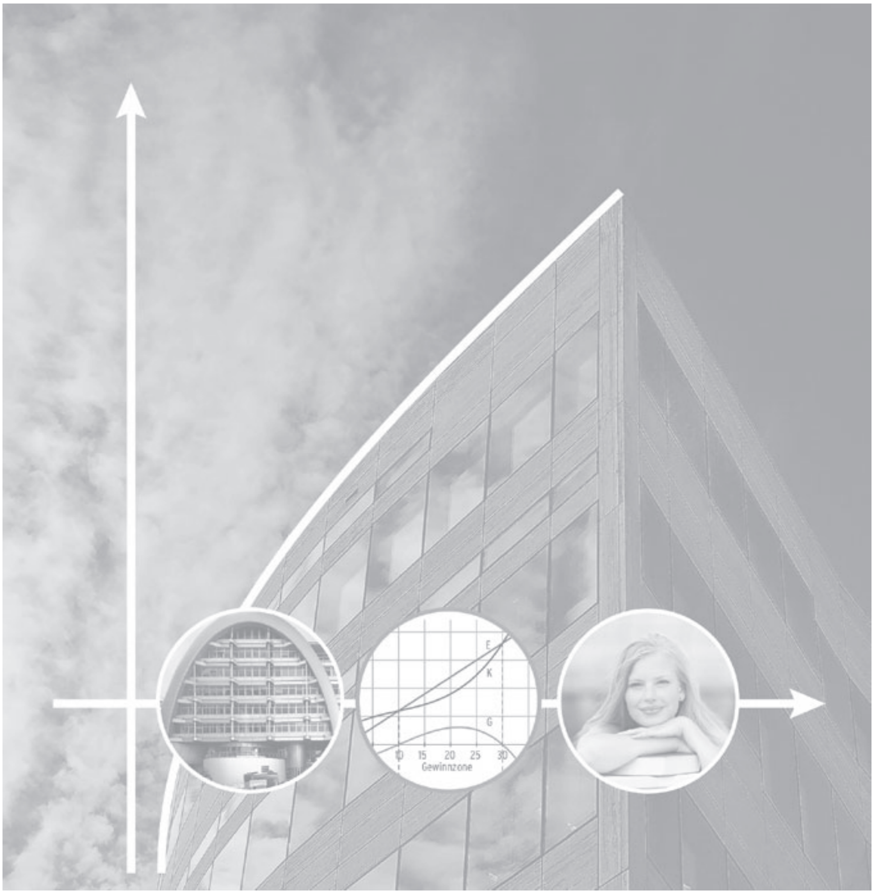
Ott

Abitur 2023 | *eA – GTR und CAS*

Nach den Vorgaben des Kerncurriculum 2018

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik an Beruflichen Gymnasien
– Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Maria Krogmann
Oberstudienrätin

Umschlag: Kreis rechts: www. adpic.de

* * * * *

Quellennachweis der Prüfungsaufgaben: Niedersächsisches Kultusministerium

17. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0223-17
ISBN 978-3-8120-1087-0

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für Fachgymnasien in Niedersachsen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2023 an Beruflichen Gymnasien der Richtung Wirtschaft sowie Gesundheit und Soziales. Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung 2023 ist das **Kerncurriculum** für das berufliche Gymnasium (KC, 2018).
Anpassungen inhaltsbezogener Kompetenzen für das Prüfungsjahr 2023 aufgrund der COVID-19-Pandemie sind berücksichtigt.
Aus diesem Grund werden u.a. die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen für die Abiturprüfung 2023 **nicht** erwartet: Uneigentliche Integrale und stochastische Unabhängigkeit.
Auf Aufgaben aus der analytischen Geometrie wird verzichtet.
Operatoren, die für das Fach Mathematik besondere Bedeutung haben, werden in der Tabelle Seite 122 erläutert. Diese Operatoren werden in schriftlichen Arbeiten verwendet.
Die Aufgaben mit erhöhtem Anforderungsniveau (eA) für CAS/GTR sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis, Stochastik, Analytische Geometrie/Lineare Algebra. Es gelten die Vorgaben des Kerncurriculums (KC 2018).
Alle Aufgaben sind für das erhöhte Anspruchsniveau GTR/CAS ausgelegt.
Die Aufgaben sind vollständig aus den Gebieten entnommen, die in den Vorgaben des Kernkurriculums (KC, 2018) für das erhöhte Anforderungsniveau im Fach Mathematik, Fachbereich Wirtschaft, Gesundheit und Soziales, aufgeführt sind.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Insgesamt sind die Aufgaben als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den Beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Zentralabitur

Berufliches Gymnasium Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Erhöhtes Anforderungsniveau

Rechnertyp: GTR bzw. CAS

Hinweise für den Prüfling für das Abitur 2023

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik besteht aus zwei Teilen: **1. Pflichtteil** **2. Wahlteil**

Für das erhöhte Anforderungsniveau (eA) beträgt die gesamte Prüfungszeit 330 Minuten. Zu Prüfungsbeginn stehen den Prüflingen sowohl die Aufgaben des Pflichtteils als auch die Aufgaben des Wahlteils zur Bearbeitung zur Verfügung. Die Prüflinge entscheiden selbst über den Zeitpunkt, zu dem sie die Bearbeitung des Pflichtteils abgeben und die Hilfsmittel erhalten. Dieser Zeitpunkt muss auf erhöhtem Anforderungsniveau innerhalb der ersten 100 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.

Pflichtteil:

- Bearbeitung ohne elektronische Hilfsmittel, ohne Formelsammlung. Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.
- Maximal 100 Minuten Bearbeitungszeit.
- Alle Aufgaben aus drei Sachgebieten sind zu bearbeiten.
- 25 % der erreichbaren Bewertungseinheiten (BE), 30 BE von insgesamt 120 BE.

Wahlteil:

Nach Abgabe der Unterlagen des Pflichtteils werden die Hilfsmittel ausgegeben.

- Verbleibende Zeit der gesamten Prüfungszeit von 330 Minuten
- Der Prüfling wählt aus jedem der 3 Blöcke jeweils eine von zwei Aufgaben aus.

Block 1 Analysis 40 BE	**Block 2** Stochastik 25 BE	**Block 3** Lineare Algebra/ Analytische Geometrie 25 BE
1A; 1B	2A; 2B	3A; 3B

- Die Gewichtung der drei Blöcke erfolgt etwa im Verhältnis 2 : 1 : 1
- 75 % der erreichbaren Bewertungseinheiten (BE), 90 BE von insgesamt 120 BE.
- Hilfsmittel: Zeichenmittel; eingeführter Taschenrechner (mit Handbuch): GTR oder CAS; von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung.

1 Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Aufgaben zum Pflichtteil (Pool 1 und Pool 2)

POOL 1 Analysis

Lösungen Seite 19/20

Aufgabe 1
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} + 2$; $x \neq 0$. Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1 \mid v)$ die Tangente t. Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = ax^4 - x^2$, $a > 0$.
a) Bestimmen Sie $\int_0^1 f_a(x)dx$.
b) Die Graphen von f_a schneiden die x-Achse an den Stellen $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$; $x_{2,3} = 0$; $x_4 = \sqrt{\frac{1}{a}}$.
Bestimmen Sie a so, dass x_1 und x_4 den Abstand 4 haben.

Aufgabe 3
Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 4
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 5
K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 6
Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$, hat die Nullstellen $-1{,}5$, 0 und 2.
Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mit Hilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 7
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 8
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 9 **Lösungen Seite 20/21**

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie eine möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 10

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 11

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch k(t) dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar 2020.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)dt$ bzw. $\frac{1}{90} \int_0^{90} k(t)dt$?

Aufgabe 12

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.
Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

POOL 1 Stochastik

Lösungen Seite 21

Aufgabe 1

Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.

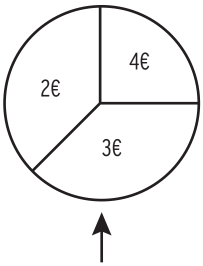
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen
- nur den letzten?
- mindestens einen?

b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an. Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 2

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Aufgabe 3

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 21**

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

POOL 1 Lineare Algebra **Lösungen Seite 22**

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Es gelte $\vec{v}_{i+1}^{\,T} = \vec{v}_i^{\,T} \cdot A$ mit $i \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\vec{v}_2$.

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ so, dass $\vec{w}^{\,T} \cdot A = \vec{w}^{\,T}$ gilt.

Aufgabe 2

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.

a) Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist.

b) Für die Matrix C gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Begründen Sie, dass gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$$

Ersetzen Sie die Zahl 1,5, sodass das geänderte LGS eindeutig lösbar ist mit $x_2 = 800$.

Aufgabe 4

Drei Betriebe B_1, B_2 und B_3 sind nach dem LEONTIEF-Modell miteinander verflochten. Die gegenseitige Belieferung und die Abgabe an den Markt betragen derzeit in ME:

	B_1	B_2	B_3	Konsum	Produktion
B_1	a	10	20	20	100
B_2	20	b	20	10	80
B_3	20	20	c	0	80

Bestimmen Sie die fehlenden Werte und berechnen Sie die Inputmatrix. In der nächsten Periode sollen folgende Mengen produziert werden: B_1 150 ME, B_2 100 ME und B_3 110 ME. Berechnen Sie den zugehörigen Konsumvektor.

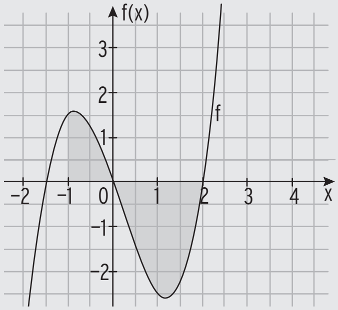
Lösungen POOL 1 Analysis

(Aufgaben Seite 6)

Aufgabe 6

$\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = -\frac{10}{3} + \frac{13}{12} = -\frac{9}{4}$

Das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse.



Aufgabe 7

Schnittstellen von f und g durch Gleichsetzen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

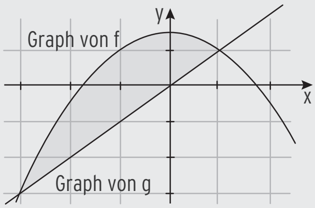
Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3; \quad x_2 = 1$

Integration von – 3 bis 1 über f(x) − g(x):

$\int_{-3}^{1}(f(x) - g(x))dx = \int_{-3}^{1}(-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{1}{3} + 3 - 1 - (-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2) = \frac{32}{3}$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$ FE.



Aufgabe 8

$f(x) = 4e^{2x} - 2$; Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x + c$; $c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: $F(0{,}5) = -1$: $F(0{,}5) = 2e^1 - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Aufgabe 9

(Aufgaben Seite 7)

Bedeutung der Bedingungen:

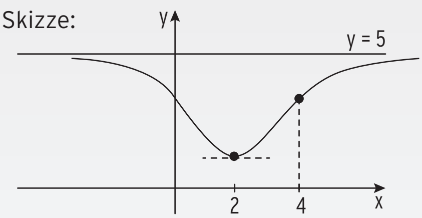
(1) $f(2) = 1$ Der Graph von f verläuft durch (2 | 1)

(2) $f'(2) = 0$ Der Graph von f hat in x = 2 eine waagrechte Tangente

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ Der Graph von f hat in x = 4 eine Wendestelle.

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt:
$f(x) \to 5$
Der Graph von f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 5.

Skizze:



Aufgabe 10

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel und der Kettenregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$ und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2e^{-2x}$

Lösungen POOL 1 Analysis

(Aufgaben Seite 7)

Aufgabe 10: Fortsetzung

folgt durch Einsetzen in $f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$: $f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + 4x\,e^{-2x}$

Zusammenfassen durch Ausklammern: $f'(x) = e^{-2x}\left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$

Erste Ableitung von f: $f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 + 4x - 10\right)$

Aufgabe 11

$\int_0^{90} k(t)dt$: gesamte Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar 2020.

$\frac{1}{90} \int_0^{90} k(t)dt$: durchschnittliche tägliche Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar 2020.

Aufgabe 12

variable Stückkosten $k_v(x) = 0{,}5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$; $k_v(8) = 13$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

Lösungen POOL 1 Stochastik

Aufgabe 1

a) ● P(nur den letzten) = $0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064$

● P(mindestens einen) = 1 – P(keinen) = $1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$ für $k = 2$; $a = 0{,}2$; $b = 8$

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 2

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	-1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn in €: $E(X) = -1 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}125$

Aufgabe 3

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

P(keine gelbe Kugel) = $0{,}8^3 = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

P(gleiche Farbe) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$

Aufgabe 4

(Aufgaben Seite 8)

a) A: Nils zieht genau 3 Gewinnlose.

b) B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) C: Nils gewinnt mindestens einmal. $P(C) = 1 - P(X = 0) = P(X \geq 1)$

d) Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

POOL 1 Lineare Algebra

(Aufgaben Seite 8)

Aufgabe 1

1 Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $\vec{v}_1^{\,T} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot A = (60 \quad 0,5 \quad 0,2)$; $\vec{v}_2^{\,T} = \vec{v}_1^{\,T} \cdot A = (4 \quad 30 \quad 0,05)$, also $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 30 \\ 0,05 \end{pmatrix}$

b) $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$ ergibt $20z = x \wedge 0,5x = y \wedge 0,1y = z$

LGS für x, y, z in Matrixform: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0,5 & -1 & 0 \\ 0 & 0,1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0,1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar; Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} 20r \\ 10r \\ r \end{pmatrix}$ und für r = 1: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

a) B ist die zu A inverse Matrix: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

b) Aus $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ folgt $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ Dann gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Hinweis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden E.

oder: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 1 & 1,5 & 1 & 4950 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 0 & 0 & 0 & 5600 \end{array}\right)$$

Das LGS enthält einen Widerspruch (3. Zeile); L = Ø

Das LGS ist unlösbar.

