Behandlung Volterrascher Integralgleichungen 2. Art	662
11.5	Singuläre Integralgleichungen	664
11.5.1	Abelsche Integralgleichung	664
11.5.2	Singuläre Integralgleichungen mit Cauchy–Kernen	665
11.5.2.1	Formulierung der Aufgabe	665

11.5.2.2	Existenz einer Lösung	666
11.5.2.3	Eigenschaften des Cauchy-Integrals	666
11.5.2.4	Hilbertsches Randwertproblem	666
11.5.2.5	Lösung des Hilbertschen Randwertproblems	667
11.5.2.6	Lösung der charakteristischen Integralgleichung	667
12	Funktionalanalysis	669
12.1	Vektorräume	669
12.1.1	Begriff des Vektorraumes	669
12.1.2	Lineare und affin-lineare Teilmengen	670
12.1.3	Linear unabhängige Elemente	672
12.1.4	Konvexe Teilmengen und konvexe Hülle	672
12.1.4.1	Konvexe Mengen	672
12.1.4.2	Kegel	673
12.1.5	Lineare Operatoren und Funktionale	673
12.1.5.1	Abbildungen	673
12.1.5.2	Homomorphismus und Endomorphismus	674
12.1.5.3	Isomorphe Vektorräume	674
12.1.6	Komplexifikation reeller Vektorräume	674
12.1.7	Geordnete Vektorräume	674
12.1.7.1	Kegel und Halbordnung	674
12.1.7.2	Ordnungsbeschränkte Mengen	675
12.1.7.3	Positive Operatoren	675
12.1.7.4	Vektorverbände	676
12.2	Metrische Räume	677
12.2.1	Begriff des metrischen Raumes	677
12.2.1.1	Kugeln, Umgebungen und offene Mengen	678
12.2.1.2	Konvergenz von Folgen im metrischen Raum	679
12.2.1.3	Abgeschlossene Mengen und Abschließung	679
12.2.1.4	Dichte Teilmengen und separable metrische Räume	680
12.2.2	Vollständige metrische Räume	680
12.2.2.1	Cauchy-Folge	680
12.2.2.2	Vollständiger metrischer Raum	681
12.2.2.3	Einige fundamentale Sätze in vollständigen metrischen Räumen	681
12.2.2.4	Einige Anwendungen des Kontraktionsprinzips	682
12.2.2.5	Vervollständigung eines metrischen Raumes	683
12.2.3	Stetige Operatoren	684
12.3	Normierte Räume	684
12.3.1	Begriff des normierten Raumes	684
12.3.1.1	Axiome des normierten Raumes	684
12.3.1.2	Einige Eigenschaften normierter Räume	685
12.3.2	Banach-Räume	685
12.3.2.1	Reihen in normierten Räumen	685
12.3.2.2	Beispiele von Banach-Räumen	685
12.3.2.3	Sobolew-Räume	686
12.3.3	Geordnete normierte Räume	686
12.3.4	Normierte Algebren	687
12.4	Hilbert-Räume	688
12.4.1	Begriff des Hilbert-Raumes	688
12.4.1.1	Skalarprodukt	688
12.4.1.2	Unitäre Räume und einige ihrer Eigenschaften	688
12.4.1.3	Hilbert-Raum	689

12.4.2	Orthogonalität	689
12.4.2.1	Eigenschaften der Orthogonalität	689
12.4.2.2	Orthogonale Systeme	690
12.4.3	Fourier-Reihen im Hilbert-Raum	691
12.4.3.1	Bestapproximation	691
12.4.3.2	Parsevalsche Gleichung, Satz von Riesz-Fischer	691
12.4.4	Existenz einer Basis. Isomorphe Hilbert-Räume	692
12.5	Stetige lineare Operatoren und Funktionale	692
12.5.1	Beschränktheit, Norm und Stetigkeit linearer Operatoren	692
12.5.1.1	Beschränktheit und Norm linearer Operatoren	692
12.5.1.2	Raum linearer stetiger Operatoren	692
12.5.1.3	Konvergenz von Operatorfolgen	693
12.5.2	Lineare stetige Operatoren in Banach-Räumen	693
12.5.3	Elemente der Spektraltheorie linearer Operatoren	695
12.5.3.1	Resolventenmenge und Resolvente eines Operators	695
12.5.3.2	Spektrum eines Operators	695
12.5.4	Stetige lineare Funktionale	696
12.5.4.1	Definition	696
12.5.4.2	Stetige lineare Funktionale im Hilbert-Raum, Satz von Riesz	697
12.5.4.3	Stetige lineare Funktionale in L^p	697
12.5.5	Fortsetzung von linearen Funktionalen	697
12.5.6	Trennung konvexer Mengen	698
12.5.7	Bidualer Raum und reflexive Räume	699
12.6	Adjungierte Operatoren in normierten Räumen	699
12.6.1	Adjungierter Operator zu einem beschränkten Operator	699
12.6.2	Adjungierter Operator zu einem unbeschränkten Operator	700
12.6.3	Selbstadjungierte Operatoren	700
12.6.3.1	Positiv definite Operatoren	701
12.6.3.2	Projektoren im Hilbert-Raum	701
12.7	Kompakte Mengen und kompakte Operatoren	701
12.7.1	Kompakte Teilmengen in normierten Räumen	701
12.7.2	Kompakte Operatoren	701
12.7.2.1	Begriff des kompakten Operators	701
12.7.2.2	Eigenschaften linearer kompakter Operatoren	702
12.7.2.3	Schwache Konvergenz von Elementen	702
12.7.3	Fredholmsche Alternative	702
12.7.4	Kompakte Operatoren im Hilbert-Raum	703
12.7.5	Kompakte selbstadjungierte Operatoren	703
12.8	Nichtlineare Operatoren	703
12.8.1	Beispiele nichtlinearer Operatoren	704
12.8.2	Differenzierbarkeit nichtlinearer Operatoren	704
12.8.3	Newton-Verfahren	705
12.8.4	Schaudersches Fixpunktprinzip	706
12.8.5	Leray-Schauder-Theorie	706
12.8.6	Positive nichtlineare Operatoren	707
12.8.7	Monotone Operatoren in Banach-Räumen	708
12.9	Maß und Lebesgue-Integral	708
12.9.1	Sigma-Algebren und Maße	708
12.9.2	Messbare Funktionen	710
12.9.2.1	Messbare Funktion	710
12.9.2.2	Eigenschaften der Klasse der messbaren Funktionen	710

12.9.3	Integration	710
12.9.3.1	Definition des Integrals	710
12.9.3.2	Einige Eigenschaften des Integrals	711
12.9.3.3	Konvergenzsätze	711
12.9.4	L^p -Räume	712
12.9.5	Distributionen	713
12.9.5.1	Formel der partiellen Integration	713
12.9.5.2	Verallgemeinerte Ableitung	713
12.9.5.3	Distribution	714
12.9.5.4	Ableitung einer Distribution	714

13 Vektoranalysis und Feldtheorie 716

13.1	Grundbegriffe der Feldtheorie	716
13.1.1	Vektorfunktion einer skalaren Variablen	716
13.1.1.1	Definitionen	716
13.1.1.2	Ableitung einer Vektorfunktion	716
13.1.1.3	Differenziationsregeln für Vektoren	716
13.1.1.4	Taylor-Entwicklung für Vektorfunktionen	717
13.1.2	Skalarfelder	717
13.1.2.1	Skalares Feld oder skalare Punktfunktion	717
13.1.2.2	Wichtige Fälle skalarer Felder	717
13.1.2.3	Koordinatendarstellung von Skalarfeldern	718
13.1.2.4	Niveaulächen und Niveaulinien	718
13.1.3	Vektorfelder	719
13.1.3.1	Vektoriellcs Feld oder vektorielle Punktfunktion	719
13.1.3.2	Wichtige Fälle vektorieller Felder	719
13.1.3.3	Koordinatendarstellung von Vektorfeldern	720
13.1.3.4	Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen	721
13.1.3.5	Feldlinien	722
13.2	Räumliche Differenzialoperationen	723
13.2.1	Richtungs- und Volumenableitung	723
13.2.1.1	Richtungsableitung eines skalaren Feldes	723
13.2.1.2	Richtungsableitung eines vektoriellen Feldes	723
13.2.1.3	Volumenableitung oder räumliche Ableitung	724
13.2.2	Gradient eines Skalarfeldes	724
13.2.2.1	Definition des Gradienten	724
13.2.2.2	Gradient und Richtungsableitung	725
13.2.2.3	Gradient und Volumenableitung	725
13.2.2.4	Weitere Eigenschaften des Gradienten	725
13.2.2.5	Gradient des Skalarfeldes in verschiedenen Koordinaten	725
13.2.2.6	Rechenregeln	725
13.2.3	Vektorgradient	726
13.2.4	Divergenz des Vektorfeldes	726
13.2.4.1	Definition der Divergenz	726
13.2.4.2	Divergenz in verschiedenen Koordinaten	727
13.2.4.3	Regeln zur Berechnung der Divergenz	727
13.2.4.4	Divergenz eines Zentralfeldes	727
13.2.5	Rotation des Vektorfeldes	728
13.2.5.1	Definitionen der Rotation	728
13.2.5.2	Rotation in verschiedenen Koordinaten	728
13.2.5.3	Regeln zur Berechnung der Rotation	729
13.2.5.4	Rotation des Potenzialfeldes	729

13.2.6	Nablaoperator, Laplace-Operator	730
13.2.6.1	Nablaoperator	730
13.2.6.2	Rechenregeln für den Nablaoperator	730
13.2.6.3	Vektorgradient	731
13.2.6.4	Zweifache Anwendung des Nablaoperators	731
13.2.6.5	Laplace-Operator	731
13.2.7	Übersicht zu den räumlichen Differenzialoperationen	732
13.2.7.1	Prinzipielle Verknüpfungen und Ergebnisse für Differenzialoperatoren	732
13.2.7.2	Rechenregeln für Differenzialoperatoren	732
13.2.7.3	Vektoranalytische Ausdrücke in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten	733
13.3	Integration in Vektorfeldern	733
13.3.1	Kurvenintegral und Potenzial im Vektorfeld	733
13.3.1.1	Kurvenintegral im Vektorfeld	733
13.3.1.2	Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik	735
13.3.1.3	Eigenschaften des Kurvenintegrals	735
13.3.1.4	Kurvenintegral in kartesischen Koordinaten	735
13.3.1.5	Umlaufintegral in einem Vektorfeld	735
13.3.1.6	Konservatives oder Potenzialfeld	735
13.3.2	Oberflächenintegrale	737
13.3.2.1	Vektor eines ebenen Flächenstückes	737
13.3.2.2	Berechnung von Oberflächenintegralen	737
13.3.2.3	Oberflächenintegrale und Fluss von Feldern	737
13.3.2.4	Oberflächenintegrale in kartesischen Koordinaten als Oberflächenintegrale 2. Art	738
13.3.3	Integralsätze	739
13.3.3.1	Integralsatz und Integralformel von Gauß	739
13.3.3.2	Integralsatz von Stokes	740
13.3.3.3	Integralsätze von Green	740
13.4	Berechnung von Feldern	741
13.4.1	Reines Quellenfeld	741
13.4.2	Reines Wirbelfeld	742
13.4.3	Vektorfelder mit punktförmigen Quellen	742
13.4.3.1	Coulomb-Feld der Punktladung oder elektrostatisches Feld	742
13.4.3.2	Gravitationsfeld der Punktmasse	743
13.4.4	Superposition von Feldern	743
13.4.4.1	Diskrete Quellenverteilung	743
13.4.4.2	Kontinuierliche Quellenverteilung	743
13.4.4.3	Zusammenfassung	743
13.5	Differenzialgleichungen der Feldtheorie	744
13.5.1	Laplacesche Differenzialgleichung	744
13.5.2	Poissonsche Differenzialgleichung	744
14	Funktionentheorie	745
14.1	Funktionen einer komplexen Veränderlichen	745
14.1.1	Stetigkeit, Differenzierbarkeit	745
14.1.1.1	Definition der komplexen Funktion	745
14.1.1.2	Grenzwert der komplexen Funktion	745
14.1.1.3	Stetigkeit der komplexen Funktion	745
14.1.1.4	Differenzierbarkeit der komplexen Funktion	745
14.1.2	Analytische Funktionen	746
14.1.2.1	Definition der analytischen Funktion	746

14.1.2.2	Beispiele analytischer Funktionen	746
14.1.2.3	Eigenschaften analytischer Funktionen	746
14.1.2.4	Singuläre Punkte	747
14.1.3	Konforme Abbildung	748
14.1.3.1	Begriff und Eigenschaften der konformen Abbildung	748
14.1.3.2	Einfachste konforme Abbildungen	749
14.1.3.3	Schwarzsches Spiegelungsprinzip	755
14.1.3.4	Komplexe Potenziale	755
14.1.3.5	Superpositionsprinzip	757
14.1.3.6	Beliebige Abbildung der komplexen Zahlenebene	758
14.2	Integration im Komplexen	759
14.2.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral	759
14.2.1.1	Definition des Integrals im Komplexen	759
14.2.1.2	Eigenschaften und Berechnung komplexer Integrale	760
14.2.2	Integralsatz von Cauchy, Hauptsatz der Funktionentheorie	761
14.2.2.1	Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete	761
14.2.2.2	Integralsatz von Cauchy für mehrfach zusammenhängende Gebiete	762
14.2.3	Integralformeln von Cauchy	762
14.2.3.1	Analytische Funktion innerhalb eines Gebietes	762
14.2.3.2	Analytische Funktion außerhalb eines Gebietes	763
14.3	Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen	763
14.3.1	Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern	763
14.3.1.1	Konvergenz einer Zahlenfolge mit komplexen Gliedern	763
14.3.1.2	Konvergenz einer unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern	763
14.3.1.3	Potenzreihen im Komplexen	764
14.3.2	Taylor-Reihe	765
14.3.3	Prinzip der analytischen Fortsetzung	765
14.3.4	Laurent-Entwicklung	766
14.3.5	Isolierte singuläre Stellen und der Residuensatz	766
14.3.5.1	Isolierte singuläre Stellen	766
14.3.5.2	Meromorphe Funktionen	767
14.3.5.3	Elliptische Funktionen	767
14.3.5.4	Residuum	767
14.3.5.5	Residuensatz	768
14.4	Berechnung reeller Integrale durch Integration im Komplexen	768
14.4.1	Anwendung der Cauchyschen Integralformeln	768
14.4.2	Anwendung des Residuensatzes	769
14.4.3	Anwendungen des Lemmas von Jordan	769
14.4.3.1	Lemma von Jordan	769
14.4.3.2	Beispiele zum Lemma von Jordan	770
14.5	Algebraische und elementare transzendente Funktionen	772
14.5.1	Algebraische Funktionen	772
14.5.2	Elementare transzendente Funktionen	772
14.5.3	Beschreibung von Kurven in komplexer Form	774
14.6	Elliptische Funktionen	776
14.6.1	Zusammenhang mit elliptischen Integralen	776
14.6.2	Jacobische Funktionen	778
14.6.3	Thetafunktionen	779
14.6.4	Weierstrasssche Funktionen	780
15	Integraltransformationen	781
15.1	Begriff der Integraltransformation	781
15.1.1	Allgemeine Definition der Integraltransformationen	781

15.1.2	Spezielle Integraltransformationen	781
15.1.3	Umkehrtransformationen	781
15.1.4	Linearität der Integraltransformationen	783
15.1.5	Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen	783
15.1.6	Anwendungen der Integraltransformationen	783
15.2	Laplace-Transformation	784
15.2.1	Eigenschaften der Laplace-Transformation	784
15.2.1.1	Laplace-Transformierte, Original- und Bildbereich	784
15.2.1.2	Rechenregeln zur Laplace-Transformation	785
15.2.1.3	Bildfunktionen spezieller Funktionen	788
15.2.1.4	Diracsche Delta-Funktion und Distributionen	791
15.2.2	Rücktransformation in den Originalbereich	792
15.2.2.1	Rücktransformation mithilfe von Tabellen	792
15.2.2.2	Partialbruchzerlegung	792
15.2.2.3	Reihenentwicklungen	793
15.2.2.4	Umkehrintegral	794
15.2.3	Lösung von Differenzialgleichungen mithilfe der Laplace-Transformation	795
15.2.3.1	Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	795
15.2.3.2	Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten	796
15.2.3.3	Partielle Differenzialgleichungen	797
15.3	Fourier-Transformation	798
15.3.1	Eigenschaften der Fourier-Transformation	798
15.3.1.1	Fourier-Integral	798
15.3.1.2	Fourier-Transformation und Umkehrtransformation	799
15.3.1.3	Rechenregeln zur Fourier-Transformation	801
15.3.1.4	Bildfunktionen spezieller Funktionen	804
15.3.2	Lösung von Differenzialgleichungen mithilfe der Fourier-Transformation	805
15.3.2.1	Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen	805
15.3.2.2	Partielle Differenzialgleichungen	806
15.4	Z-Transformation	807
15.4.1	Eigenschaften der Z-Transformation	808
15.4.1.1	Diskrete Funktionen	808
15.4.1.2	Definition der Z-Transformation	808
15.4.1.3	Rechenregeln	809
15.4.1.4	Zusammenhang mit der Laplace-Transformation	810
15.4.1.5	Umkehrung der Z-Transformation	811
15.4.2	Anwendungen der Z-Transformation	812
15.4.2.1	Allgemeine Lösung linearer Differenzengleichungen	812
15.4.2.2	Differenzengleichung 2. Ordnung (Anfangswertaufgabe)	813
15.4.2.3	Differenzengleichung 2. Ordnung (Randwertaufgabe)	814
15.5	Wavelet-Transformation	814
15.5.1	Signale	814
15.5.2	Wavelets	815
15.5.3	Wavelet-Transformation	816
15.5.4	Diskrete Wavelet-Transformation	817
15.5.4.1	Schnelle Wavelet-Transformation	817
15.5.4.2	Diskrete Haar-Wavelet-Transformation	817
15.5.5	Gabor-Transformation	817
15.6	Walsh-Funktionen	818
15.6.1	Treppenfunktionen	818
15.6.2	Walsh-Systeme	818