Ersetzt man 1,5 durch 5 so ergibt die Addition von Zeile 1 und Zeile 3: 0 7 0 | 5600

mit $x_2 = 800$. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich: $x_1 = 600$ und $x_3 = 350$

Aufgabe 4

Eigenverbrauchsmengen: a = 50 ; b = 30 ; c = 40; Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,125 & 0,25 \\ 0,2 & 0,375 & 0,25 \\ 0,2 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Konsumvektors: $\vec{y} = (E - A)\,\vec{x} = (E - A)\begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 Wahlteil der Abiturprüfung – Übungsaufgaben

2.1 Analysis

Mathematische Formeln, Berufliches Gymnasium

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$
	Betriebsoptimum (BO) - Tiefstelle von k(x)	x_{BO}
	langfristige Preisuntergrenze (LPU)	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (BM) - Tiefstelle von $k_v(x)$	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze (KPU)	$k_v(x_{BM})$
	Nachfragefunktion, Preis-Absatz-Funktion	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G: Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$y_G = p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Erlösfunktion	$E(x) = p(x) \cdot x$
	Grenzerlösfunktion	$E'(x)$
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle/Nutzenschwelle	x_S: 1. Nullstelle der Gewinnfunktion
	Gewinngrenze/Nutzengrenze	x_G: 2. Nullstelle der Gewinnfunktion
	Cournot'scher Punkt	$C(x_C \mid p_N(x_C))$
	Gewinnmaximale Ausbringungsmenge	x_C
	Produzentenrente	$P_R = \int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$ Differenz aus erzieltem und erwartetem Umsatz
	Konsumentenrente	$K_R = \int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$ Differenz aus den möglichen und den tatsächlichen Ausgaben
	Preiselastizität der Nachfrage	$e_{x;\,p} = \frac{\text{rel. Mengenänderung } \frac{\triangle x}{x}}{\text{rel. Preisänderung } \frac{\triangle p}{p}}$
	Elastizitätsfunktion	$e_{f(x);\,x} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$
	Elastizitätsfunktion der Nachfrage	$e_{x;\,p}(x) = \frac{p(x)}{p'(x) \cdot x}$ p(x) ist die Preis-Absatz-Funktion

Bezeichnungen: $\mathbb{N}_{>0} = \{1; 2; \dots\} = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$

$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$

Intervalle: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$

$]a; b[= (a; b) = \{x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$

Aufgaben eA - GTR/CAS - zur Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösungen Seite 48 - 50**

Ein Dorf in Südniedersachsen plant ein mehrtägiges Freiluftkonzert, bei dem täglich bis zu 8000 Besucher erwartet werden. Das Festival wird an einem Donnerstag für die Besucher geöffnet und schließt am darauf folgenden Sonntag.

Die zu erwartenden Besucherzahlen sollen durch eine Funktion f in Abhängigkeit von t angenähert werden. Bei dieser Funktion ist t die Zeit in Tagen und f (t) ist die Anzahl der Besucher in Mengeneinheiten (ME), die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt auf dem Festivalgelände befinden.

Die Veranstalter haben bei einigen ähnlichen Veranstaltungen die anwesenden Besucher in regelmäßigen Zeitabständen gezählt und sind zu folgendem Ergebnis gekommen:

Tag	Donnerstag		Freitag		Samstag		Sonntag	
Uhrzeit	0:00 t = 0	12:00	0:00 t = 1	12:00	0:00 t = 2	12:00	0:00 t = 3	12:00
Anzahl der Besucher auf dem Gelände in Mengeneinheiten (ME)	0	870	2037	3519	5243	6911	7746	5994

a) Ermitteln Sie mittels geeigneter Regression die Gleichung der am besten geeigneten ganzrationalen Funktion f durch die angegebenen Datenpunkte und dokumentieren Sie Ihre Lösungsschritte. Begründen Sie Ihre Entscheidung für die von Ihnen gewählte Regression.
Skizzieren Sie die Daten aus der Wertetabelle und den Funktionsgraphen der von Ihnen gefundenen Näherungsfunktion f mit seinen Nullstellen, Extrempunkten und Wendepunkten in ein geeignetes Koordinatensystem.
Beschreiben Sie den Kurvenverlauf mathematisch und bezogen auf die Besucherzahlen.

Im Folgenden gilt als Näherung für die Besucherzahlen die Funktion
$f_{neu}(t) = e^{0,99t}(2000 - 500t) - 2000$

b) Um die Organisation der Verpflegung angemessen zu planen, werden von dem Planungsteam unterschiedliche Untersuchungen angestellt. Bestimmen Sie für f_{neu} den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich. Geben Sie den Zeitpunkt t , an dem der letzte Besucher das Konzert verlassen hat, in Wochentag und Stunde an.

Der Mittelwert $\overline{f}$ der Funktionswerte einer Funktion im Intervall [a; b] wird berechnet mit $\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Ermitteln Sie den Mittelwert $\overline{f}$ der Funktion f_{neu}, der die durchschnittliche Anzahl der Besucher von Freitagmorgen 6:00 Uhr bis Sonntagmittag 12:00 Uhr angibt.

c) Damit die Einsatzplanung des Sicherheitspersonals an die Besucherzahlen angepasst werden kann, müssen so genannte Stoßzeiten ermittelt werden. Berechnen Sie den Zeitpunkt t, an dem der maximale Besucherstand erreicht wird. Geben Sie den Zeitpunkt t, an dem sich die Besucherzahl auf dem Gelände um 1000 reduziert, in Wochentag und Stunde an.

Aufgabe 1 **Seite 2/2**

c) Bestimmen Sie nur mithilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt t, an dem die Besucherzahlen am stärksten zunehmen. Berechnen Sie die Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt und interpretieren Sie das Ergebnis.

d) Auf dem Festivalgelände werden an einem Stand Erfrischungsgetränke des Unternehmens Baonide verkauft. Die Kostenfunktion lautet

$$K_a(x) = \frac{3}{550}x^3 + ax^2 + 50x + 1080, \text{ mit } a \in [-0{,}95; 0].$$

Der Parameter a stellt dabei die Produktion unterschiedlicher Geschmacksrichtungen dar. Geben Sie die Funktionsterme für die Funktionsscharen der Grenzkosten, der Stückkosten und der variablen Stückkosten an.
Interpretieren Sie die Lage der Betriebsminima in Abhängigkeit des Parameters a.

(Abitur Berufliches Gymnasium Niedersachsen 2012.)

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 50/51**

Erstmals gilt in Deutschland seit dem 01.01.2015 ein gesetzlicher, flächendeckender Mindestlohn von 8,50 € pro Stunde (€/h). Das Bundesministerium für Arbeit beauftragt ein Forschungsinstitut, um die Auswirkungen der Einführung des Mindestlohns auf den Arbeitsmarkt zu analysieren. Vor Einführung des Mindestlohns ließ sich der deutsche Arbeitsmarkt anhand der Funktionen p_A und p_N modellhaft beschreiben.
Dabei ist p_A mit $p_A(x) = -10{,}8\frac{x+8}{(x-3)(x+8)}$ der Lohn in €/h und x die angebotene Arbeitszeit der Arbeitnehmer in Milliarden Stunden (Mrd. h).
Die Funktion p_N mit $p_N(x) = \frac{10}{x+0{,}5} + \frac{1}{8}$ gibt den Lohn in €/h und x die nachgefragte Arbeitszeit der Arbeitgeber in Mrd. h an.

Bestimmen Sie den mathematischen und ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich für jede Funktion. Geben Sie den Definitionsbereich für den gesamten Arbeitsmarkt an.
Stellen Sie die Marktsituation in einem Koordinatensystem geeignet dar.
Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

Die Einführung des Mindestlohns unterlag dem wirtschaftspolitischen Ziel eine gerechtere Einkommensverteilung in Deutschland herzustellen. Durch den Mindestlohn sollte zudem das Gesamteinkommen in Deutschland gesteigert werden. Stellen Sie die Situation und den Mindestlohn in einem Koordinatensystem dar.

Der Bundesverband der Arbeitgeber behauptet, dass durch Einführung des Mindestlohns die Unternehmen 50% weniger Arbeitszeit als im Marktgleichgewicht nachfragen.

Untersuchen Sie diese Behauptung und bestimmen Sie das durch Einführung des Mindestlohns entstandene Marktungleichgewicht.

(Abitur Berufliches Gymnasium Niedersachsen 2016)

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösungen Seite 51 - 53**

Ein Hersteller von laktosefreien Produkten hat den Markt für Milch untersucht, weil er inZukunft eine laktosefreie Vollmilch auf den Markt bringen möchte.

Bei der Untersuchung wurde festgestellt, dass die Nachfragefunktion p_N durch eine ganzra-tionale Funktion 3. Grades angenähert werden kann. Bei einem Preis von 5,4 Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) wird 1 ME nachgefragt. Bei einem Preis von 3,4 GE/ME werden 2 ME nachgefragt. An dieser Stelle beträgt die momentane Änderungsrate −3,9. Der Höchstpreis liegt bei 6 GE/ME.

Die Angebotsfunktion wird durch die Funktionsschar $p_{A,c}$ mit $p_{A,c}(x) = \frac{-3}{x-2} + c$ beschrieben.

a) Um den Markt richtig einschätzen zu können, führt der Hersteller verschiedene Analysen durch. Bestimmen Sie dafür den Funktionsterm für die Nachfragefunktion p_N. Ermitteln Sie die Werte, die der Parameter c in der Angebotsfunktionsschar $p_{A,c}$ annehmen kann, damit der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse nicht im negativen Bereich liegt.

   Ermitteln Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich für die gesamte Marktsituation und begründen Sie die Grenzen des Definitionsbereichs. Erläutern Sie die daraus resultierende Auswirkung für den Hersteller.

   Bestimmen Sie die Wendestelle der Nachfragefunktion und interpretieren Sie die Stelle im ökonomischen Sinne.

   Weisen Sie nach, dass der Graph der Angebotsfunktion im ökonomischen Definitionsbereich linksgekrümmt ist.

   Erläutern Sie die Auswirkungen dieses Krümmungsverhaltens auf das Zusammenspiel von Preis und Angebotsmenge.

Der Hersteller der laktosefreien Milch wiederholt diese Marktuntersuchung kurze Zeit nach Einführung der laktosefreien Vollmilch und erhält folgende Situation:
$p_{A,neu}(x) = \frac{-3}{x-2} - 1{,}5$ und $p_{N,neu}(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}1x + 7$

b) Die grafische Analyse von Angebot und Nachfrage sowie die Untersuchung von Produzenten- und Konsumentenrenten sollen weitere Erkenntnisse für die zukünftige Preisgestaltung erbringen. Skizzieren Sie die Graphen der Angebots- und der Nachfragefunktion in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Konsumenten- und Produzentenrente. Ermitteln Sie das aktuelle Marktgleichgewicht. Der Hersteller behauptet, dass die Produzentenrente mindestens 40% des Umsatzes ausmacht. Untersuchen Sie, ob die Aussage richtig ist.

Aufgabe 3 **Seite 2/2**

c) Der Hersteller lässt Elastizitätsuntersuchungen im Bereich [0; 2) durchführen, um seine Preise besser festlegen zu können. Ermitteln Sie die Funktion für die Preiselastizität der Nachfrage unter Verwendung von $p_{N,neu}$.

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Nachfrage elastisch bzw. unelastisch reagiert, und beschreiben Sie das jeweilige Intervall aus ökonomischer Sicht.

Geben Sie die zugehörigen Preisintervalle der Anbieter an.

Der Hersteller möchte die Auswirkungen von Preisänderungen auf die Nachfrage analysieren. Berechnen Sie den Preis, bei dem sich bei einer Preissteigerung um 1% die Nachfragemenge um 0,5% verringert.

d) Ein Jahr nach Einführung der laktosefreien Vollmilch überlegt der Hersteller, diese nicht nur in Lebensmittelgeschäften anzubieten, sondern auch in Reformhäusern als Bio-Produkt zu höheren Preisen, um so einen Teil der zur Zeit vorhandenen Konsumentenrente abzuschöpfen. Der Gleichgewichtspreis vor Einführung des Bio-Produktes liegt bei der derzeitigen Marktsituation bei 5,35 GE/ME und die Gleichgewichtsmenge bei 1,5 ME.
Die Nachfragefunktion $p_{N,neu}$ mit
$p_{N,neu}(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}1x + 7$ gilt auf beiden Märkten.

Der Hersteller strebt an, dass die Konsumenten auf dem Bio-Markt nur 20% der bisherigen Konsumentenrente erreichen.
Ermitteln Sie die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis für den Bio-Markt, sodass die Vorstellungen des Herstellers realisiert werden können.
(Berufliches Gymnasium Niedersachsen 2012.)

Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Lösungen Seite 54 - 56**

Ein Landwirt baut verschiedene Obst- und Gemüsesorten an. Bei jeder Sorte hat er unterschiedliche Möglichkeiten, die Ernte sowohl mit Hilfe von Erntehelfern als auch mit Hilfe von Erntemaschinen einzufahren. Die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von Mengeneinheiten (ME) an Erntehelfern und ME an Erntemaschinen werden dabei durch die allgemeine Isoquantenfunktion I_P mit $I_P(x) = \frac{a}{x-b} + 7$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ beschrieben.

Dabei gibt x den Faktoreinsatz in ME Erntehelfer, y den Faktoreinsatz in ME Erntemaschinen und P den konstanten Ernteertrag in ME an.

a) Bei der Kartoffelernte erreicht der Landwirt einen Ertrag von 1500 ME. In den vergangenen Jahren hat er für diesen Ertrag die Kombination von 2 ME Erntehelfer und 20 ME Erntemaschinen gewählt. Ebenso erreichte er den gleichen Ertrag durch 3 ME Erntehelfer und 13,5 ME Erntemaschinen bzw. 14 ME Erntehelfer und 8 ME Erntemaschinen. Aufgrund von wirtschaftlichen Veränderungen muss der Landwirt künftig die Kombination von 11 ME Erntehelfer und 8,3 ME Erntemaschinen einsetzen.