16	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik	819
16.1	Kombinatorik	819
16.1.1	Permutationen	819
16.1.2	Kombinationen	819
16.1.3	Variationen	820
16.1.4	Zusammenstellung der Formeln der Kombinatorik	821
16.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	821
16.2.1	Ereignisse, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	821
16.2.1.1	Ereignisse	821
16.2.1.2	Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	822
16.2.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von Bayes	824
16.2.2	Zufallsgrößen, Verteilungsfunktion	825
16.2.2.1	Zufallsveränderliche	825
16.2.2.2	Verteilungsfunktion	825
16.2.2.3	Erwartungswert und Streuung, Tschebyscheffsche Ungleichung	827
16.2.2.4	Mehrdimensionale Zufallsveränderliche	828
16.2.3	Diskrete Verteilungen	828
16.2.3.1	Binomialverteilung	829
16.2.3.2	Hypergeometrische Verteilung	830
16.2.3.3	Poisson-Verteilung	831
16.2.4	Stetige Verteilungen	831
16.2.4.1	Normalverteilung	831
16.2.4.2	Normierte Normalverteilung, Gaußsches Fehlerintegral	833
16.2.4.3	Logarithmische Normalverteilung	833
16.2.4.4	Exponentialverteilung	834
16.2.4.5	Weibull-Verteilung	835
16.2.4.6	χ^2 -Verteilung	836
16.2.4.7	Fisher-Verteilung	836
16.2.4.8	Student-Verteilung	837
16.2.5	Gesetze der großen Zahlen, Grenzwertsätze	838
16.2.5.1	Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli	838
16.2.5.2	Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy	839
16.2.6	Stochastische Prozesse und stochastische Ketten	839
16.2.6.1	Grundbegriffe, Markoffsche Ketten	839
16.2.6.2	Poisson-Prozesse	842
16.3	Mathematische Statistik	844
16.3.1	Stichprobenfunktionen	844
16.3.1.1	Grundgesamtheit, Stichproben, Zufallsvektor	844
16.3.1.2	Stichprobenfunktionen	845
16.3.2	Beschreibende Statistik	846
16.3.2.1	Statistische Erfassung gegebener Messwerte	846
16.3.2.2	Statistische Parameter	847
16.3.3	Wichtige Prüfverfahren	848
16.3.3.1	Prüfen auf Normalverteilung	848
16.3.3.2	Verteilung der Stichprobenmittelwerte	850
16.3.3.3	Vertrauensgrenzen für den Mittelwert	851
16.3.3.4	Vertrauensgrenzen für die Streuung	852
16.3.3.5	Prinzip der Prüfverfahren	853
16.3.4	Korrelation und Regression	853
16.3.4.1	Lineare Korrelation bei zwei messbaren Merkmalen	853
16.3.4.2	Lineare Regression bei zwei messbaren Merkmalen	854
16.3.4.3	Mehrdimensionale Regression	855

16.3.5	Monte-Carlo-Methode	857
16.3.5.1	Simulation	857
16.3.5.2	Zufallszahlen	857
16.3.5.3	Beispiel für eine Monte-Carlo-Simulation	859
16.3.5.4	Anwendungen der Monte-Carlo-Methode in der numerischen Mathematik	859
16.3.5.5	Weitere Anwendungen der Monte-Carlo-Methode	861
16.4	Theorie der Messfehler	862
16.4.1	Messfehler und ihre Verteilung	862
16.4.1.1	Messfehlereinteilung nach qualitativen Merkmalen	862
16.4.1.2	Messfehlerverteilungsdichte	862
16.4.1.3	Messfehlereinteilung nach quantitativen Merkmalen	864
16.4.1.4	Angabe von Messergebnissen mit Fehlergrenzen	867
16.4.1.5	Fehlerrechnung für direkte Messungen gleicher Genauigkeit	867
16.4.1.6	Fehlerrechnung für direkte Messungen ungleicher Genauigkeit	868
16.4.2	Fehlerfortpflanzung und Fehleranalyse	869
16.4.2.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	869
16.4.2.2	Fehleranalyse	870
17	Dynamische Systeme und Chaos	871
17.1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen und Abbildungen	871
17.1.1	Dynamische Systeme	871
17.1.1.1	Grundbegriffe	871
17.1.1.2	Invariante Mengen	873
17.1.2	Qualitative Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen	874
17.1.2.1	Existenz des Flusses und Phasenraumstruktur	874
17.1.2.2	Lineare Differenzialgleichungen	875
17.1.2.3	Stabilitätstheorie	877
17.1.2.4	Invariante Mannigfaltigkeiten	880
17.1.2.5	Poincaré-Abbildung	884
17.1.2.6	Topologische Äquivalenz von Differenzialgleichungen	884
17.1.3	Zeitdiskrete dynamische Systeme	886
17.1.3.1	Ruhelagen, periodische Orbits und Grenzmengen	886
17.1.3.2	Invariante Mannigfaltigkeiten	886
17.1.3.3	Topologische Konjugiertheit von zeitdiskreten Systemen	887
17.1.4	Strukturelle Stabilität (Robustheit)	887
17.1.4.1	Strukturstabile Differenzialgleichungen	887
17.1.4.2	Strukturstabile zeitdiskrete Systeme	888
17.1.4.3	Generische Eigenschaften	889
17.2	Quantitative Beschreibung von Attraktoren	890
17.2.1	Wahrscheinlichkeitsmaße auf Attraktoren	890
17.2.1.1	Invariantes Maß	890
17.2.1.2	Elemente der Ergodentheorie	891
17.2.2	Entropien	893
17.2.2.1	Topologische Entropie	893
17.2.2.2	Metrische Entropie	893
17.2.3	Lyapunov-Exponenten	894
17.2.4	Dimensionen	895
17.2.4.1	Metrische Dimensionen	895
17.2.4.2	Auf invariante Maße zurückgehende Dimensionen	898
17.2.4.3	Lokale Hausdorff-Dimension nach Douady-Oesterlé	900
17.2.4.4	Beispiele von Attraktoren	900

17.2.5	Seltsame Attraktoren und Chaos	902
17.2.6	Chaos in eindimensionalen Abbildungen	903
17.2.7	Rekonstruktion der Dynamik aus Zeitreihen	903
17.2.7.1	Grundlagen, Rekonstruktionen mit generischen Eigenschaften . . .	903
17.2.7.2	Rekonstruktionen mit prävalenten Eigenschaften	904
17.3	Bifurkationstheorie und Wege zum Chaos	906
17.3.1	Bifurkationen in Morse–Smale–Systemen	906
17.3.1.1	Lokale Bifurkationen nahe Ruhelagen	906
17.3.1.2	Lokale Bifurkationen nahe einem periodischen Orbit	911
17.3.1.3	Globale Bifurkationen	914
17.3.2	Übergänge zum Chaos	915
17.3.2.1	Kaskade von Periodenverdopplungen	915
17.3.2.2	Intermittenz	915
17.3.2.3	Globale homokline Bifurkationen	916
17.3.2.4	Auflösung eines Torus	918
18	Optimierung	923
18.1	Lineare Optimierung	923
18.1.1	Problemstellung und geometrische Darstellung	923
18.1.1.1	Formen der linearen Optimierung	923
18.1.1.2	Beispiele und grafische Lösungen	924
18.1.2	Grundbegriffe der linearen Optimierung, Normalform	925
18.1.2.1	Ecke und Basis	925
18.1.2.2	Normalform der linearen Optimierungsaufgabe	927
18.1.3	Simplexverfahren	928
18.1.3.1	Simplextableau	928
18.1.3.2	Übergang zum neuen Simplextableau	928
18.1.3.3	Bestimmung eines ersten Simplextableaus	930
18.1.3.4	Revidiertes Simplexverfahren	931
18.1.3.5	Dualität in der linearen Optimierung	932
18.1.4	Spezielle lineare Optimierungsprobleme	934
18.1.4.1	Transportproblem	934
18.1.4.2	Zuordnungsproblem	936
18.1.4.3	Verteilungsproblem	937
18.1.4.4	Rundreiseproblem	937
18.1.4.5	Reihenfolgeproblem	937
18.2	Nichtlineare Optimierung	938
18.2.1	Problemstellung und theoretische Grundlagen	938
18.2.1.1	Problemstellung	938
18.2.1.2	Optimalitätsbedingungen	938
18.2.1.3	Dualität in der Optimierung	939
18.2.2	Spezielle nichtlineare Optimierungsaufgaben	940
18.2.2.1	Konvexe Optimierung	940
18.2.2.2	Quadratische Optimierung	940
18.2.3	Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsaufgaben	941
18.2.3.1	Verfahren von Wolfe	941
18.2.3.2	Verfahren von Hildreth–d’Esopo	943
18.2.4	Numerische Suchverfahren	943
18.2.4.1	Eindimensionale Suche	944
18.2.4.2	Minimumsuche im n–dimensionalen euklidischen Vektorraum . . .	944
18.2.5	Verfahren für unrestringierte Aufgaben	945
18.2.5.1	Verfahren des steilsten Abstieges (Gradientenverfahren)	945