Aufgabe 4 **Seite 2/2**

a) Weisen Sie mit Hilfe der Isoquantenfunktion I_{1500} nach, dass diese Kombinationsmöglichkeit ebenfalls zum Ernteertrag von 1500 ME Kartoffeln führt.
Untersuchen Sie, welche ME an Erntehelfern generell eingesetzt werden können, um den Ernteertrag von 1500 ME zu erzielen.
Bestimmen Sie, wie viele ME an Erntemaschinen der Landwirt für einen Ernteertrag von 1500 ME mindestens benötigt. (13 BE)

b) Ein Hotel bestellt 500 ME Spargel.Dieser Ernteertrag lässt sich durch die Isoquantenfunktion I_{500} mit $I_{500}(x) = \frac{3}{x-2} + 1$, mit $D_{ök}(I_{500}) = \mathbb{R}_{>2}$, beschreiben.
Die Kosten für die Erntehelfer betragen 120 Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) und für die Erntemaschinen 10 GE/ME.
Der Spargelbauer kalkuliert zunächst mit Kosten von 300 GE.
Entscheiden Sie mit Hilfe der Isokostenfunktion I_K, ob die Bestellung im Rahmen der kalkulierten Kosten angenommen werden kann.
Berechnen Sie, mit welchen Kosten der Landwirt minimal kalkulieren müsste, damit er diese Bestellung gerade noch realisieren könnte. (12 BE)

Der Landwirt verkauft auf dem Wochenmarkt Erdbeeren zu einem konstanten Preis p in GE/ME. Ein Konkurrent bietet Erdbeeren zu 13,50 GE/ME an. Für den Landwirt entstehen abhängig vom Standort q Gesamtkosten K_q mit $K_q(x) = x^3 - 5x^2 + 9qx + 2$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$, wobei x die Menge der Erdbeeren in ME ist. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 4 ME.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der kurzfristigen Preisuntergrenze, für welche Werte von q der Landwirt den Preis des Konkurrenten nicht überschreitet.
Entscheiden Sie anhand des Gewinns, welchen Standort er wählen sollte, wenn der Landwirt sich dem Preis des Konkurrenten anschließt und am Betriebsminimum verkauft. (15 BE)

d) Die Wochenmarktverwaltung weist dem Landwirt einen Standort zu, der dem Parameter q = 2 entspricht. Die Änderung der Gewinne entwickelt sich dabei entsprechend der Funktion G' mit $G'(x) = -3x^2 + 10x - 5{,}05$.
Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von G' in einem ökonomisch sinnvollen Bereich.
Nennen Sie vier wesentliche Merkmale des Graphen von G'.
Interpretieren Sie diese vier Merkmale hinsichtlich des Gewinnverlaufs.
Ermitteln Sie unter Berücksichtigung der Kostenfunktion K_2 und der Gewinnfunktion G den Preis, zu dem der Landwirt eine ME Erdbeeren angeboten hat.
Weiterhin behauptet der Sohn, dass sich mit dieser Gewinnentwicklung nie ein Gewinn von 1,2 GE erreichen lässt.
Beurteilen Sie diese Aussage. (20 BE)

(Berufliches Gymnasium Niedersachsen 2013)

Lösungen 2.1 Analysis

Lösung Analysis Aufgabe 1 Seite 1/3 (Aufgabe Seite 34/35)

a) **Regression**

Die Datenpunkte werden als Liste in den GTR/CAS eingegeben und verschiedene Regressionsfunktionen werden ausprobiert.

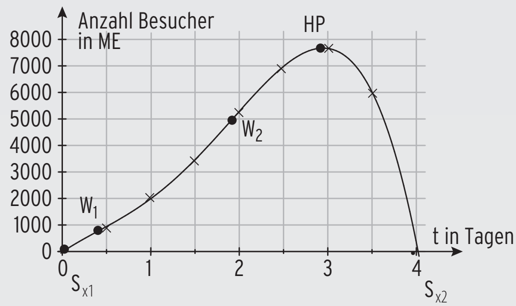
Die beste Näherung ergibt sich für eine Regression 4. Grades:

$f(t) = -273{,}27t^4 + 1272{,}26t^3 - 1262{,}59t^2 + 2276{,}70t - 22{,}61$

Denn bei quadratischer Regression gilt: $R^2 \approx 0{,}9246$.

Bei kubischer Regression gilt: $R^2 \approx 0{,}9904$.

Bei Regression 4. Grades gilt: $R^2 \approx 0{,}9996$.



Beschreibung des Kurvenverlaufs

Der Graph beginnt im Ursprung. Von Donnerstagnacht bis Donnerstag kurz vor Mittag nimmt die Besucherzahl auf dem Festivalgelände langsam (degressiv) zu. Hier liegt der erste Wendepunkt und die Zunahme ist am geringsten.

Von Donnerstagmittag bis Freitagabend nimmt die Besucherzahl dann stark (progressiv) zu. Hier liegt der zweite Wendepunkt und die Zunahme ist am stärksten.

Ab Freitagnacht bis Samstagnacht strömen die Besucher nicht mehr so stark auf das Festivalgelände. Die Anzahl der Gäste auf dem Festival steigt wieder degressiv.

Ungefähr Samstagnacht befinden sich die meisten Gäste auf dem Gelände. Hier liegt der Hochpunkt. In der folgenden Zeit bis Sonntagabend verlassen die Gäste in Scharen das Gelände (Kurve fällt progressiv), bis dann Sonntag um Mitternacht alle Gäste das Festivalgelände verlassen haben. Der Graph schneidet die Abszissenachse, es liegt eine Nullstelle von f vor.

b) $f_{neu}(t) = e^{0,99t}(2000 - 500t) - 2000$

$f_{neu}(t) = 0 \Rightarrow t_1 \approx 3{,}92 \vee t_2 = 0$ damit $D_{ök} = [0; 3{,}92]$

Zeitpunkt, an dem die letzten Besucher das Konzert verlassen

$3 \triangleq$ Sonntag, $0{,}92 \cdot 24 = 22{,}08$

Die letzten Besucher verlassen am Sonntagabend um ca. 22 Uhr das Konzert.

Durchschnittliche Zahl der Besucher

Freitagmorgen 6:00 Uhr: a = 1,25 Sonntagmittag 12:00 Uhr: b = 3,5

GTR : $\bar{f} = \frac{1}{3{,}5 - 1{,}25} \int_{1{,}25}^{3{,}5} f_{neu}(t)dt \approx \frac{1}{2{,}25} \cdot 13341{,}75 = 5929{,}67$

Von Freitagmorgen 6:00 Uhr bis Sonntagmittag 12:00 Uhr befinden sich durchschnittlich 5930 ME Besucher auf dem Gelände.

Lösung Analysis Aufgabe 1 **Seite 2/3**

c) **Maximaler Besucherstand**

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel (ist nicht verlangt):

$f'_{neu}(t) = 0{,}99e^{0{,}99t}\cdot(2000 - 500t) + e^{0{,}99t}\cdot(-500) = e^{0{,}99t}\cdot(1480 - 495t)$

$f''_{neu}(t) = 0{,}99e^{0{,}99t}\cdot(1480 - 495t) + e^{0{,}99t}(-495) = e^{0{,}99t}\cdot(970{,}2 - 490{,}05t)$

Bedingung: $f'_{neu}(t) = 0$ $t = \frac{1480}{495} = \frac{296}{99} \approx 2{,}99$ $(e^{0{,}99t} > 0)$ auch mit GTR/CAS

Mit $f''_{neu}(\frac{296}{99}) < 0$ erhält man: $t = \frac{296}{99}$ ist Maximalstelle

oder: $f'_{neu}(t)$ wechselt das Vorzeichen von + nach –

Der maximale Besucherstand wird bei $t \approx 2{,}99$ erreicht, also am Samstag kurz vor Mitternacht.

1000 Besucher verlassen das Gelände

Gesucht ist der Zeitpunkt mit der momentanen Änderungsrate 1000 ME/Tag.

$f'_{neu}(t) = -1000 \Rightarrow t \approx 3{,}09$ (Minuszahl (– 1000) wegen Abnahme)

Bei $t \approx 3{,}09$ sinkt die Besucherzahl um 1000 ME, das ist Sonntag früh, ungefähr um 2:10 Uhr.

Stärkste Besucherzunahme

Gesucht ist der Wendepunkt des Graphen von f_{neu}

$f''_{neu}(t) = 0 \Leftrightarrow 970{,}2 - 490{,}05\cdot t = 0 \Rightarrow t \approx 1{,}98$ $(e^{0{,}99t} > 0)$

$t \approx 1{,}98$ ist einfache Nullstelle von f''_{neu}, also Wendestelle von f_{neu}.

($f''_{neu}(t)$ wechselt das Vorzeichen in $t \approx 1{,}98$)

Die Besucherzahlen nehmen bei $t \approx 1{,}98$ am stärksten zu.

Änderungsrate: $f'_{neu}(1{,}98) \approx 3549{,}66$

Die Änderungsrate bei $t = 1{,}98$ beträgt 3549,66 ME/Tag.

Am Freitag kurz vor Mitternacht nimmt die Anzahl der Besucher auf dem Festivalgelände um etwa 3550 ME/Tag zu.

d) **Funktionsscharen für Grenzkosten, Stückkosten und variable Stückkosten**

Grenzkosten (Ableitung von K_a): $K'_a(x) = \frac{9}{550}x^2 + 2ax + 50;\ a \in [-0{,}95; 0]$.

Stückkosten: $k_a(x) = \frac{K_a(x)}{x} = \frac{3}{550}x^2 + ax + 50 + \frac{1080}{x}$

Variable Stückkosten: $k_{a,v}(x) = \frac{K_{a,v}(x)}{x} = \frac{3}{550}x^2 + ax + 50$

Betriebsminima: Bedingung: $K'_a(x) = k_{a,v}(x)$ oder Minimalstelle von $k_{a,v}$

$k'_{a,v}(x) = \frac{3}{275}x + a;\ k''_{a,v}(x) = \frac{3}{275} > 0$

$k'_{a,v}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{275a}{3}$ $x = -\frac{275a}{3}$ ist Minimalstelle (Betriebsminimum)

$k_{a,v}(-\frac{275a}{3}) = \frac{3}{550}\cdot(-\frac{275a}{3})^2 + a\cdot(-\frac{275a}{3}) + 50 = -\frac{275}{6}a^2 + 50$

(kurzfristige Preisuntergrenze)

Lösung Analysis Aufgabe 1 **Seite 3/3**

d) **Lage der Betriebsminima in Abhängigkeit des Parameters a** ($a \in [-0{,}95; 0]$)
Je mehr sich der Parameter a von links der Null nähert, desto höher und näher an der Ordinatenachse liegt das Betriebsminimum. D. h. die Ausbringungsmenge, bei der die variablen Stückkosten minimal sind, wird geringer, dabei steigen aber die minimalen variablen Stückkosten.
Hinweis: Für $a \to 0$: $x = -\frac{275a}{3} \to 0$; $-\frac{275}{6}a^2 + 50 \to 50$
Je mehr sich der Parameter a von rechts − 0,95 nähert, desto tiefer und weiter entfernt von der Ordinatenachse liegt das Betriebsminimum. D. h. die Ausbringungsmenge, bei der die variablen Stückkosten minimal sind, wird größer. Gleichzeitig sinken die minimalen variablen Stückkosten.
Hinweis: Für $a \to -0{,}95$: $x = -\frac{275a}{3} \to \approx 43{,}54$; $-\frac{275}{6}a^2 + 50 \to \approx 8{,}64$

Lösung Analysis Aufgabe 2 **Seite 1/2** (Aufgabe Seite 35)

Bestimmung der Definitionsbereiche:

Definitionsbereich p_A : $p_A(x) = -10{,}8\frac{x + 8}{(x-3)(x+8)}$

$D_{math}(p_A) = \mathbb{R}\setminus\{-8; 3\}$; $D_{ök}(p_A) = [0; 3) = \{0 \leq x < 3\}$

($D_{ök}$: Bereich mit $x \geq 0$ und $p_A(x) \geq 0$)

Definitionsbereich p_N: $p_N(x) = \frac{10}{x + 0{,}5} + \frac{1}{8}$

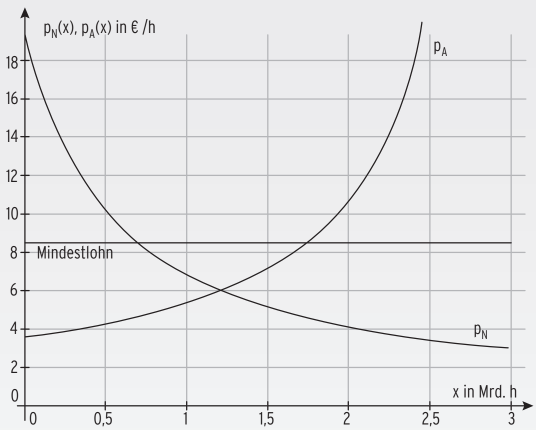
$D_{math}(p_N) = \mathbb{R}\setminus\{-0{,}5\}$; $D_{ök}(p_N) = [0; \infty) = \{0 \leq x < \infty\}$

Die Funktion besitzt keine Nullstelle im relevanten Bereich.

Definitionsbereich gesamte wirtschaftliche Situation:

$D_{ök} = [0; 3)$

Skizze mit Mindestlohn:



Bestimmung und Interpretation des Marktgleichgewichts:

Bedingung: $p_A(x) = p_N(x)$

GTR/CAS liefert das Marktgleichgewicht MGG($\approx 1{,}2 \mid \approx 6$)
Bei einem Lohn von ca. 6 €/h ist die nachgefragte Arbeitszeit und die angebotene Arbeitszeit mit ca. 1,2 Mrd. Stunden gleich. Der Arbeitsmarkt befindet sich im Gleichgewicht.

Lösung Analysis Aufgabe 2 Seite 2/2

Untersuchung der Behauptung $p_N(x) = 8{,}5$ für $x_N \approx 0{,}69$

Bei einem Mindestlohn von 8,50 €/h werden ca. 0,69 Mrd. Stunden nachgefragt und demnach beträgt die Abnahme der nachgefragten Arbeitszeit 42,5%.
Die Behauptung stimmt nicht.
(Abnahme von 1,2 auf 0,69 = 0,51; $\frac{0{,}51}{1{,}20} = 0{,}425 = 42{,}5\ \%$)

Bestimmung des Marktungleichgewichts $p_A(x) = 8{,}5$ für $x_A \approx 1{,}73$
$x_A - x_N = 1{,}73 - 0{,}69 = 1{,}04$

Bei einem Mindestlohn von 8,50 €/h, werden 1,73 Mrd. Stunden Arbeit angeboten und 0,69 Mrd. Stunden Arbeit nachgefragt. Der Angebotsüberschuss beträgt 1,04 Mrd. Stunden.

Lösung Analysis Aufgabe 3 Seite 1/3 (Aufgabe Seite 36/37)

a) **Bestimmung der Nachfragefunktion**

$p_N(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $p'_N(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen und LGS:

$$
\begin{aligned}
p_N(1) &= 5{,}4 &&\Rightarrow a + b + c + d = 5{,}4\\
p_N(2) &= 3{,}4 &&\Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 3{,}4\\
p'_N(2) &= -3{,}9 &&\Rightarrow 12a + 4b + c = -3{,}9\\
p_N(0) &= 6 &&\Rightarrow d = 6
\end{aligned}
$$

LGS lösen ergibt $a = -0{,}6$; $b = 1{,}1$; $c = -1{,}1$; $d = 6$
Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = -0{,}6x^3 + 1{,}1x^2 - 1{,}1x + 6$

Parameterwerte bestimmen

$p_{A,c}(x) = -\frac{3}{x-2} + c$; $p_{A,c}(0) = -\frac{3}{0-2} + c \geq 0 \Rightarrow c \geq -\frac{3}{2}$

Der Parameter c muss größer oder gleich – 1,5 sein, damit der Schnittpunkt mit der Ordinate im nichtnegativen Bereich liegt.

Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{linke Grenze: keine negativen ME möglich; } x \geq 0\\
\text{rechte Grenze: Sättigungsmenge: } p_N(x) = 0 \Rightarrow x \approx 2{,}60\\
\text{Hochpunkt der Angebotsfunktion: nicht vorhanden}
\end{array}
\right\} D_{ök} = [0; 2[
$$

Polstelle der Angebotsfunktion bei x = 2
Der Hersteller sollte weniger als 2 ME auf den Markt bringen.

Lösung Analysis Aufgabe 3 **Seite 2/3**

a) **Wendestelle der Nachfragefunktion**

$p'_N(x) = -1{,}8x^2 + 2{,}2x - 1{,}1$; $p''_N(x) = -3{,}6x + 2{,}2$; $p'''_N(x) = -3{,}6 \neq 0$

Bedingung für WP: $p''_N(x) = 0 \wedge p'''_N(x) \neq 0$

$p''_N(x) = 0 \Leftrightarrow -3{,}6x + 2{,}2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{18} \approx 0{,}61$ $x = \frac{11}{18}$ ist Wendestelle

Bei einer Nachfragemenge von ca. 0,61 ME ist der Preisrückgang am geringsten.

Linkskrümmung der Angebotsfunktion

$p_{A,c}(x) = -\frac{3}{x-2} + c$; $c > 0$ mit $D_{ök} = [0; 2[$; $p'_{A,c}(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$; $p''_{A,c}(x) = \frac{-6}{(x-2)^3}$

$p''_{A,c}(x) > 0$ weil $(x-2)^3 < 0$ für $x \in [0; 2[$

Eine **Linkskrümmung** liegt vor.

Eine Linkskrümmung bedeutet in diesem Fall einen progressiven Anstieg des Preises in Abhängigkeit von der Menge und damit einen degressiven Anstieg der Menge in Abhängigkeit des Preises. Z. B.: Je höher der Preis steigt, desto kleiner ist die Mengenerhöhung der Anbieter.

b) **Graphen** der Nachfrage- und der Angebotsfunktion

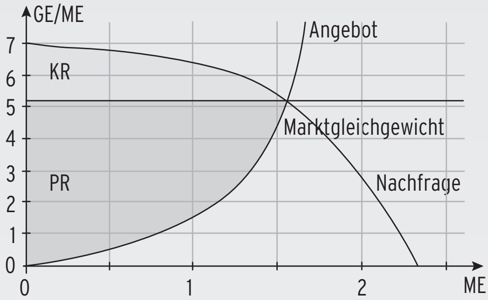
Aktuelles Marktgleichgewicht

$p_{A,neu}(x) = p_{N,neu}(x)$

$\Rightarrow x \approx 1{,}55 = x_G$

$p_{A,neu}(1{,}55) \approx 5{,}17 = p_G$

Die Gleichgewichtsmenge liegt bei 1,55 ME, der Gleichgewichtspreis bei 5,17GE/ME.



Produzentenrente

$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_{A,neu}(x)dx$

$= 1{,}55 \cdot 5{,}17 - \int_0^{1{,}55} \left(-\frac{3}{x-2} - 1{,}5\right)dx \approx 8{,}01 - 2{,}15 = 5{,}86$

Die Produzenten, die einen niedrigeren Preis für ihr Gut verlangt hätten, also ggf.auch der Hersteller, erzielen einen zusätzlichen Gewinn von 5,86 GE.

Anteil: $\frac{PR}{\text{tatsächlicher Umsatz}} = \frac{5{,}86}{8{,}01} \approx 0{,}7316$ $U = p \cdot x = 1{,}55 \cdot 5{,}17 = 8{,}01$

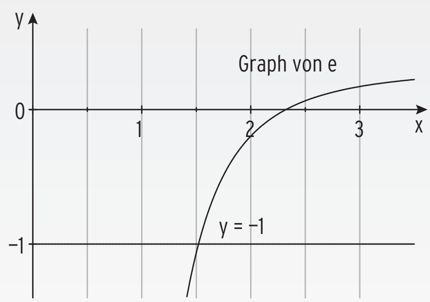
Die Produzentenrente entspricht 73,16% des erzielten Umsatzes, d. h. die Aussage des Herstellers stimmt.

c) **Preiselastizität der Nachfrage** $p_{N,neu}(x)$

Einsetzen in $e(x) = \frac{p(x)}{p'(x) \cdot x}$ ergibt:

$$e(x) = \frac{-x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}1x + 7}{(-3x^2 + 3x - 1{,}1) \cdot x}$$

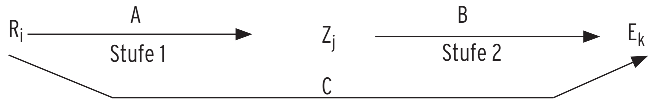
$$e(x) = \frac{-x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}1x + 7}{-3x^3 + 3x^2 - 1{,}1x} \quad \text{mit } x \neq 0;\ x > 0$$



2.3 Lineare Algebra

Formelsammlung

Lineare Verflechtung



R_i: Rohstoffe (i = 1, … , m); Z_j: Zwischenprodukte (j = 1, …, p);
E_k: Endprodukte (k = 1,…,n)

Verflechtungsmatrizen

$A = A_{RZ}$ Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix
$B = B_{ZE}$ Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix
$C = C_{RE}$ Rohstoff-Endprodukt-Matrix Es gilt: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$ für die Rohstoffe
$\vec{z}$ für die Zwischenprodukte Es gilt:
$\vec{x}$ für die Endprodukte

$$\boxed{\begin{aligned} A \cdot \vec{z} &= \vec{r} \\ B \cdot \vec{x} &= \vec{z} \\ C \cdot \vec{x} &= \vec{r} \end{aligned}}$$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit) (Kostenvektoren sind Zeilenvektoren)

$\vec{k}_R^T$ Material-(Rohstoff-) kosten

$\vec{k}_Z^T$ Fertigungskosten in Stufe 1

$\vec{k}_E^T$ Fertigungskosten in Stufe 2

Kosten für die Produktion $\vec{x}$

K_R für die Rohstoffe
K_Z für die Fertigung der Zwischenprodukte Es gilt:
K_E für die Fertigung der Endprodukte
K_f fixe Kosten

$$\boxed{\begin{aligned} K_R &= \vec{k}_R^T \cdot \vec{r} \\ K_Z &= \vec{k}_Z^T \cdot \vec{z} \\ K_E &= \vec{k}_E^T \cdot \vec{x} \end{aligned}}$$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Für die variablen Herstellkosten $\vec{k}_v^T$

$$\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R^T \cdot C + \vec{k}_Z^T \cdot B + \vec{k}_E^T}$$

pro Einheit eines Endproduktes gilt:

Für die **Gesamtkosten** K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v^T \cdot \vec{p} + K_f \\ K &= \vec{k}_R^T \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z^T \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E^T \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R^T \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z^T \cdot \vec{z} + \vec{k}_E^T \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Leontief-Modell

Input-Output-Tabelle

	S_1	S_2	...	S_n	Marktabgabe	Produktion
S_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	x_1
S_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	x_n

Dabei ist x_{ij} die Lieferung des Sektors S_i an den Sektor S_j (in geeigneten Einheiten).

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ steht für die **Produktion,** auch Bruttooutput, ...

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ steht für die **Marktabgabe,** auch Netto-Output, Konsum,Endverbrauch, ...

Die Elemente a_{ij} der **Technologiematrix A (Inputmatrix A)** sind definiert

durch $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}$

Falls $(E - A)$ invertierbar ist, heißt $(E - A)^{-1}$ Leontief-Inverse.

Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} A\vec{x} + \vec{y} &= \vec{x} \\ \vec{y} &= (E - A)\vec{x} \\ \vec{x} &= (E - A)^{-1}\vec{y} \end{aligned}}$$

Stochastische Matrizen

Die **Übergangsmatrix M ist ein stochastische Matrix,** bei der die

Summe in jeder Zeile gleich 1 ist und jede Zahl größer oder gleich null ist.

Die aktuelle Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\vec{v}^{\,T}$ (Zeilenvektor) beschrieben.

Ein **Zustandsdiagramm (Übergangsdiagramm)** lässt sich durch eine

Übergangsmatrix M beschreiben.

Markow-Kette mit der Anfangsverteilung $\vec{v}_0^{\,T}$ (Zustand zur Zeit n = 0; Startverteilung)

und der Übergangsmatrix **M**:

$\vec{v}_0^{\,T} \to \vec{v}_1^{\,T}$ $(= \vec{v}_0^{\,T} \cdot \mathbf{M}) \to \vec{v}_2^{\,T}$ $(= \vec{v}_1^{\,T} \cdot \mathbf{M}) \to$ $\vec{v}_3^{\,T} (= \vec{v}_2^{\,T} \cdot \mathbf{M} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot \mathbf{M}^2) \to \ldots$

Dabei ist z. B. $\vec{v}_1$ der Zustand nach einem Übergang.

Übergangsmatrix für zwei Zeitabschnitte: $\mathbf{M \cdot M = M^2}$

Gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}^n = \mathbf{M}_\infty$, besteht die Matrix $\mathbf{M}_\infty$ aus lauter gleichen Zeilen:

$$\mathbf{M}_\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}_\infty$ heißt **Grenzmatrix.**

Der Zeilenvektor $\vec{p}^{\,T} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ ist ein **Fixvektor.**

Berechnung stationärer Zustände: $\vec{p}^{\,T} \cdot \mathbf{M} = \vec{p}^{\,T}$

Dabei ist $\vec{p}$ der Gleichgewichtszustand **(stationäre, langfristige, stabile Verteilung).**
Die stationäre Verteilung **hängt nicht von der Anfangsverteilung** ab.
Zur **Berechnung** von $\vec{p}^{\,T} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ (Fixvektor) ist das

LGS $\vec{p}^{\,T} \cdot \mathbf{M} = \vec{p}^{\,T}$ unter der **Nebenbedingung** $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (= 100 %) zu lösen.

Aufgaben eA - GTR/CAS - zur Prüfungsvorbereitung

Lineare Algebra Aufgabe 1 **Lösungen Seite 108/109**

In der Volkswirtschaft von XLAND sind die Sektoren S_1, S_2 und S_3 nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Die Inputmatrix A ist mit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{2}{24} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{8} & \frac{10}{24} \end{pmatrix}$ bekannt.

In der vergangenen Periode produzierte Sektor S_1 6 Mengeneinheiten (ME), Sektor S_2 8 ME und Sektor S_3 24 ME.

a) Interpretieren Sie das Element a_{23} der Technologiematrix A .
Jeder Sektor plante eine Marktabgabe von mindestens 4 ME.
Untersuchen Sie, ob diese Planung mit der gegebenen Produktion umgesetzt werden konnte. Stellen Sie die gesamtwirtschaftliche Verflechtung der vergangenen Periode von XLAND grafisch dar. (8 BE)

b) Für die aktuelle Periode soll der Sektor S_1 4,5 ME, Sektor S_2 12 ME und Sektor S_3 7 ME für den Markt bereitstellen. Bestimmen Sie die notwendige prozentuale Produktionsmengenänderung je Sektor.
Für die folgende Periode sind folgende Vorgaben zu beachten:
Die Produktionsmengen der einzelnen Sektoren sind nicht bekannt, es gilt aber, dass die Produktionsmengen der Sektoren S_1 und S_2 gleich groß sein sollen. Die Abgabe an den Markt soll für Sektor S_1 13 ME und für Sektor S_2 11 ME betragen.
Bestimmen Sie die Produktionsmengen der einzelnen Sektoren sowie die Marktabgabe des Sektors S_3.
(12 BE)

Für die Volkswirtschaft von YLAND sind die zwei Sektoren SB_1 und SB_2 nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.

Für die Technologiematrix B_k gilt: $B_k = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{6} + 2k \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} - 2k \end{pmatrix}$.

In der letzten Periode produzierte Sektor SB_1 8 ME und Sektor SB_2 6 ME.
Der Parameter k gibt die Veränderung in der Produktion an, die aufgrund neuer Produktionsverfahren zu erwarten ist. Es gilt $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

c) Bestimmen Sie alle Werte, die der Parameter k im Sachzusammenhang annehmen kann.
Berechnen Sie den Parameter k so, dass beide Sektoren jeweils 3 ME an den Markt abgeben. (10 BE)

(Abitur 2013, Berufliches Gymnasium)

Lineare Algebra Aufgabe 2 **Lösungen Seite 109/110**

Der Markt für Anti-Schuppen-Shampoo wird von wenigen Herstellern beherrscht. Zwei konkurrierende Unternehmen Denkel und Brogta starten gleichzeitig aufwändige Werbeaktionen für ihr Produkt. Eine parallel dazu verlaufende Marktanalyse ergibt folgendes Kundenverhalten: 45 % der Denkel-Kunden halten dem Unternehmen die Treue, 25 % wechseln zu Brogta und 30 % kaufen ein Shampoo von anderen Herstellern;
20 % der Brogta-Kunden wechseln zu Denkel, genauso viele zu einem anderen Hersteller und der Rest sind Stammkunden von Brogta; 40 % der Kunden anderer Hersteller verbleiben bei diesen, 30 % wechseln zu Brogta und der Rest zu Denkel.

Die Marktuntersuchung liefert für den Monat März folgende Marktanteile:
Denkel: 25 %, Brogta: 30 %, andere Hersteller: 45 %

a) Stellen Sie das Käuferverhalten grafisch in einem Übergangsdiagramm und als Übergangsmatrix dar.

Die Werbeaktionen sollen über drei Monate durchgeführt werden. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Anfangsverteilung die Marktanteile nach den Werbeaktionen unter der Voraussetzung, dass die Kundenwanderung monatlich erfasst wird.