18.2.5.2	Anwendung des Newton–Verfahrens	945
18.2.5.3	Verfahren der konjugierten Gradienten	946
18.2.5.4	Verfahren von Davidon, Fletcher und Powell (DFP)	946
18.2.6	Evolutionsstrategien	947
18.2.6.1	Evolutionsprinzipien	947
18.2.6.2	Evolutionalgorithmus	948
18.2.6.3	Klassifizierung	948
18.2.6.4	Erzeugung von Zufallszahlen	948
18.2.6.5	Einsatzgebiete der Evolutionsstrategien	948
18.2.6.6	(1 + 1)–Mutations–Selektions–Strategie	949
18.2.6.7	Populationsstrategien	949
18.2.7	Gradientenverfahren für Probleme mit Ungleichungsrestriktionen	951
18.2.7.1	Aufgabenstellung und Voraussetzungen	951
18.2.7.2	Verfahren der zulässigen Richtungen	951
18.2.7.3	Verfahren der projizierten Gradienten	953
18.2.8	Straf– und Barriereverfahren	955
18.2.8.1	Strafverfahren	955
18.2.8.2	Barriereverfahren	956
18.2.9	Schnittebenenverfahren	957
18.3	Diskrete dynamische Optimierung	958
18.3.1	Diskrete dynamische Entscheidungsmodelle	958
18.3.1.1	n –stufige Entscheidungsprozesse	958
18.3.1.2	Dynamische Optimierungsprobleme	958
18.3.2	Beispiele diskreter Entscheidungsmodelle	959
18.3.2.1	Einkaufsproblem	959
18.3.2.2	Rucksackproblem	959
18.3.3	Bellmansche Funktionalgleichungen	959
18.3.3.1	Eigenschaften der Kostenfunktion	959
18.3.3.2	Formulierung der Funktionalgleichungen	960
18.3.4	Bellmansches Optimalitätsprinzip	961
18.3.5	Bellmansche Funktionalgleichungsmethode	961
18.3.5.1	Bestimmung der minimalen Kosten	961
18.3.5.2	Bestimmung der optimalen Politik	961
18.3.6	Beispiele zur Anwendung der Funktionalgleichungsmethode	962
18.3.6.1	Optimale Einkaufspolitik	962
18.3.6.2	Rucksackproblem	963
19	Numerische Mathematik	964
19.1	Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen mit einer Unbekannten	964
19.1.1	Iterationsverfahren	964
19.1.1.1	Gewöhnliches Iterationsverfahren	964
19.1.1.2	Newton–Verfahren	965
19.1.1.3	Regula falsi	966
19.1.2	Lösung von Polynomgleichungen	967
19.1.2.1	Horner–Schema	967
19.1.2.2	Lage der Nullstellen	968
19.1.2.3	Numerische Verfahren	969
19.2	Numerische Lösung von Gleichungssystemen	970
19.2.1	Lineare Gleichungssysteme	970
19.2.1.1	Dreieckszerlegung einer Matrix	971
19.2.1.2	Cholesky–Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix	973
19.2.1.3	Orthogonalisierungsverfahren	973
19.2.1.4	Iteration in Gesamt- und Einzelschritten	975

19.2.2	Nichtlineare Gleichungssysteme	976
19.2.2.1	Gewöhnliches Iterationsverfahren	976
19.2.2.2	Newton–Verfahren	977
19.2.2.3	Ableitungsfreies Gauß–Newton–Verfahren	977
19.3	Numerische Integration	978
19.3.1	Allgemeine Quadraturformel	978
19.3.2	Interpolationsquadraturen	979
19.3.2.1	Rechteckformel	979
19.3.2.2	Trapezformel	979
19.3.2.3	Hermiteische Trapezformel	980
19.3.2.4	Simpson–Formel	980
19.3.3	Quadraturformeln vom Gauß–Typ	980
19.3.3.1	Gaußsche Quadraturformeln	981
19.3.3.2	Lobattosche Quadraturformeln	981
19.3.4	Verfahren von Romberg	981
19.3.4.1	Algorithmus des Romberg–Verfahrens	982
19.3.4.2	Extrapolationsprinzip	982
19.4	Genäherte Integration von gewöhnlichen Differenzialgleichungen	984
19.4.1	Anfangswertaufgaben	984
19.4.1.1	Eulersches Polygonzugverfahren	984
19.4.1.2	Runge–Kutta–Verfahren	985
19.4.1.3	Mehrschrittverfahren	986
19.4.1.4	Prediktor–Korrektor–Verfahren	986
19.4.1.5	Konvergenz, Konsistenz, Stabilität	987
19.4.2	Randwertaufgaben	988
19.4.2.1	Differenzenverfahren	988
19.4.2.2	Ansatzverfahren	989
19.4.2.3	Schießverfahren	990
19.5	Genäherte Integration von partiellen Differenzialgleichungen	991
19.5.1	Differenzenverfahren	991
19.5.2	Ansatzverfahren	993
19.5.3	Methode der finiten Elemente (FEM)	994
19.6	Approximation, Ausgleichsrechnung, Harmonische Analyse	998
19.6.1	Polynominterpolation	998
19.6.1.1	Newtonsche Interpolationsformel	998
19.6.1.2	Interpolationsformel nach Lagrange	998
19.6.1.3	Interpolation nach Aitken–Neville	999
19.6.2	Approximation im Mittel	1000
19.6.2.1	Stetige Aufgabe, Normalgleichungen	1000
19.6.2.2	Diskrete Aufgabe, Normalgleichungen, Householder–Verfahren	1001
19.6.2.3	Mehrdimensionale Aufgaben	1002
19.6.2.4	Nichtlineare Quadratmittelaufgaben	1003
19.6.3	Tschebyscheff–Approximation	1004
19.6.3.1	Aufgabenstellung und Alternantensatz	1004
19.6.3.2	Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome	1004
19.6.3.3	Remes–Algorithmus	1006
19.6.3.4	Diskrete Tschebyscheff–Approximation und Optimierung	1006
19.6.4	Harmonische Analyse	1007
19.6.4.1	Formeln zur trigonometrischen Interpolation	1007
19.6.4.2	Schnelle Fourier–Transformation (FFT)	1008

19.7	Darstellung von Kurven und Flächen mithilfe von Splines	1012
19.7.1	Kubische Splines	1012
19.7.1.1	Interpolationssplines	1012
19.7.1.2	Ausgleichssplines	1013
19.7.2	Bikubische Splines	1014
19.7.2.1	Anwendung bikubischer Splines	1014
19.7.2.2	Bikubische Interpolationssplines	1014
19.7.2.3	Bikubische Ausgleichssplines	1015
19.7.3	Bernstein–Bézier–Darstellung von Kurven und Flächen	1015
19.7.3.1	Prinzip der B–B–Kurvendarstellung	1016
19.7.3.2	B–B–Flächendarstellung	1017
19.8	Nutzung von Computern	1018
19.8.1	Interne Zeichendarstellung	1018
19.8.1.1	Zahlensysteme	1018
19.8.1.2	Interne Zahlendarstellung	1019
19.8.2	Numerische Probleme beim Rechnen auf Computern	1020
19.8.2.1	Einführung, Fehlerarten	1020
19.8.2.2	Normalisierte Dezimalzahlen und Rundung	1021
19.8.2.3	Genauigkeitsfragen beim numerischen Rechnen	1022
19.8.3	Bibliotheken numerischer Verfahren	1026
19.8.3.1	NAG–Bibliothek	1026
19.8.3.2	IMSL–Bibliothek	1027
19.8.3.3	Aachener Bibliothek	1028
19.8.4	Anwendung von interaktiven Programmsystemen und Computeralgebrasystemen	1028
19.8.4.1	Matlab	1028
19.8.4.2	Mathematica	1033
19.8.4.3	Maple	1037
20	Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica	1040
20.1	Einführung	1040
20.1.1	Kurzcharakteristik von Computeralgebrasystemen	1040
20.1.1.1	Allgemeine Zielstellungen für Computeralgebrasysteme	1040
20.1.1.2	Beschränkung auf Mathematica	1040
20.1.1.3	Ein- und Ausgabe bei Mathematica	1040
20.1.2	Zwei einführende Beispiele für die Hauptanwendungsgebiete	1041
20.1.2.1	Formelmanipulation	1041
20.1.2.2	Numerische Berechnungen	1041
20.2	Wichtige Strukturelemente von Mathematica	1042
20.2.1	Hauptstrukturelemente	1042
20.2.2	Zahlenarten in Mathematica	1043
20.2.2.1	Grundtypen von Zahlen in Mathematica	1043
20.2.2.2	Spezielle Zahlen	1043
20.2.2.3	Darstellung und Konvertierung von Zahlen	1043
20.2.3	Wichtige Operatoren	1044
20.2.4	Listen	1045
20.2.4.1	Begriff und Bedeutung	1045
20.2.4.2	Verschachtelte Listen	1045
20.2.4.3	Operationen mit Listen	1046
20.2.4.4	Spezielle Listen	1046
20.2.5	Vektoren und Matrizen als Listen	1047
20.2.5.1	Aufstellung geeigneter Listen	1047
20.2.5.2	Operationen mit Matrizen und Vektoren	1047