Beurteilen Sie den Erfolg der Werbemaßnahmen.

Sollte sich am Verbraucherverhalten nichts ändern, wird sich langfristig ein Gleichgewichtszustand ergeben. Ermitteln Sie den Fixvektor.

b) Durch weitere Marketingstrategien erzielen die Unternehmen Denkel und Brogta eine deutlich höhere Kundenbindung, so dass sich das Übergangsverhalten jetzt folgendermaßen darstellt:

von \ nach	Denkel	Brogta	Andere
Denkel	0,9	0	0,1
Brogta	0	0,8	0,2
Andere	0	0,5	0,5

Mehrere Monate nach Beginn der Marketingstrategien haben sich im Januar die Marktanteile $\vec{v}^{T}_{neu} = (0{,}3051 \quad 0{,}4068 \quad 0{,}2881)$ ergeben.

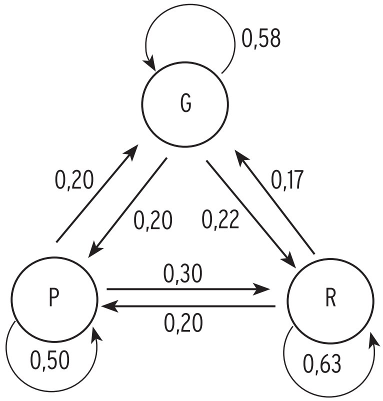
Ermitteln Sie die Marktanteile im Vormonat Dezember.

Untersuchen Sie die zukünftige langfristige Verteilung der Marktanteile.

Beurteilen Sie diese langfristige Entwicklung der Marktanteile unter Berücksichtigung der neuen Käuferwanderungen.

(Fachgymnasium Niedersachsen 2011.)

Lineare Algebra Aufgabe 3 **Lösungen Seite 110/111**



Die Umsätze im Möbelhandel einer Region sind unter den beiden Handelsgruppen P und G und dem Rest R aufgeteilt.

Zum Zeitpunkt einer Marktanalyse (t = 0) waren die Anteile folgende: P hatte 30 % Marktanteil, G hatte 40 % und der Rest R 30 %. Die jährlichen Übergänge zwischen den drei Gruppen stellt der Graph rechts dar. Es wird erwartet, dass die jährliche Entwicklung sich inder beschriebenen Weise fortsetzen wird, wenn keine Maßnahmen getroffen werden.

a) Rechts ist die Darstellung der Kundenentwicklung in einer Übergangsmatrix M begonnen worden. Bestimmen Sie die Matrix M vollständig.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}50 & .. & 0{,}30 \\ .. & .. & 0{,}22 \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Aussage der Matrix M anhand der ersten Zeile.
Berechnen Sie die Kundenanteile für t = 1 und für t = 2.
Interpretieren Sie das Ergebnis für die Handelsgruppe P.

b) Um den Marktanteil von P zu erhöhen, werden der Firma von einem Beratungsinstitut zwei mögliche Werbestrategien als Alternativen vorgeschlagen:

Strategie A: Maßnahmen zur Erhöhung der Kundentreue

Damit würden, so wurde ermittelt, dann ein Jahr später statt 50 % nunmehr 60 % noch P treu sein und nur 15 % zu G und 25 % zum Rest abwandern. Die übrigen Zahlen bleiben gleich.

Strategie B: Abwerben von Konkurrenten

Damit würde P 24 % von G (statt 20 %) und 28 % von R (statt 20 %) gewinnen, jeweils auf Kosten von G- bzw. R-treuen Kunden.
Erstellen Sie für beide Strategien passend abgeänderte Übergangsmatrizen A bzw. B.
Ermitteln Sie damit, ausgehend von den Anteilen für t = 0, die Marktanteile für t = 2.
Interpretieren Sie das Ergebnis beider Strategien aus der Sicht der Handelsgruppe P.

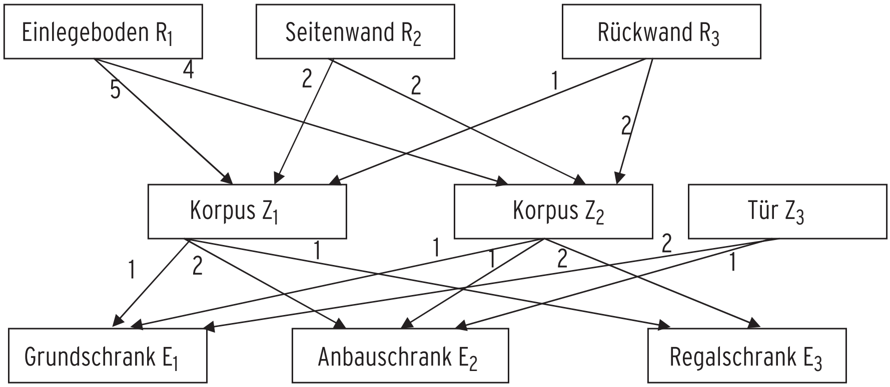
c) Die Matrix S mit $S = \begin{pmatrix} 0{,}4 & a & b \\ a & 0{,}6 & c \\ b & c & 0{,}5 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, die durch die Zahlen 0,4 und 0,6 und 0,5 gebildet wird.

Bestimmen Sie die Parameter a, b und c so, dass S eine symmetrische Übergangsmatrix ist, bei der alle Zeilensummen gleich 1 sind. Beschreiben Sie, wie sich die Symmetrie einer Übergangsmatrix S in dem zu S gehörigen Übergangsgraphen zeigt.

(Abitur 2010, Niedersachsen.)

Lineare Algebra Aufgabe 4 Seite 1/2 Lösungen Seite 111/112

Ein Hersteller von Werkzeugschränken produziert nach folgendem Schema:



Hierbei stammen die Türen aus einem anderen mehrstufigen Prozess. Die Zahlen spiegeln Mengeneinheiten (ME) wider.

a) Erläutern Sie den gesamten zweistufigen Produktionsprozess mithilfe der Matrizen A_{RZ}, B_{ZE} und C_{RE} und erläutern Sie in diesem Zusammenhang beispielhaft die Aussagen der Matrizen.
Die drei Schranktypen E_1, E_2, E_3 sollen aufgrund von langjährigen Verkaufserfahrungen im Verhältnis 2 : 1 : 3 produziert werden. Im Lager befinden sich noch 142 ME Einlegeböden. Ermitteln Sie die ME der Seitenwände, der Rückwände und der Türen, die noch beschafft werden müssen, damit der gesamte Lagerbestand der Einlegeböden aufgebraucht wird. Bestimmen Sie die ME der dann produzierbaren drei Werkzeugschranktypen E_1, E_2 und E_3.

b) Es liegt ein Großauftrag von einer Baumarktkette vor, die eine neue Serie von Werkzeugschränken anbieten will. Dafür muss die Produktion etwas geändert werden:

$$B^*_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C^*_{RE} = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 16 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für diese Produktionsänderung die benötigten ME der Einlegeböden, der Seitenwände und der Rückwände pro ME Korpus Z_1, Korpus Z_2 und Tür Z_3.
Die Baumarktkette bestellt 100 ME Grundschränke E_1, 50 ME Anbauschränke E_2 und 150 ME Regalschränke E_3. Die Preise in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) für die Einlegeböden, die Seitenwände und die Rückwände werden durch den Vektor $\vec{k}_R^{\,T} = (3 \quad 10 \quad 9)$ angegeben.

Lineare Algebra Aufgabe 4 Seite 2/2

b) Die Kosten in GE/ME für die erste bzw. zweite Produktionsonsstufe sind durch nachfolgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_Z^T = (5 \quad 7 \quad 12)$ und $\vec{k}_E^T = (4 \quad 6 \quad 5)$.

Die Fixkosten der Produktion betragen 4550 GE. Der Verkaufspreis pro ME Grundschrank E_1 liegt bei 250 GE, pro ME Anbauschrank E_2 bei 320 GE und pro ME Regalschrank E_3 bei 190 GE.

Bestimmen Sie die Beschaffungskosten für die benötigten Türen.

Untersuchen Sie, ob sich der Auftrag für das Unternehmen lohnt, unter der Voraussetzung, dass dafür mindestens 10 000 GE als Gewinn erzielt werden müssten.

(Abitur 2011, Niedersachsen, Berufliches Gymnasium.)

Lineare Algebra Aufgabe 5 Seite 1/2 **Lösungen Seite 113/114**

Ein Süßwarenhersteller stellt aus den vier Rohstoffen Zucker, Kakao, Vollmilchpulver und dem Emulgator Lecithin drei verschiedene Schokoladenprodukte her: „Kuhflecken-Riegel" (E_1), „Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegel"(E_2) und „marmorierte Schokoladenmuscheln" (E_3).
Dabei werden zunächst die Zwischenprodukte Schokoladenmasse und Milchcreme hergestellt, die dann weiter zur Herstellung der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 verarbeitet werden.

Der zweistufige Produktionsprozess wird durch die folgenden Matrizen beschrieben. Die Angaben sind in Mengeneinheiten (ME).

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 10 & 0 \\ 7 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B_{ZE} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Erstellen Sie ein Verflechtungsdiagramm, das den zweistufigen Produktionsprozess darstellt.

Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix (C_{RE}) und interpretieren Sie das Element c_{12}.

Im Rohstofflager befinden sich 9760 Mengeneinheiten (ME) Zucker, 4000 ME Kakao, 6720 ME Vollmilchpulver und 2380 ME Lecithin.

Entscheiden Sie, ob ein Auftrag von 20 ME „Kuhflecken-Riegeln" (E_1), 25 ME „Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegeln" (E_2) und 10 ME „marmorierten Schokoladenmuscheln" (E_3) angenommen werden sollte.

Die Kosten des Produktionsprozesses in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) sind den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen:

Lineare Algebra Aufgabe 5 Seite 2/2

a)

Rohstoff	Kosten
Zucker	2
Kakao	4
Vollmilch-pulver	3
Lecithin	5

Herstellung der Zwischen-produkte	Kosten
Schokoladen-masse	6
Milchcreme	5

Herstellung der Endprodukte	Kosten
Kuhflecken-Riegel (E_1)	45
Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegel (E_2)	54
Marmorierte Schokoladenmuscheln (E_3)	33

Berechnen Sie die Rohstoffkosten für die einzelnen Schokoladenendprodukte E_1, E_2 und E_3.

Der Süßwarenhersteller erhält einen Auftrag über 10 ME „Kuhflecken-Riegel" (E_1), 20 ME „Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegel" (E_2) und 15 ME „marmorierte Schokoladen- muscheln" (E_3).

Ermitteln Sie die Herstellungskosten, die er für diesen Auftrag aufwenden muss, unter der Voraussetzung, dass für diesen Auftrag Fixkosten in Höhe von 155 GE anfallen. „Kuhflecken-Riegel" (E_1) werden zum Preis von 1600 GE/ME und „Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegel" (E_2) zum Preis von 1400 GE/ME verkauft. Berechnen Sie den Preis, der mindestens für eine ME „marmorierte Schokoladenmuscheln" (E_2) erhoben werden muss, damit der Gewinn für diesen Auftrag mindestens 12% des Erlöses beträgt.

b) Der Süßwarenhersteller liefert die drei Schokoladenprodukte direkt an drei Filialen (A, B, C) einer Supermarktkette. Durch diese Lieferung erzielt er bei Filiale A Erlöse in Höhe von 31420 GE, bei Filiale B von 40520 GE und bei Filiale C von 44640 GE.Aufgrund der Exklusivität der „marmorierten Schokoladenmuscheln" (E_3) werden diese für den 1,5-fachen Preis der „Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegel" (E_2) an die Supermarktfilialen verkauft. Die Verkaufsmengen in ME lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Sorte \ Filiale	Filiale A	Filiale B	Filiale C
Kuhflecken-Riegel (E_1)	4	4	8
Viel-Milch-Wenig-Kakao-Riegel (E_2)	2	4	0
Marmorierte Schokoladenmuscheln (E_3)	6	8	8

Berechnen Sie die jeweiligen Verkaufspreise des Süßwarenherstellers in GE/ME für die drei Schokoladenprodukte E_1, E_2 und E_3 .

(Abitur 2012, Berufliches Gymnasium, Niedersachsen.)

Lineare Algebra Aufgabe 6 Lösungen Seite 115/116

Der Kaffeeproduzent TCHOBI stellt aus den vier Rohkaffeesorten R_1, R_2, R_3 und R_4 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her, um aus diesen die drei Endproduktkaffeesorten E_1, E_2 und E_3 zu mischen.
Zur Herstellung einer Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts Z_1 werden 17 ME von R_1, 12 ME von R_2, 11 ME von R_3 und 16 ME von R_4 benötigt. Um eine ME von Z_2 herzustellen, benötigt man 18 ME von R_1, 15 ME von R_2, 12 ME von R_3 und 19 ME von R_4. Zur Herstellung einer Mengeneinheit des Zwischenprodukts Z_3 werden 12 ME von R_1, 13 ME von R_2, 14 ME von R_3 und 17 ME von R_4 benötigt.
Die Zusammensetzung je einer ME der Endproduktkaffeesorten erfolgt gemäß der folgenden Rohstoff-Endprodukt-Matrix C_{RE}.

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 180 & 208 & 129 \\ 143 & 181 & 116 \\ 130 & 162 & 115 \\ 187 & 233 & 152 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B_{ZE}.
Stellen Sie die oben beschriebene Materialverflechtung in einer geeigneten Form grafisch dar.

(14 BE)

b) TCHOBI möchte einen Auftrag über 18 ME von E_1, 34 ME von E_2 und 25 ME von E_3 ausführen. Dem Unternehmen entstehen Kosten für je eine ME des Rohkaffees R_1 in Höhe von 3 GE, für R_2 in Höhe von 4 GE und für R_3 in Höhe von 2 GE. Die Geschäftsleitung plant für diesen Auftrag gesamte Rohstoffkosten von maximal 170000 GE. Bestimmen Sie die maximalen Kosten für eine ME von R_4 so, dass der Auftrag planmäßig ausgeführt werden kann.

(7 BE)

(Abitur 2013, Berufliches Gymnasium.)