20.2.6	Funktionen	1048
20.2.6.1	Standardfunktionen	1048
20.2.6.2	Spezielle Funktionen	1049
20.2.6.3	Reine Funktionen	1049
20.2.7	Muster	1049
20.2.8	Funktionaloperationen	1050
20.2.9	Programmierung	1051
20.2.10	Ergänzungen zur Syntax, Informationen, Meldungen	1052
20.2.10.1	Kontexte, Attribute	1052
20.2.10.2	Informationen	1053
20.2.10.3	Meldungen	1053
20.3	Wichtige Anwendungsgebiete von Mathematica	1053
20.3.1	Manipulation algebraischer Ausdrücke	1053
20.3.1.1	Multiplikation von Ausdrücken	1054
20.3.1.2	Faktorzerlegung von Polynomen	1054
20.3.1.3	Operationen auf Polynomen	1055
20.3.1.4	Partialbruchzerlegung	1055
20.3.1.5	Manipulation nichtpolynomialer Ausdrücke	1055
20.3.2	Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen	1056
20.3.2.1	Gleichungen als logische Ausdrücke	1056
20.3.2.2	Lösung von Gleichungen	1056
20.3.2.3	Lösung transzendenter Gleichungen	1057
20.3.2.4	Lösung von Gleichungssystemen	1057
20.3.3	Lineare Gleichungssysteme und Eigenwertaufgaben	1058
20.3.4	Differenzial- und Integralrechnung	1060
20.3.4.1	Berechnung von Differenzialquotienten	1060
20.3.4.2	Unbestimmte Integrale	1061
20.3.4.3	Bestimmte Integrale, Mehrfachintegrale	1062
20.3.4.4	Lösung von Differenzialgleichungen	1062
20.4	Grafik mit Mathematica	1063
20.4.1	Grundlagen des Grafikaufbaus	1063
20.4.2	Grafik-Primitive	1064
20.4.3	Grafikoptionen	1064
20.4.4	Syntax der Grafikdarstellung	1065
20.4.4.1	Aufbau von Grafikobjekten	1065
20.4.4.2	Grafische Darstellung von Funktionen	1066
20.4.5	Zweidimensionale Kurven	1067
20.4.5.1	Exponentialfunktionen	1067
20.4.5.2	Funktion $y = x + \operatorname{Arcoth} x$	1067
20.4.5.3	Bessel-Funktionen	1068
20.4.6	Parameterdarstellung von Kurven	1068
20.4.7	Darstellung von Flächen und Raumkurven	1069
20.4.7.1	Grafische Darstellung von Oberflächen	1069
20.4.7.2	Optionen für 3D-Grafik	1069
20.4.7.3	Dreidimensionale Objekte in Parameterdarstellung	1070
21	Tabellen	1071
21.1	Physikalische Einheiten im SI-System	1071
21.2	Dezimalvorsätze im SI-System	1074
21.3	Wichtige physikalische Konstanten	1074
21.4	Einige mathematische Konstanten und Zahlenwerte	1075
21.5	Wichtige Reihenentwicklungen	1076

21.6	Fourier–Entwicklungen	1081
21.7	Unbestimmte Integrale	1084
21.7.1	Integrale rationaler Funktionen	1084
21.7.1.1	Integrale mit $X = ax + b$	1084
21.7.1.2	Integrale mit $X = ax^2 + bx + c$	1086
21.7.1.3	Integrale mit $X = a^2 \pm x^2$	1087
21.7.1.4	Integrale mit $X = a^3 \pm x^3$	1089
21.7.1.5	Integrale mit $X = a^4 + x^4$	1090
21.7.1.6	Integrale mit $X = a^4 - x^4$	1090
21.7.1.7	Einige Fälle der Partialbruchzerlegung	1090
21.7.2	Integrale irrationaler Funktionen	1091
21.7.2.1	Integrale mit $\sqrt{x}$ und $a^2 \pm b^2x$	1091
21.7.2.2	Andere Integrale mit $\sqrt{x}$	1091
21.7.2.3	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$	1091
21.7.2.4	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{fx + g}$	1093
21.7.2.5	Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$	1094
21.7.2.6	Integrale mit $\sqrt{x^2 + a^2}$	1095
21.7.2.7	Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$	1097
21.7.2.8	Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	1099
21.7.2.9	Integrale mit anderen irrationalen Ausdrücken	1101
21.7.2.10	Rekursionsformeln für Integral mit binomischem Differenzial	1101
21.7.3	Integrale trigonometrischer Funktionen	1101
21.7.3.1	Integrale mit Sinusfunktion	1101
21.7.3.2	Integrale mit Kosinusfunktion	1104
21.7.3.3	Integrale mit Sinus- und Kosinusfunktion	1106
21.7.3.4	Integrale mit Tangensfunktion	1110
21.7.3.5	Integrale mit Kotangensfunktion	1110
21.7.4	Integrale anderer transzendenter Funktionen	1111
21.7.4.1	Integrale mit Hyperbelfunktionen	1111
21.7.4.2	Integrale mit Exponentialfunktionen	1112
21.7.4.3	Integrale mit logarithmischen Funktionen	1113
21.7.4.4	Integrale mit inversen trigonometrischen Funktionen	1115
21.7.4.5	Integrale mit inversen Hyperbelfunktion	1116
21.8	Bestimmte Integrale	1117
21.8.1	Bestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen	1117
21.8.2	Bestimmte Integrale von Exponentialfunktionen	1118
21.8.3	Bestimmte Integrale logarithmischer Funktionen	1119
21.8.4	Bestimmte Integrale algebraischer Funktionen	1120
21.9	Elliptische Integrale	1122
21.9.1	Elliptische Integrale 1. Gattung	1122
21.9.2	Elliptische Integrale 2. Gattung	1122
21.9.3	Vollständige elliptische Integrale K und E	1123
21.10	Gammafunktion	1124
21.11	Bessel–Funktionen (Zylinderfunktionen)	1125
21.12	Legendresche Polynome 1. Art (Kugelfunktionen)	1127
21.13	Laplace–Transformationen	1128
21.14	Fourier–Transformationen	1134
21.14.1	Fourier–Kosinus–Transformationen	1134
21.14.2	Fourier–Sinus–Transformationen	1140
21.14.3	Fourier–Transformationen	1145
21.14.4	Exponentielle Fourier–Transformationen	1147

21.15	Z -Transformationen	1148
21.16	Poisson-Verteilung	1151
21.17	Normierte Normalverteilung	1153
21.18	χ^2 -Verteilung	1155
21.19	Fishersche F -Verteilung	1156
21.20	Studentsche t -Verteilung	1158
21.21	Zufallszahlen	1159