Zentralabitur 2014

Block 3 – Aufgabe 3A **Lösungen Seite 117/118**

Ein Unternehmen, das Rasierwasser herstellt, hat nachfolgenden Produktionszusammenhang. Die Angaben sind in Mengeneinheiten (ME), $a \in [5; 8] \land a \in \mathbb{N}$ ist ein Parameter, der die Produktion in unterschiedlichen Ländern widerspiegelt:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	100	200	0
R_2	200	200	400
R_3	200	300	400
R_4	400	300	600

	E_1	E_2
Z_1	8	2a
Z_2	a	16
Z_3	20	a

Rohstoffe: R_1, R_2, R_3, R_4
Zwischenprodukte: Z_1, Z_2, Z_3
Endprodukte: E_1, E_2

a) Für den Produktionsprozess und für die Angabe der Inhaltsstoffe auf der Verpackung werden mehrere Informationen benötigt. Stellen Sie den Produktionsprozess mit allen Werten grafisch dar. Berechnen Sie die benötigten Mengenangaben der einzelnen Rohstoffe für die Produktion je einer Mengeneinheit (ME) der beiden Rasierwasser in Abhängigkeit vom Parameter a.
Geben Sie an, wie viele Rohstoffmengen mindestens und wie viele höchstens für die Produktion je einer ME der Endprodukte vorrätig sein müssen.
(10 BE)

b) An ein Werk im Ausland werden 100 ME von Z_1, 75 ME von Z_2 und 80 ME von Z_3 verkauft. Die Einkaufspreise für die Rohstoffe liegen für R_1 bei 3 Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME), für R_2 bei 3,5 GE/ME, für R_3 bei 6 GE/ME und für R_4 bei 10 GE/ME. Der Verkaufspreis pro Zwischenprodukteinheit liegt für Z_1 bei 110% der Rohstoffkosten, für Z_2 bei 200% und für Z_3 bei 150%.
Bestimmen Sie die Höhe des Überschusses, der aus diesem Verkauf resultiert.
(8 BE)

c) In einem Land wird mit dem Parameter a = 6 produziert. Für die Preiskalkulationen benötigt die Unternehmensleitung den Fertigungskostenvektor $\vec{k}_z^T$ der ersten Produktionsstufe. Bei der Produktion für eine ME von E_1 entstehen Fertigungskosten für die Zwischenprodukte in Höhe von 15 GE/ME und für eine ME von E_2 in Höhe von 24 GE/ME. Berechnen Sie das Kostenintervall für Z_3.
(12 BE)

Zentralabitur 2014

Block 3 – Aufgabe 3B **Lösungen Seite 119**

In einer niedersächsischen Kleinstadt mit 70000 Einwohnern sollen die Baugebiete, die in 10 Perioden benötigt werden, ausgewiesen werden. Dazu benötigt der Stadtrat Erkenntnisse über die Bevölkerungswanderung und über die Wünsche in Bezug auf die Wohngebiete. Die Stadt hat die Möglichkeit in der Nähe der Innenstadt (Innenstadtnähe W_1), in einem angrenzenden Waldgebiet (Naturwohngebiet W_2) und auf ehemaligen Feldern am Rand der Stadt (Neubaugebiet W_3) Baugebiete auszuschreiben. Ähnliche Wohngebiete existieren jetzt schon. Zurzeit lebt 10% der Bevölkerung in Innenstadtnähe, 35% in Naturwohngebieten und 55% der Bevölkerung in Neubaugebieten. Man geht davon aus, dass sich das Wechselverhalten in den betrachteten Perioden nicht ändert.

a) Um herauszufinden, welche Gebiete zu Baugebieten erklärt werden müssen, benötigt der Stadtrat Informationen über die Wechselneigungen der Menschen und die Daten der Bevölkerungsentwicklung in den einzelnen Wohngebieten von der Vorperiode bis zur übernächsten Periode.
Als Grundlage dienen folgende zusätzliche Informationen:

von \ nach	Innenstadtnähe W_1	Naturwohngebiet W_2	Neubaugebiet W_3
Innenstadtnähe W_1	0,5	0,4	a
Naturwohngebiet W_2	b	0,8	0,15
Neubaugebiet W_3	0,1	c	0,7

$\vec{v}_0^{\,T} = (v_{W_1} \quad v_{W_2} \quad v_{W_3})$

Berechnen Sie die fehlenden Werte a, b und c.

Ermitteln Sie für die geforderten Perioden die Bevölkerungszahlen für die drei Wohngebiete. Beschreiben Sie den Entwicklungsverlauf. (13 BE)

b) Bestimmen Sie die langfristige Entwicklung der Bevölkerungszahlen in den einzelnen Wohngebieten mithilfe der Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie die ermittelten Werte für die Stadtratssitzung. (10 BE)

Zentralabitur 2015

Block 3 **Aufgabe 3A** **Lösungen Seite 120/121**

Das Statistische Bundesamt ist Herausgeber der „Input-Output-Rechnung im Überblick“ und bildet darin die Verflechtungen der einzelnen Sektoren der Bundesrepublik Deutschland nach dem Leontief-Modell ab. Die folgende Tabelle ist ein Auszug aus der zusammengefassten „Input-Output-Tabelle […] der inländischen Produktion und Importe zu Herstellungspreisen in Mrd. Euro" (GE):

von \ nach		Output				
		Landwirtschaft	Industrie	Dienstleistung	Konsum	Produktion
Input	Landwirtschaft	8,2	32,6	3,6	26,8	71,2
	Industrie	12,4	972,2	159,5	1541,6	2685,7
	Dienstleistung	11,4	350,5	726,2	1452,5	2540,6

Die Regierung und die Opposition nutzen solche Daten zur Beurteilung der konjunkturellen Entwicklung und für ihr wirtschaftspolitisches Handeln. Die Opposition ist der Ansicht, dass die Krisen im nahen Ausland einen Teil der Konsumenten stark verunsichern und dass damit die konjunkturelle Erholung in Deutschland gefährdet sei: „Wenn es uns gelingt Anreize zu schaffen, so dass die Industrie ihre Produktion um 5 % erhöht, dann wird der gesamte Konsum ebenfalls um 5 % steigen.“ Die Bundesrepublik hingegen setzt auf eine Produktionssteigerung in allen Bereichen in Höhe von 2 % und kontert, dass dies zu einem deutlich höheren Konsum führe.

a) Stellen Sie die in der Tabelle dargestellten Zusammenhänge in einem Verflechtungsdiagramm dar. Überprüfen Sie die These der Opposition, indem Sie die prozentuale Veränderung des gesamten Konsums ermitteln. Wenn der Vorschlag der Bundesregierung umgesetzt wird, dann ergibt sich folgender Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 27{,}336 \\ 1572{,}432 \\ 1481{,}550 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie die prozentuale Veränderung der Marktabgabe.
   Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Prognosen. (12 BE)

b) Um den zukünftigen Konsum zu simulieren, verwendet das Statistische Bundesamt im Folgenden eine vereinfachte Technologiematrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

   Da keine genauen Angaben über die Nachfrage im übernächsten Wirtschaftsjahr gemacht werden können, wird mittelfristig eine Produktion von Landwirtschaft, Industrie und Dienstleistung im Verhältnis 1 : 5 : 3 zugrunde gelegt.
   Ermitteln Sie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}_{neu}$, wenn die Marktabgabe aller drei Bereiche insgesamt auf 4000 GE steigen soll.
   Erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle. (12 BE)

Zentralabitur 2016

Aufgabe 3A **Lösungen Seite 121/122**

Das Unternehmen BIOSAFT produziert Smoothies in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den Rohstoffen Obst (R_1), Gemüse (R_2) und Wasser (R_3) die Zwischenprodukte Obstbasis (Z_1), Gemüsebasis (Z_2) und eine fruchtige Wasserbasis (Z_3), die anschließend zu den Endprodukten Obst-Smoothie (E_1), Grüner-Smoothie (E_2) und Obst-Gemüse-Smoothie (E_3) verarbeitet werden.
Folgende Informationen in Mengeneinheiten (ME) sind bekannt:

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1{,}4 \\ 2 & 3{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & 1{,}8 \end{pmatrix} \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 36 & 28 & 19{,}8 \\ 18 & 34 & 24{,}3 \\ 8 & 24 & 17{,}2 \end{pmatrix}$$

a) Der Discounter OLDI überlegt, die Smoothies von BIOSAFT in sein Sortiment aufzunehmen und ist bereit, einen einheitlichen Preis von 35 Geldeinheiten (GE) je ME Smoothie zu bezahlen. Der Auftrag von OLDI an BIOSAFT umfasst 500 ME Obst-Smoothies und 200 ME Grüner-Smoothie. BIOSAFT möchte den Auftrag kalkulieren. Folgende Informationen bezüglich der Produktionskosten sind bekannt:

Rohstoffkosten in GE/ ME		Fertigungskosten der 1. Produktionsstufe in GE/ME		Fertigungskosten der 2. Produktionsstufe in GE/ME	
R_1	0,6	Z_1	0,5	E_1	0,4
R_2	0,4	Z_2	0,5	E_2	0,45
R_3	0,1	Z_3	0,2	E_3	0,37
Fixkosten: 228 GE je Auftrag					

Interpretieren Sie das Element b_{31} der Matrix B_{ZE} im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie die variablen Stückkosten je einer Mengeneinheit der Endprodukte.
Berechnen Sie die variablen Kosten für diesen Auftrag.
Begründen Sie rechnerisch, ob BIOSAFT den Auftrag annehmen sollte.
Im Folgenden verändert sich aufgrund von Ernteschwankungen der Rohstoffpreis für Obst, während die übrigen Preise konstant bleiben.
Bestimmen Sie die für BIOSAFT maximal akzeptable prozentuale Preissteigerung für Obst, wenn der Gewinn für diesen Auftrag nicht negativ werden soll.

(15 BE)

b) Von der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ} ist bekannt, dass von Obst viermal so viel zur Produktion einer Mengeneinheit der Obstbasis benötigt wird wie zur Produktion einer Mengeneinheit der Gemüsebasis, hingegen von Gemüse siebenmal so viel zur Produktion einer Mengeneinheit der Gemüsebasis wie zur Produktion einer Megeneinheit der Obstbasis. Der Rohstoff Wasser wird für die Fertigung der Gemüsebasis nicht benötigt. Bestimmen Sie die fehlende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ}.

(9 BE)

Lösungen 2.3 Lineare Algebra

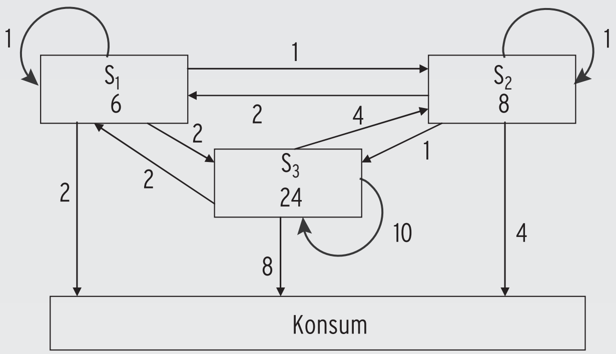
Lösung Lineare Algebra Aufgabe 1 Seite 1/2 (Aufgabe Seite 97)

a) Interpretation $a_{23} = \frac{1}{24}$; der Sektor S_3 benötigt $\frac{1}{24}$ ME von Sektor S_2, um selbst 1 ME zu erzeugen.–

Konsumvektorberechnung: $\vec{y} = (E - A)\,\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{-2}{24} \\ \frac{-2}{6} & \frac{7}{8} & \frac{-1}{24} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-4}{8} & \frac{14}{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Die Planung kann nicht umgesetzt werden, da der Sektor S_1 nur 2 ME an den Markt abgibt.

Verflechtungsdiagramm



b) **Prozentuale Produktmengenänderung**

Aktuelle Produktion:

$\vec{x}_1 = (E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 36 \end{pmatrix}$ vgl.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$ Produktion vergangene Periode

Prozentuale Produktionsänderung

S_1: $\frac{12}{6} = 2$; also 100 % Steigerung

S_2: $\frac{20}{8} = 2{,}5$; also 150 % Steigerung

S_3: $\frac{36}{24} = 1{,}5$; also 50 % Steigerung

Produktionsmengen und Marktabgaben

Ansatz: $A \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$ (oder auch $(E - A)\,\vec{x} = \vec{y}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{2}{24} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{8} & \frac{10}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \textbf{oder} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{-2}{24} \\ \frac{-2}{6} & \frac{7}{8} & \frac{-1}{24} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-4}{8} & \frac{14}{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Zugehöriges LGS:

$$\frac{17}{24}x_1 - \frac{2}{24}x_3 = 13$$
$$\frac{13}{24}x_1 - \frac{1}{24}x_3 = 11$$
$$-\frac{20}{24}x_1 + \frac{14}{24}x_3 - y_3 = 0$$

Bedingungsmatrix für x_1, x_3, y_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{17}{24} & -\frac{2}{24} & 0 & 13 \\ \frac{13}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 11 \\ -\frac{20}{24} & \frac{14}{24} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

GTR: $x_1 = 24$; $x_3 = 48$; $y_3 = 8$

Die Produktionsmengen der einzelnen Sektoren sind für S_1 und S_2 24 ME, für S_3 48 ME. Die Marktabgabe des Sektors S_3 beträgt 8 ME.

Lösung Lineare Algebra Aufgabe 1 Seite 2/2

c) **Bestimmung von k im Sachzusammenhang**

Die Elemente der Technologiematrix müssen aus ökonomischer Sicht zwischen 0 und 1 liegen; laut Aufgabenstellung gilt $k \geq 0$.

Bedingungen für k: $\frac{1}{6} + 2k \leq 1 \wedge \frac{1}{6} + 2k \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

$\frac{1}{2} - 2k \leq 1 \wedge \frac{1}{2} - 2k \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$

Beide Bedingungen für k und $k \geq 0$ sind erfüllt für $0 \leq k \leq \frac{1}{4}$.

Der Parameter k darf Werte von 0 bis 0,25 annehmen.

Berechnung von k bei einem Konsum von je 3 ME

Ansatz: $\vec{y} = (E - B_k)\,\vec{x} = \vec{x} - B_k \cdot \vec{x}$

Einsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{6} + 2k \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

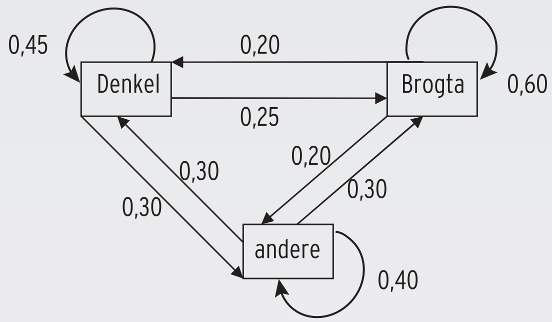
LGS für k: $3 = 8 - (3 + 1 + 12k) \Rightarrow k = \frac{1}{12}$

$3 = 6 - (1 + 3 - 12k) \Rightarrow k = \frac{1}{12}$

Für $k = \frac{1}{12}$ können beide Sektoren jeweils 3 ME an den Markt abgeben.