22	Literatur	1160
-----------	------------------	-------------

	Stichwortverzeichnis	1177
--	-----------------------------	-------------

	Mathematische Zeichen	1230
--	------------------------------	-------------

Tabellenverzeichnis

1.1	Definition der Potenzen	8
1.2	Lösung kubischer Gleichungen mit Hilfsgrößen	43
2.1	Definitions- und Wertebereich der trigonometrischen Funktionen	79
2.2	Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen	80
2.3	Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen	80
2.4	Reduktionsformeln oder Quadrantenrelationen der trigonometrischen Funktionen	80
2.5	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen gleichen Arguments im Intervall $0 < \alpha < \pi/2$	82
2.6	Definitions- und Wertebereiche der zyklometrischen Funktionen	87
2.7	Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen gleichen Arguments für $x > 0$	92
2.8	Definitions- und Wertebereiche der Areafunktionen	94
3.1	Winkelbezeichnungen im Grad- und im Bogenmaß	133
3.2	Eigenschaften einiger regelmäßiger Vielecke	143
3.3	Bestimmungsgrößen ebener rechtwinkliger Dreiecke	146
3.4	Bestimmungsgrößen ebener schiefwinkliger Dreiecke, Grundaufgaben	148
3.5	Umrechnung zwischen Grad und Gon	150
3.6	Richtungswinkel bei vorzeichentreuer Streckeneingabe über $\arctan$	150
3.7	Elemente der regulären Polyeder mit der Kantenlänge a	160
3.8	Bestimmungsgrößen rechtwinklig sphärischer Dreiecke	175
3.9	Grundaufgaben 1 und 2 für schiefwinklig sphärische Dreiecke	176
3.10	Grundaufgabe 3 für schiefwinklig sphärische Dreiecke	177
3.11	Grundaufgabe 4 für schiefwinklig sphärische Dreiecke	178
3.12	Grundaufgaben 5 und 6 für schiefwinklig sphärische Dreiecke	179
3.13	Skalare Multiplikation von Grundvektoren	192
3.14	Vektorielle Multiplikation von Grundvektoren	192
3.15	Skalare Multiplikation von reziproken Grundvektoren	193
3.16	Vektorielle Multiplikation von reziproken Grundvektoren	193
3.17	Vektorielle Gleichungen	194
3.18	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra	195
3.19	Kurvengleichungen 2. Ordnung mit $\delta \neq 0$ (Mittelpunktskurven)	213
3.20	Kurvengleichungen 2. Ordnung mit $\delta = 0$ (Parabolische Kurven)	214
3.21	Koordinatenvorzeichen in den Oktanten	216
3.22	Zusammenhang zwischen kartesischen, Kreiszylinder- und Kugelkoordinaten	218
3.23	Bezeichnungen der Richtungskosinus bei Koordinatentransformation	220
3.24	Gestalt der Flächen 2. Ordnung mit $\delta \neq 0$ (Mittelpunktsflächen)	235
3.25	Gestalt der Flächen 2. Ordnung mit $\delta = 0$ (Paraboloide, Zylinder und Ebenenpaare)	235
3.26	Tangenten- und Normalengleichungen	252
3.27	Vektor- und Koordinatengleichungen von Raumkurvengrößen	266
3.28	Vektor- und Koordinatengleichungen von Raumkurvengrößen als Funktion der Bogenlänge	266
3.29	Gleichungen der Tangentialebene und der Flächennormalen	271
4.1	Starrkörperbewegungen mit Biquaternionen	314
5.1	Wahrheitstafeln der Aussagenlogik	330
5.2	NAND-Funktion	332
5.3	NOR-Funktion	332

5.4	Primitive BRAVAIS-Gitter	357
5.5	BRAVAIS-Gitter, Kristallsysteme und Kristallklassen	359
5.6	Einige BOOLEsche Funktionen mit zwei Variablen	407
5.7	Tabellarische Darstellung einer unscharfen Menge	424
5.8	t - und s -Normen, $p \in \mathbb{R}$	431
5.9	Gegenüberstellung von Operationen der BOOLEschen und der Fuzzy-Logik	433
6.1	Ableitungen elementarer Funktionen	446
6.2	Differenziationsregeln	450
6.3	Ableitungen höherer Ordnung einiger elementarer Funktionen	452
7.1	Erste Bernoullische Zahlen	478
7.2	Erste Eulersche Zahlen	479
7.3	Näherungsformeln für einige oft gebrauchte Funktionen	486
8.1	Grundintegrale (Integrale der elementaren Funktionen)	495
8.2	Wichtige Integrationsregeln für unbestimmte Integrale	496
8.3	Substitutionen zur Integration irrationaler Funktionen I	501
8.4	Substitutionen zur Integration irrationaler Funktionen II	502
8.5	Wichtige Eigenschaften bestimmter Integrale	508
8.6	Kurvenintegrale 1. Art	531
8.7	Kurvenelemente	531
8.8	Ebene Flächenelemente	540
8.9	Anwendungen von Doppelintegralen	543
8.10	Anwendungen von Dreifachintegralen	546
8.11	Volumenelemente	546
8.12	Flächenelemente gekrümmter Flächen	548
11.1	Nullstellen der LEGENDRESchen Polynome 1. Art	647
13.1	Zusammenhang zwischen den Komponenten eines Vektors in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten	722
13.2	Prinzipielle Verknüpfungen bei den Differenzialoperatoren	732
13.3	Vektoranalytische Ausdrücke in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten	733
13.4	Linien-, Flächen- und Volumenelemente in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten	734
14.1	Real- und Imaginärteile der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen	774
14.2	Absolutbeträge und Argumente der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen	775
14.3	Perioden, Nullstellen und Pole der JACOBischen Funktionen	779
15.1	Übersicht über Integraltransformationen von Funktionen einer Veränderlichen	782
15.2	Vergleich der Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation	804
16.1	Zusammenstellung der Formeln der Kombinatorik	821
16.2	Verknüpfungen zwischen Ereignissen	822
16.3	Häufigkeitstabelle	847
16.4	χ^2 -Anpassungstest	850
16.5	Statistische Sicherheit des Stichprobenmittelwertes	851
17.1	Ruhelagetypen im dreidimensionalen Phasenraum	883
19.1	Hilfstabelle zur FEM	997
19.2	Orthogonalpolynome	1001

19.3	Zahlensysteme	1018
19.4	Parameter für die Basisformate	1021
19.5	Mathematica, Operationen für numerische Berechnungen	1033
19.6	Mathematica, Anweisungen zur Interpolation	1035
19.7	Mathematica, Numerische Lösung von Differenzialgleichungen	1036
19.8	Maple, Optionen des Befehls fsolve	1038
20.1	Mathematica, Zahlenarten	1043
20.2	Mathematica, Wichtige Operatoren	1044
20.3	Mathematica, Befehle für die Auswahl von Listenelementen	1045
20.4	Mathematica, Operationen mit Listen	1046
20.5	Mathematica, Operation Table	1046
20.6	Mathematica, Operationen mit Matrizen	1047
20.7	Mathematica, Standardfunktionen	1048
20.8	Mathematica, spezielle Funktionen	1049
20.9	Mathematica, Anweisungen zur Manipulation algebraischer Ausdrücke	1054
20.10	Mathematica, Algebraische Polynomoperationen	1055
20.11	Mathematica, Operationen zur Lösung von Gleichungssystemen	1057
20.12	Mathematica, Operationen der Differenziation	1060
20.13	Mathematica, Anweisungen zur Lösung von Differenzialgleichungen	1062
20.14	Mathematica, Zweidimensionale Grafikobjekte	1064
20.15	Mathematica, Grafikanweisungen	1064
20.16	Mathematica, einige Grafikoptionen	1065
20.17	Mathematica, Optionen zur 3D–Grafik	1069
21.1	Physikalische Einheiten im SI–System	1071
21.2	Dezimalvorsätze im SI–System	1074
21.3	Wichtige physikalische Konstanten	1074
21.4	Einige mathematische Konstanten und Zahlenwerte	1075
21.5	Wichtige Reihenentwicklungen	1076
21.6	Fourier–Entwicklungen	1081
21.7	Unbestimmte Integrale	1084
21.8	Bestimmte Integrale	1117
21.9	Elliptische Integrale	1122
21.10	Gammafunktion	1124
21.11	Bessel–Funktionen (Zylinderfunktionen)	1125
21.12	Legendresche Polynome 1. Art (Kugelfunktionen)	1127
21.13	Laplace–Transformationen	1128
21.14	Fourier–Transformationen	1134
21.15	Z –Transformationen	1148
21.16	Poisson–Verteilung	1151
21.17	Normierte Normalverteilung	1153
21.18	χ^2 –Verteilung	1155
21.19	Fishersche F –Verteilung	1156
21.20	Studentsche t –Verteilung	1158
21.21	Zufallszahlen	1159

1 Arithmetik

1.1 Elementare Rechenregeln

1.1.1 Zahlen

1.1.1.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

1. Definitionsbereiche und Bezeichnungen

Alle ganzen und gebrochenen Zahlen, die positiven und negativen sowie die Null, werden *rationale Zahlen* genannt. Man verwendet die folgenden Bezeichnungen (s. 5.2.1, 1., S. 335):

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$.

Die natürlichen Zahlen sind aus dem Bedürfnis des Abzählens bzw. des Ordnen entstanden. Die natürlichen Zahlen werden auch als *nichtnegative ganze Zahlen* bezeichnet.

2. Eigenschaften der Menge der rationalen Zahlen

- Die Menge der rationalen Zahlen ist unendlich.
- Die Menge ist *geordnet*, d. h., für je zwei verschiedene rationale Zahlen a und b kann man angeben, welche von beiden kleiner als die andere ist.
- Die Menge ist *überall dicht*, d. h., zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen a und b ($a < b$) existiert wenigstens eine rationale Zahl c ($a < c < b$). Daraus folgt, dass zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen unendlich viele weitere rationale Zahlen liegen.

3. Arithmetische Operationen

Die arithmetischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) mit zwei beliebigen rationalen Zahlen sind stets möglich und liefern im Ergebnis wieder eine rationale Zahl. Eine Ausnahme davon ist die *Division durch Null*, die *unmöglich* ist: Die Schreibweise $a : 0$ hat keinen bestimmten Sinn, da es keine bestimmte rationale Zahl b gibt, die der Gleichung $b \cdot 0 = a$ mit $a \neq 0$ genügt. Für $a = 0$ kann b eine beliebige rationale Zahl sein. Die oft verwendete Schreibweise $a : 0 = \infty$ (unendlich) bedeutet nicht, dass diese Division möglich ist; es ist lediglich eine Abkürzung für die Aussage: Wenn sich der Nenner Null nähert, wächst der Quotient absolut genommen über alle Grenzen.