Lösung Lineare Algebra Aufgabe 2 Seite 1/2 (Aufgabe Seite 98)

a) Übergangsdiagramm



Übergangsmatrix

$A = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}60 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}40 \end{pmatrix}$

(Zeilensumme = 1)

Marktanteile nach der Werbeaktion

$\vec{v}_3^{\,T} = \vec{v}_{Start}^{\,T} \cdot A^3 = (0{,}25 \quad 0{,}30 \quad 0{,}45) \cdot A^3 = (0{,}3065 \quad 0{,}4039 \quad 0{,}2896)$

Hersteller Denkel hat nach der Werbeaktion seinen Marktanteil auf 30,65 % erhöht, Hersteller Brogta hat seinen Marktanteil ebenfalls erhöht und liegt jetzt bei 40,39 %, d. h. die Werbeaktion war erfolgreicher als bei Denkel, weil sein Marktanteil nicht mehr nur um 5% größer als bei Denkel ist, sondern um fast 10%.

Ermittlung des Fixvektors

Ermittlung der langfristigen Prognose mit $\vec{v}^{\,T} \cdot A = \vec{v}^{\,T}$

mit $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$

Einsetzen ergibt:

$$(x \quad y \quad 1 - x - y) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}60 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}40 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1 - x - y)$$

3 **Zentralabitur** eA Mathematik an beruflichen Gymnasien zur Vorbereitung auf das Abitur 2023

Operatorenliste

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen muss nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes dargelegt werden. In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen. Für die Berechnung der Extrempunkte einer Funktion f ist es beispielsweise nicht zulässig, diese direkt aus dem Graphen von f abzulesen.
bestimmen, ermitteln	Ein möglicher Lösungsweg muss dargestellt und das Ergebnis formuliert werden. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
klassifizieren	Eine Menge von Objekten muss nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen eingeteilt werden. Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird ggf. gesondert gefordert.
vergleichen	Sachverhalte, Objekte oder Verfahren müssen gegenübergestellt und Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede müssen festgestellt werden. Ggf. müssen Vergleichskriterien festgelegt werden. Eine Bewertung wird ggf. gesondert gefordert.
untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten müssen herausgefunden und dargelegt werden. Je nach Sachverhalt kann zum Beispiel ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

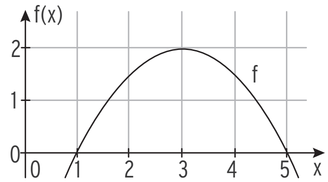
Zentralabitur 2018 **Mathematik** **Berufliches Gymnasium**

(angepasst an das Prüfungsjahr 2023)

Pflichtteil eA

Lösungen Seite 138/139

Aufgabe P1



Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f.

a) Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an. (2 BE)

b) Gegeben sind die beiden Terme

(I) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ und (II) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x}$; $x \neq 4$

Beschreiben Sie ihre jeweilige Bedeutung in Bezug auf den Graphen von f. (2 BE)

c) Veranschaulichen Sie den Wert des Terms $4 \cdot 2 - \int_1^5 f(x)dx$. (2 BE)

Aufgabe P2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

a) Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$.

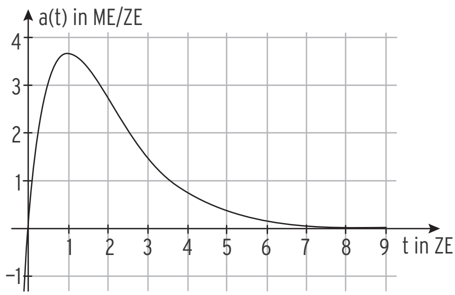
Bestimmen Sie eine Lösung für x. (2 BE)

b) Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. (3 BE)

Aufgabe P3

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

a) Skizzieren Sie den Graphen der momentanen Absatzveränderung in das nebenstehende Koordinatensystem. (2BE)



b) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA

Aufgabe P4

a) Betrachtet werden die Matrizen A, B, C und D.

A hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von A ist 3×7.

B hat das Format 7×2 und $D = A \cdot B \cdot C$ hat das Format 3×4.

Geben Sie das Format der Matrix C an. (1 BE)

b) Gegeben sind die Matrizen

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Es gilt: $Z = X \cdot Y$.

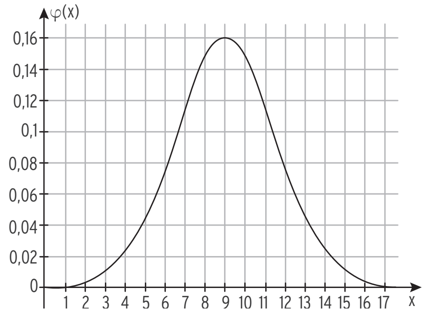
Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c. Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Form (a; b; c) an. (2 BE)

(geändert wegen KC 2018)

Aufgabe P5

Gegeben ist die Dichtefunktion φ einer normalverteilten Zufallsgröße X mit einer Standardabweichung $\sigma_X = 2{,}5$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird durch $P(6{,}5 \leq X \leq 11{,}5)$ beschrieben.



a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A in der Abbildung grafisch dar.

Geben Sie den Erwartungswert μ_X an. (2 BE)

b) Eine Zufallsgröße Y ist normalverteilt mit $\mu_Y = 7$ und $\sigma_Y = 1{,}25$. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B wird durch $P(4{,}5 \leq Y \leq 9{,}5)$ beschrieben.

Untersuchen Sie, welches der beiden Ereignisse A oder B eine größere Wahrscheinlichkeit aufweist. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS Lösungen Seite 140 - 151

Aufgabe 1A

Das Unternehmen OPTI-Protect fertigt und vertreibt Protektoren, die bei der Schutzbekleidung im Motorsport verwendet werden. Als Mitarbeiter der Finanzabteilung sind Sie dafür zuständig, für den Vorstand die zu erwartende Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation verschiedener Produkte zu untersuchen. Dabei wird die jeweilige Produktionsmenge x in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

a) Mitarbeiter der Forschungs- und Entwicklungsabteilung des Unternehmens haben ein neues Produkt entworfen. Durch den Einsatz einer kombinierten Gel-Kunststoffplatte sollen sich die Protektoren individuell an den Rücken und die Wirbelsäule des Fahrers anpassen und dadurch optimalen Schutz bieten.
Für dieses Produkt ist der Hersteller Monopolist. Aus Marktforschungsergebnissen ist bekannt, dass sich der Preis p in Geldeinheiten je Mengeneinheit (GE/ME) für die Protektoren entsprechend der Gleichung $p(x) = -70x + 7000$ am Markt bestimmen lässt.
Es wird davon ausgegangen, dass die Gesamtkostenfunktion ertragsgesetzlich verläuft.
Es ist bekannt, dass Fixkosten in Höhe von 40 000 GE anfallen.
Der Grenzgewinn für dieses Produkt beträgt 1 300 GE/ME bei Produktion und Verkauf von 40 ME. Bei 10 ME ist mit einem Gewinn von 3 500 GE zu rechnen. Die Gewinngrenze wird bei einer produzierten Menge von 80 ME erreicht.
Bestimmen Sie die Funktionsterme der Erlös-, Gewinn- und Kostenfunktion.
Zur Kontrolle: $K(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 2\,500\,x + 40\,000$
Zeichnen Sie die ökonomisch relevanten Abschnitte der Graphen der Funktionen K, E, G und p in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichnen Sie unter Angabe der entsprechenden Werte:
- Höchstpreis
- Sättigungsmenge
- Erlösmaximum
- Gewinnschwelle
- gewinnmaximale Menge

Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Kontext der Aufgabe. (20 BE)

b) Nachdem das Produkt erfolgreich eingeführt wurde, drängt ein Wettbewerber mit Dumpingpreisen auf den Markt und bietet die Protektoren zum Preis von 1 000 GE/ME an. Damit ist OPTI-Protect für dieses Produkt kein Monopolist mehr.
Untersuchen Sie, ob OPTI-Protect bei unveränderter Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 2\,500\,x + 40\,000$ diesen Preis langfristig halten kann.

Fortsetzung Aufgabe 1A b)

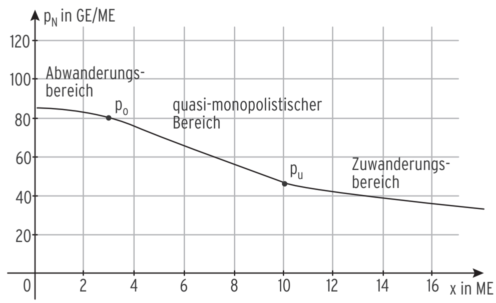
Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Fortsetzung Aufgabe 1A b)

b) Die Geschäftsführung möchte auf die veränderte Marktsituation reagieren und entsprechende Anpassungen bezüglich der Kostenstruktur vornehmen, um den Konkurrenten kurzfristig mit einem Preis in Höhe von 800 GE/ME vom Markt zu verdrängen. Das Fertigungsverfahren kann auf verschiedene Weisen optimiert werden, es entstehen abhängig von der Art der Optimierung c Gesamtkosten, die durch die Funktionenschar K_c mit $K_c(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 600\,c \cdot x + 40\,000$ mit $c \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$ modelliert werden. Ermitteln Sie den Wert von c, für den die Vorgabe der Geschäftsführung eingehalten wird. Bestimmen Sie den maximalen Anteil der Fixkosten K_f, der bei einem Preis von 800 GE/ME kurzfristig gedeckt wird. (15 BE)

c) OPTI-Protect vertreibt weiterhin auch die klassischen Protektoren. Da das Unternehmen durch Qualität und Image am Markt sehr etabliert ist, ergibt sich trotz Konkurrenz ein quasi-monopolistischer Spielraum für die Preispolitik, d. h. in einem gewisssen Preissegment verhalten sich die Nachfrager dem Produkt gegenüber loyal wie im Monopol. Erst wenn die obere Preisgrenze p_o überschritten wird, kommt es zur Abwanderung der Kunden. Wird die untere Preisgrenze p_u unterschritten, kommt es zur Zuwanderung. Aus dem Controlling liegen für die klassischen Protektoren folgende Daten vor:



Abwanderungsbereich: $p_{N1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 85{,}5$ mit $D(p_{N1}) = [0; 3)$

Quasi-monopolistischer Bereich: $p_{N2}(x) = -5x + 96{,}5$ mit $D(p_{N2}) = [3; 10]$

Zuwanderungsbereich: $p_{N3}(x) = \frac{600}{x + 5} + 6$ mit $D(p_{N3}) = (10; \infty)$

Den Vorstand interessiert die Reaktionsstärke auf eine Preisänderung im quasi-monopolitischen Bereich.
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Nachfrage elastisch bzw. unelastisch reagiert.

Fortsetzung Aufgabe 1A c)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Fortsetzung Aufgabe 1A c)

c) Ein Vorstandsmitglied behauptet, dass die Nachfragefunktion im Zuwanderungsbereich bei hinreichend großer Absatzmenge zur Grenzerlöskurve werde und somit dieselbe Situation wie beim vollständigen Wettbewerb entstehen würde.
Überprüfen Sie diese Behauptung.

Aufgrund der starken Nachfrage nach dem neuen Produkt kommt es zu Produktionsengpässen. Seitens der Geschäftsleitung wurde entschieden, dass die Fertigung der klassischen Protektoren zugunsten der neuen Protektoren zurück gefahren werden soll. Die Gesamtkostenfunktion K und die Erlösfunktion E für die klassischen Protektoren sind durch folgende Gleichungen angegeben:
$E(x) = -5x^2 + 96{,}5x$ und $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100$.

Das Produktionsmengenintervall der klassischen Protektoren wird anhand zweier Kriterien festgelegt:

- Die Produktionsmenge soll so festgelegt werden, dass der Gesamtkostenanstieg nur degressiv ist.
- Der Wert der Wirtschaftlichkeit W mit $W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}$ darf nicht unter 1,1 sinken.

Bestimmen Sie die möglichen neuen Produktionsmengen für die klassischen Protektoren im quasi-monopolistischen Definitionsbereich $D(p_{N2}) = [3; 10]$. (11 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS
Aufgabe 1B

Das Unternehmen TOPSPIEL bringt das neue Kinderspielzeug TOP-MEMO auf den Markt. Die zuvor durchgeführte Marktanalyse hat ergeben, dass insgesamt 500 000 Mengeneinheiten (ME) dieses Spiel verkauft werden könnten. Die Marketingabteilung hat der Geschäftsleitung empfohlen, die kumulierten Verkaufszahlen der ersten Zeit zu erfassen und auswerten zu lassen. Auf Basis dieser Analyse sollen geeignete Marketingmaßnahmen ergriffen werden. Die Zeit t wird in Zeiteinheiten (ZE) angegeben und die kumulierten Verkaufszahlen in ME.

a) In den ersten vier Zeiteinheiten haben sich folgende kumulierte Verkaufszahlen ergeben:

t in ZE	1	2	3	4
kumulierte Verkaufszahlen (ME)	59 000	103 100	142 800	178 560

Aus jahrelanger Erfahrung ist bekannt, dass sich die zukünftigen Verkaufszahlen bei neuen Spielen mit Hilfe des begrenzten Wachstums prognostizieren lassen.
Für das Spielzeug TOP-MEMO hat die Geschäftsleitung auf Grund der Lagerkapazitäten die Vorgabe gesetzt, dass die durchschnittliche Zunahmen der kumulierten Verkaufszahlen mindestens um jeweils 10 % je ZE sinken sollen.
Untersuchen Sie, ob in den ersten vier Zeiteinheiten tatsächlich ein begrenztes Wachstum zu verzeichnen war, bei dem die Vorgabe der Geschäftsleitung eingehalten wurde. Bestimmen Sie die voraussichtliche kumulierte Verkaufszahl in ME für die nächste ZE ($t = 5$). (8 BE)

b) Die kumulierten Verkaufszahlen der ersten Zeit $t \in [0; 4]$, die durch die Funktion f mit $f(t) = 500\,000 - 490\,000e^{-0{,}1054 \cdot t}$ modelliert werden, waren zu hoch; es kam zu Lieferengpässen. Die Werbemaßnahmen, die im Hörfunk und Fernsehen geschaltet wurden, werden deshalb abgesetzt. Damit erhofft sich die Geschäftsleitung, dass die kumulierten Verkaufszahlen langsamer ansteigen werden und so die Lieferengpässe beseitigt werden, ohne dass die Produktionskapazität ausgeweitet werden muss. In der Zeit nachdem Absetzen der Werbung $t \in (4; 7]$ wurden folgende kumulierte Verkaufszahlen erzielt:

t in ZE	5	6	7
kumulierte Verkaufszahlen (ME)	204 344	235 094	266 303

Die Modellierung für die Berechnung der zukünftigen Verkaufszahlen ($t > 7$) erfolgt nun durch die Funktion g mit $g(t) = \frac{500\,000}{1 + 5{,}5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}}$.