4. Dezimalbruch und Kettenbruch

Jede rationale Zahl a kann in der Form eines endlichen oder unendlichen periodischen Dezimalbruches oder auch in der Form eines Kettenbruches dargestellt werden (s. 1.1.1.4, S. 3).

5. Geometrische Darstellung

Wenn auf einer Geraden ein Anfangspunkt 0 (*Nullpunkt*), eine positive Richtung (*Orientierung*) und eine Längeneinheit l (*Maßstab*, s. auch 2.17.1, S. 117) festgelegt worden sind (**Abb. 1.1**), dann entspricht jeder rationalen Zahl a ein bestimmter Punkt dieser Geraden. Er hat die Koordinate a und ist ein so genannter *rationaler Punkt*. Die Gerade wird *Zahlengerade* genannt. Da die Menge der rationalen Zahlen überall dicht ist, gibt es zwischen je zwei beliebigen rationalen Punkten unendlich viele weitere rationale Punkte.

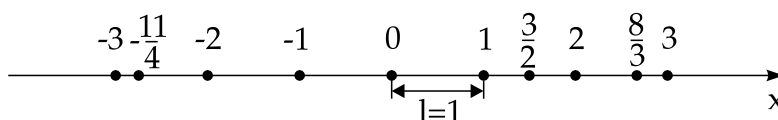


Abbildung 1.1

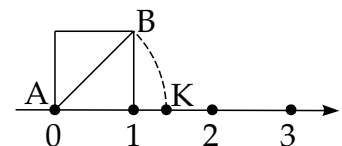


Abbildung 1.2

1.1.1.2 Irrationale und transzendente Zahlen

Für die Analysis reicht die Menge der rationalen Zahlen nicht aus. Obgleich sie überall dicht ist, füllt sie nicht die gesamte Zahlengerade aus. Wenn man z. B. die Diagonale AB des Einheitsquadrats um A

dreht, sodass B in den Punkt K der Zahlengeraden übergeht (**Abb.1.2**), dann hat K keine rationale Koordinate. Erst die Einführung der *irrationalen Zahlen* ermöglicht es, jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl zuzuordnen. Eine exakte Definition der irrationalen Zahlen kann z. B. durch Intervallschachtelung (s. [22.18], Bd. 1) erfolgen oder mithilfe des DEDEKINDSchen Schnittes (s. Hinweis in 5.2.4, **3.**, S. 342). Für die Anschauung genügt die Feststellung, dass die irrationalen Zahlen auf der Zahlengeraden die Punkte einnehmen, die als Lücken zwischen den rationalen Zahlen vorhanden sind, und dass jede irrationale Zahl durch einen nichtperiodischen unendlichen Dezimalbruch oder einen nichtperiodischen unendlichen Kettenbruch dargestellt werden kann.

Zu den irrationalen Zahlen gehören insbesondere die nicht ganzzahligen reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (n > 1, \text{ ganzzahlig; ganzzahlige Koeffizienten}). \quad (1.1a)$$

Man nennt solche Wurzeln *algebraische Irrationalitäten*.

■ **A:** Einfachste Beispiele für algebraische Irrationalitäten sind die reellen Wurzeln der Gleichungen $x^n - a = 0$ ($a > 0$), also Zahlen der Form $\sqrt[n]{a}$, wenn sie nicht rational sind.

■ **B:** $\sqrt[2]{2} = 1,414\dots$, $\sqrt[3]{10} = 2,154\dots$ sind algebraische Irrationalitäten.

Irrationale Zahlen, die keine algebraischen Irrationalitäten sind, nennt man *transzendente Zahlen*.

■ **A:** $\pi = 3,141592\dots$, $e = 2,718281\dots$ sind transzendente Zahlen.

■ **B:** Die dekadischen Logarithmen der ganzen positiven Zahlen mit Ausnahme von Zahlen der Form 10^n sind transzendente Zahlen.

Die nichtganzzahligen Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_1, a_0 \text{ ganzzahlig}) \quad (1.1b)$$

werden *quadratische Irrationalitäten* genannt. Sie haben die Form $(a + b\sqrt{D})/c$ (a, b, c ganzrational, $c \neq 0$; $D > 0$, quadratfrei).

■ Die Teilung einer Strecke a im Verhältnis des Goldenen Schnittes $x/a = (a - x)/x$ (s. 3.5.2.3, **3.**, S. 199) führt im Falle $a = 1$ auf die quadratische Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$. Die Lösung $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ ist eine quadratische Irrationalität. Sie enthält die irrationale Zahl $\sqrt{5}$.

1.1.1.3 Reelle Zahlen

Alle rationalen und irrationalen Zahlen werden zu den reellen Zahlen zusammengefasst. Sie bilden die *Menge der reellen Zahlen*, die mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird.

1. Haupteigenschaften

Die reellen Zahlen besitzen die folgenden Haupteigenschaften:

- Die Menge der reellen Zahlen ist unendlich.
- Die Menge der reellen Zahlen ist *geordnet* (s. 1.1.1.1, **2.**, S. 1).
- Die Menge der reellen Zahlen ist *überall dicht* (s. 1.1.1.1, **2.**, S. 1).
- Die Menge der reellen Zahlen ist *stetig*, d. h., jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine reelle Zahl. Das gilt für die Menge der rationalen Zahlen nicht.

2. Arithmetische Operationen

Die arithmetischen Operationen sind mit reellen Zahlen stets durchführbar und ergeben stets wieder eine reelle Zahl. Eine Ausnahme ist die Division durch Null (s. 1.1.1.1, **2.**, S. 1). Das Potenzieren und seine Umkehrung sind ebenfalls im System der reellen Zahlen möglich; aus jeder positiven reellen Zahl lassen sich beliebige Wurzeln ziehen; zu jeder positiven reellen Zahl gibt es einen Logarithmus mit beliebiger positiver Basis, ausgenommen die Eins als Basis.

Eine weitergehende Verallgemeinerung des Zahlbegriffs in der Analysis führt zu den *komplexen Zahlen* (s. 1.5, S. 35).

3. Zahlenintervall

Eine zusammenhängende Menge reeller Zahlen mit den Endpunkten a und b , wobei $a < b$ ist und auch a gleich $-\infty$ und b gleich $+\infty$ sein kann, wird *Zahlenintervall mit den Endpunkten a und b* genannt.

Wenn der Endpunkt nicht selbst zum Intervall gehört, spricht man vom *offenen Intervallende*, im entgegengesetzten Falle vom *abgeschlossenen Intervallende*.

Die Angabe eines Zahlenintervalls erfolgt durch seine Endpunkte a und b , indem diese in Klammern gesetzt werden. Eine eckige Klammer steht für ein geschlossenes Intervallende, eine runde für ein offenes. Es wird zwischen beiderseits *offenen Intervallen* (a, b) , *halboffenen Intervallen* $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ und *abgeschlossenen Intervallen* $[a, b]$ unterschieden. Für offene Intervalle findet man auch die Bezeichnung $]a, b[$ anstelle von (a, b) , analog $[a, b[$ anstelle von $[a, b)$. In der grafischen Darstellung wird ein offenes Ende durch eine Pfeilspitze, ein abgeschlossenes Intervallende durch einen Punkt gekennzeichnet.

1.1.1.4 Kettenbrüche

Kettenbrüche sind ineinandergeschachtelte Brüche, mit deren Hilfe reelle Zahlen, also rationale und irrationale Zahlen, dargestellt und besser approximiert werden können, als es die Dezimalzahldarstellung (s. 19.8.1.1, 1., S. 1018) erlaubt (s. ■ **A** und ■ **B** auf S. 4).

1. Rationale Zahlen

Kettenbrüche rationaler Zahlen sind endlich. Für positive rationale Zahlen $\frac{p}{q} > 1$ haben sie die nebenstehende Form.

Abkürzend schreibt man $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Die Zahlen a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) können mithilfe des *EUKLIDischen Algorithmus* wie folgt ermittelt werden:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} \quad (0 < \frac{r_1}{q} < 1), \quad (1.3a)$$

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} \quad (0 < \frac{r_2}{r_1} < 1), \quad (1.3b)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} \quad (0 < \frac{r_3}{r_2} < 1), \quad (1.3c)$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} & = a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} & (0 < \frac{r_n}{r_{n-1}} < 1), \end{array} \quad (1.3d)$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n \quad (r_{n+1} = 0). \quad (1.3e)$$

Die Zahlen p, q sowie r_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sind positive natürliche Zahlen.

$$\blacksquare \quad \frac{61}{27} = 2 + \frac{7}{27} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{7}{27}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{7}{27}}} = [2; 3, 1, 6].$$

2. Irrationale Zahlen

Kettenbrüche irrationaler Zahlen α brechen nicht ab. Sie heißen daher unendliche Kettenbrüche, und man schreibt $[a_0; a_1, a_1, \dots]$.

$$\blacksquare \quad \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{x_1} \quad \text{mit } x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{mit } x_2 = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{x_3} \quad \text{usw.}$$

Wie $x_2 = x_1$, so gilt auch $x_3 = x_2, x_4 = x_3, \dots$. Man erhält $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots$, d. h. für $\sqrt{2}$ gilt die Kettenbruchentwicklung $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

Wenn sich in einem unendlichen Kettenbruch einige der Zahlen a_k wiederholen, dann spricht man von

einem *periodischen Kettenbruch*. Es gilt: Jeder periodische Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalität (s. 1.1.1.2, S. 2) dar, und umgekehrt besitzt jede quadratische Irrationalität eine periodische Kettenbruchdarstellung.

■ Die Zahl $\sqrt{2}$ ist eine quadratische Irrationalität und hat die periodische Kettenbruchdarstellung $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

3. Approximation reeller Zahlen

Ist $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ eine beliebige reelle Zahl, dann stellt jeder endliche Kettenbruch

$$\alpha_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p}{q} \quad (1.4)$$

eine Approximation von α dar. Der Kettenbruch α_k wird auch als k -ter Näherungsbruch von α bezeichnet. Er lässt sich rekursiv wie folgt berechnen:

$$\alpha_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \quad (k \geq 1; \quad p_{-1} = 1, p_0 = a_0; q_{-1} = 0, q_0 = 1). \quad (1.5)$$

Nach dem *Approximationssatz von LIOUVILLE* gilt folgende Fehlerabschätzung:

$$|\alpha - \alpha_k| = \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}. \quad (1.6)$$

Darüber hinaus kann man zeigen, dass die Näherungsbrüche α_k die reelle Zahl α mit wachsender Genauigkeit von unten und von oben abwechselnd approximieren. Die Näherungsbrüche konvergieren besonders schnell gegen α , wenn die Zahlen a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) in (1.4) große Werte aufweisen. Demzufolge liegt die schlechteste Konvergenz bei Zahlen der Form $[1; 1, 1, \dots]$ vor.

■ **A:** Aus der Dezimalzahldarstellung von π erhält man gemäß (1.3a) die Kettenbruchdarstellung $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \dots]$. Die zugehörigen Näherungsbrüche (1.5) mit den Abschätzungen gemäß (1.6)

lauten: $\alpha_1 = \frac{22}{7}$ mit $|\pi - \alpha_1| < \frac{1}{7^2} \approx 2 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_2 = \frac{333}{106}$ mit $|\pi - \alpha_2| < \frac{1}{106^2} \approx 9 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_3 = \frac{355}{113}$

mit $|\pi - \alpha_3| < \frac{1}{113^2} \approx 8 \cdot 10^{-5}$. Die tatsächlichen Fehler sind wesentlich kleiner. Sie liegen bei α_1 unter $1,3 \cdot 10^{-3}$, bei α_2 unter $8,4 \cdot 10^{-5}$ und bei α_3 unter $2,7 \cdot 10^{-7}$. Die Näherungsbrüche α_1, α_2 und α_3 stellen eine wesentlich bessere Näherung für π dar als π in Dezimalzahldarstellung mit entsprechender Stellenzahl.

■ **B:** Für die Formel des Goldenen Schnittes $x/a = (a - x)/x$ (s. 3.5.2.3, **3.**, S. 199) kann man die folgenden beiden Kettenbruchdarstellungen angeben: $x = a[1; 1, 1, \dots]$ und $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{a}{2}(1 + [2; 4, 4, 4, \dots])$. Der Näherungsbruch α_4 bringt im ersten Fall eine Genauigkeit von $0,018a$, im zweiten Fall $0,000001a$.

1.1.1.5 Kommensurabilität

Zwei Zahlen a und b heißen *kommensurabel*, d. h. mit gleichem Maß messbar, wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten Zahl c sind. Aus $a = mc$, $b = nc$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) folgt dann

$$\frac{a}{b} = x \quad (x \text{ rational}). \quad (1.7)$$

Im entgegengesetzten Falle sind a und b *inkommensurabel*.

■ **A:** Die Länge einer Diagonale und die Seitenlänge eines Quadrates sind inkommensurabel, weil sie die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ zum Quotienten haben.

■ **B:** Strecken, die gemäß dem Goldenen Schnitt (s. 3.5.2.3, **3.**, S. 199) bemessen werden, sind inkommensurabel, weil dieser die irrationale Zahl $\sqrt{5}$ enthält. Somit sind auch Diagonale und Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks (s. 3.1.5.3, S. 142) inkommensurabel. Man geht heute davon aus, dass HIPPOSOS

von Metapontum (450 v. u. Z.) am Pentagramm, das aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks (s. 3.1.5.3, S. 142) gebildet wird, die irrationalen Zahlen entdeckt hat.

1.1.2 Beweismethoden

Im wesentlichen unterscheidet man drei Beweismethoden:

- direkter Beweis,
- indirekter Beweis,
- vollständige Induktion.

Außerdem spricht man noch vom konstruktiven Beweis.

1.1.2.1 Direkter Beweis

Es wird von einem bereits als richtig bewiesenen Satz (Voraussetzung p) ausgegangen und daraus die Wahrheit des zu beweisenden Satzes (Behauptung q) abgeleitet. Bei der logischen Schlussfolgerung wird vorwiegend die Implikation oder die Äquivalenz verwendet.

1. Direkter Beweis mithilfe der Implikation

In der *Implikation* $p \Rightarrow q$ folgt aus der Wahrheit der Voraussetzung die Wahrheit der Behauptung (s. 4. Zeile der Wahrheitstafel für die „Implikation“ 5.1.1, 3., S. 330).

■ Die Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ für $a > 0$, $b > 0$ ist zu beweisen. Voraussetzung ist die als richtig erkannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Daraus folgt durch Subtraktion von $4ab$: $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$; und aus dieser Ungleichung erhält man unmittelbar die Behauptung, wenn man sich beim Radizieren wegen $a > 0$ und $b > 0$ auf das positive Vorzeichen beschränkt.

2. Direkter Beweis mithilfe der Äquivalenz

Der Beweis wird durch *Verifizieren*, d. h. durch den Nachweis der Wahrheit, geführt. Man geht dabei von der Wahrheit der Behauptung q aus und zeigt die Wahrheit der Behauptung p , was allerdings nur bei einer *Äquivalenz* $p \Leftrightarrow q$ möglich ist. Praktisch bedeutet dies, dass alle Operationen, die q in p überführen, umkehrbar eindeutig sein müssen.

■ Die Ungleichung $1 + a + a^2 + \cdots + a^n < \frac{1}{1-a}$ für $0 < a < 1$ ist zu beweisen.

Durch Multiplikation mit $1-a$ erhält man (wegen $1-a > 0$ bleibt das Ungleichheitszeichen bestehen, s. auch (1.102b)): $1-a+a-a^2+a^2-a^3 \pm \cdots + a^n - a^{n+1} = 1-a^{n+1} < 1$.

Wegen $0 < a^{n+1} < 1$ ist die entstandene Ungleichung richtig, und da die durchgeführten Rechenoperationen umkehrbar eindeutig sind, ist auch die Ausgangsungleichung richtig.

1.1.2.2 Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch

Um die Behauptung q zu beweisen, geht man von der *Negation* $\bar{q}$ aus und schließt von $\bar{q}$ auf eine falsche Aussage r , d. h. $\bar{q} \Rightarrow r$ (s. auch 5.1.1, 7., S. 332). Dann muss aber auch $\bar{q}$ falsch sein, da man bei der Implikation nur von einer falschen Voraussetzung zu einer falschen Behauptung kommt (s. 1. Zeile der Wahrheitstafel für die „Implikation“ 5.1.1, 3., S. 330). Wenn aber $\bar{q}$ falsch ist, muss q wahr sein.

■ Es ist zu beweisen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational. Also gilt $\sqrt{2} = a/b$ mit ganzen Zahlen a, b und $b \neq 0$, und man kann annehmen a, b sind *teilerfremd*, d. h., sie besitzen keinen gemeinsamen Teiler. Man erhält $(\sqrt{2})^2 = 2 = a^2/b^2$ oder $a^2 = 2b^2$, d. h., a^2 wäre eine gerade Zahl, was nur dann möglich ist, wenn $a = 2n$ eine gerade Zahl ist. Es müsste dann wegen $a^2 = 4n^2 = 2b^2$ auch b eine gerade Zahl sein. Das ist offensichtlich ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a und b teilerfremd sind.

1.1.2.3 Vollständige Induktion

Mit dieser Beweismethode werden Sätze oder Formeln bewiesen, die von natürlichen Zahlen n abhängen. Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet:

Ist eine Aussage für eine natürliche Zahl n_0 wahr, und folgt aus der Wahrheit der Aussage für eine