Fortsetzung Aufgabe 1B b)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Fortsetzung Aufgabe 1B b)

b) Der Assistent der Geschäftsleitung behauptet, wenn sich die kumulierten Verkaufszahlen tatsächlich gemäß g und nicht gemäß f entwickeln würden, dann würden die Lieferengpässe noch größer werden. Er bereitet eine Präsentation vor, die seine Meinung belegen soll und erstellt dafür Graphiken und Rechnungen.
Skizzieren Sie beide Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem für $t \in [0; 25]$.
Bestimmen Sie für die Präsentation die Schnittstellen der beiden Graphen und interpretieren Sie das Ergebnis.
Ermitteln Sie für beide Modellierungen den Zeitpunkt, an dem insgesamt 450 000 TOP-MEMO-Spiele verkauft sein werden und interpretieren Sie das Ergebnis für die Präsentation.
Ermitteln Sie für beide Modellierungen den Zeitpunkt der größten Zunahme der kumulierten Verkaufszahlen, sowie die Höhe der Zunahme zu diesem Zeitpunkt und interpretieren Sie die Ergebnisse für die Präsentation. (20 BE)

c) Die Entwicklungsabteilung analysiert den zuvor modellierten Produktlebenszyklus des Spielzeuges TOP-MEMO.
Der Produktionszyklus u wird durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades angenähert:
$u(t) = \frac{1}{1000} \cdot t^4 - \frac{1}{20} \cdot t^3 + \frac{5}{8} \cdot t^2$ mit t in Zeiteinheiten (ZE) und u(t) in 100 000 GE/ZE.
Die Entwicklung des Nachfolgemodells von TOP-MEMO erfolgt bei t = 8. Die Produktion des Nachfolgemodells dauert 1 ZE. Die Geschäftsleitung möchte das Nachfolgemodell von TOP-MEMO auf den Markt bringen, wenn der stärkste Umsatzrückgang im Produktlebenszyklus von TOP-MEMO auftreten wird; TOP-MEMO wird aber weiterhin verkauft.
Bestimmen Sie die Zeit, die der Entwicklungsabteilung für die Fertigstellung des Nachfolgespiels vom Zeitpunkt des Planungsbeginns an bleibt.
Die Entwicklungskosten werden u. a. aus 20 % des Gesamtumsatzes von TOP-MEMO gedeckt. Ermitteln Sie die Kapitalhöhe, die aus dem Verkauf von TOP-MEMO für die Entwicklung zur Verfügung stehen wird.
Geben Sie den Preis für TOP-MEMO unter der Voraussetzung an, dass alle 500 000 Spiele verkauft werden und der Preis konstant ist.
Geben Sie die Zeiteinheiten an, in der beide Spiele gleichzeitig auf dem Markt sein werden, damit die Werbemaßnahmen entsprechend geplant werden können.

Fortsetzung Aufgabe 1B c)

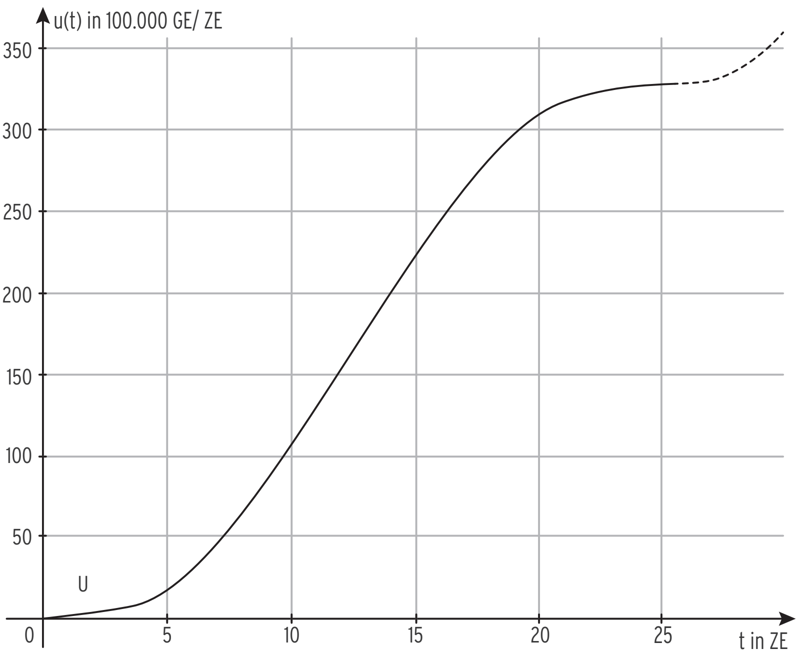
Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Fortsetzung Aufgabe 1B c)

c) Die Analyse muss für die Geschäftsleitung dokumentiert werden.
Zeichnen Sie den Graphen des Produktlebenszyklus in das Koordinatensystem im **Materialanhang** zu Aufgabe 1B c) und ergänzen Sie die Achsenbeschriftung für den vorhandenen Graphen.
Kennzeichnen Sie in der Graphik den Gesamtumsatz und die Zeitspanne, in der beide Spiele auf dem Markt sein werden.
Erläutern Sie vier Zusammenhänge der beiden Graphen, damit die Dokumentation vollständig und verständlich ist. (18 BE)

Material zu Aufgabe 1B c)



Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Aufgabe 2A

Das Unternehmen SPORTMaxe stellt unterschiedliche Produkte für den Fitnessbereich her. Zum Firmenjubiläum soll eine grundlegende Analyse der verschiedenen Produkte durchgeführt werden, um auf diese Weise ein modernes Produktsortiment zu erstellen und passende Werbekampagnen zu konzipieren.

a) Das Unternehmen SPORTMaxe hat zwei verschiedene Ribosepulver auf dem Markt. Die Kunden verwenden entweder Ribose pur oder Vanille Ribose.
Folgende Ergebnisse einer Kundenbefragung liegen vor:
45 % der Kunden kaufen Vanille Ribose, 40 % dieser Kunden sind Frauen.
16,5 % der Kunden sind männlich und kaufen Ribose pur.
Außerdem hat die erste Auswertung zu folgenden Angaben geführt:

	Frauen		Summe
		0,165	0,550
Summe			1

Die Entscheidungen bezüglich der Werbemaßnahmen sollen auf der Basis von unterschiedlichen graphischen Darstellungen und Rechnungen erfolgen. Ergänzen Sie die Tabelle im **Materialanhang** zu Aufgabe 2A a).

Erstellen Sie zusätzlich eine graphische Darstellung aller Umfrageergebnisse.

Sollte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ribosepulver-Kunde von SPORTMaxe männlich ist, mindestens 10 % höher sein, als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um einen weiblichen Kunden handelt, dann wird die Werbung hauptsächlich für die Zielgruppe Frauen ausgelegt.
Untersucht werden soll zudem der Kauf von Vanille Ribose unter der Voraussetzung, dass das Pulver von männlichen SPORTMaxe Kunden gekauft wird.
Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür geringer als 40 % ist, dann wird in erster Linie für Vanille Ribose geworben.
Untersuchen Sie die beiden Vorgaben und geben Sie jeweils eine Handlungsempfehlung ab. (10 BE)

b) Das Unternehmen SPORTMaxe stellt auch Gymnastikbänder in unterschiedlichen Farben und Stärken her. Jede Bandstärke wird durch eine andere Farbe repräsentiert. Die Sportvereine, als Käufer dieser Bänder, beschweren sich zunehmend darüber, dass die Bänder zerreißen. Deshalb wird überlegt, ein Rabattsystem einzuführen und/oder die Produktion zu ändern. Der Produktion werden zur Qualitätsprüfung Bänder entnommen.
Die Qualitätskontrolle hat folgende Fehlerwahrscheinlichkeiten ermittelt:
Gelbe Bänder: 3 % Blaue Bänder: 2,5 % Rote Bänder: 4 %

Fortsetzung Aufgabe 2A b)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Fortsetzung Aufgabe 2A b)

b) Das Rabattsystem umfasst folgende Regelungen:

- Wenn die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes gelbes Band in der Lieferung über 97% liegt, dann bekommt der Kunde keinen Rabatt, sondern die defekten Bänder ersetzt.
- Wenn die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein defektes blaues Band in der Lieferung größer als 7,5 % , dann muss die Produktionsanlage gewartet werden und wenn sie größer ist als 8 %, dann erhält der Kunde einen Rabatt.
- Wenn die Wahrscheinlichkeit für genau ein defektes rotes Band in der Lieferung größer ist als 25 %, dann bekommt der Kunde zusätzlich zum Ersatzband jeweils ein weiteres rotes Band geschenkt.

Ein Sportverein bestellt 40 Bänder in gelb, blau und rot im Verhältnis 2 : 5 : 3. Ermitteln Sie die Anzahl der insgesamt zu erwartenden Fehlprodukte für diese Lieferung. Prüfen Sie die drei Regelungen und geben Sie jeweils eine Handlungsempfehlung ab.

Das Unternehmen SPORTMaxe schafft für die Produktion der Bänder eine neue Maschine an, um die Beschwerden zu verringern. Die Geschäftsführung bittet den Produktionsleiter, die neue Maschine zu prüfen. Der Produktionsleiter führt 30 Stichproben über jeweils 100 gelbe Bänder durch. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Anzahl der Ausschussbänder je Stichprobe.

2	4	0	4	2	1	5	1	0	2	1	3	1	3	0
1	3	4	1	1	0	1	2	3	2	1	2	2	1	3

Tabelle: Anzahl der Ausschussbänder bei einer Produktion von je 100 gelben Bändern.

Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl der Ausschussbänder und vergleichen Sie diese mit der vorherigen Fehlerwahrscheinlichkeit.

Zeichnen Sie für den weiteren Vergleich der neuen mit der alten Maschine einen Boxplot in das Koordinatensystem im **Materialanhang** zu Aufgabe 2A b).

Vergleichen Sie die beiden Boxplots im Hinblick auf die Beschwerden der Kunden anhand von zwei Kriterien.

(14 BE)

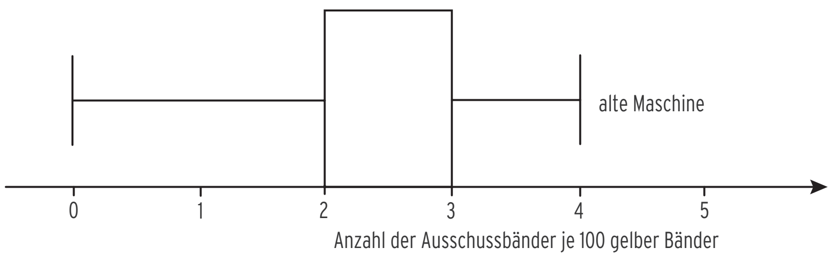
Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Materialanhang zu Aufgabe 2A a)

	Frauen		Summe
		0,165	0,550
Summe			1

Materialanhang zu Aufgabe 2A b)



Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS

Aufgabe 2B

Ein Busunternehmen aus Hannover setzt regelmäßig im fahrplanmäßigen Linienverkehr Fernbusse ein. Immer zum 01.07. wird ein neuer Fahrplan eingeführt.
Vorher werden in der Planungsabteilung durch den Fahrdienstleiter des Unternehmens Fahrzeiten evaluiert und analysiert.

a) Die Buslinie F20 fährt von Montag bis Freitag ohne Zwischenstopp von Hannover nach Celle. Aufgrund einer Baustelle muss eine Alternativroute gefahren werden.
Die auf der Strecke eingesetzten Busfahrer haben das Gefühl, die Strecke sei schneller zu befahren und schlagen vor, für den neuen Fahrplan die neue Routenführung zu nutzen. Das Busunternehmen wertet die Fahrzeiten der neuen Strecke einen Monat lang aus und erhält folgende Fahrzeiten in Minuten (min):

Fahrzeit in min	60	61	62	63	64	65	66
Anzahl in Tagen	1	1	7	6	1	1	3

Für den Streckenvergleich muss diese Tabelle ausgewertet werden:
Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\overline{x}_{neu}$ und die Standardabweichung der Fahrzeiten. Bei der alten Streckenführung erhielt der Fahrdienstleiter folgende Ergebnisse:
$\overline{x}_{alt} = 62$ min und $\sigma_{alt} = 7$ min.
Begründen Sie mit Hilfe der obigen Berechnungen, welche Route für das Busunternehmen besser geeignet ist. (6 BE)

b) Bei einer anderen Route fährt die Linie F30 direkt von Hamburg nach Flensburg. Anschließend fährt der Bus als Linie F40 von Flensburg nach Kiel. Die Fahrzeit von Hamburg nach Flensburg ist normalverteilt mit den Parametern $\mu = 3$ Stunden und $\sigma = 15$ min. Der Bus fährt von Hamburg um 10:15 Uhr los, die planmäßige Abfahrtszeit in Flensburg soll um 13:35 Uhr erfolgen. Für den Fahrerwechsel und das Ein- und Aussteigen werden 5 Minuten benötigt. Bei Unpünktlichkeit sinkt die Kundenzufriedenheit und es entstehen Schadenersatzansprüche. Bei mehr als 15 Minuten verzögerter Abfahrtszeit in Flensburg erstattet das Unternehmen die Hälfte des Fahrpreises. Durchschnittlich ist der Bus mit 40 Fahrgästen, die je 15 EUR für die Fahrt bezahlen, ausgelastet.
Das Unternehmen geht davon aus, dass Rückerstattungen in Höhe von höchstens 1 500 EUR pro Jahr anfallen werden. Der Bus verkehrt einmal pro Tag an 260 Tagen im Jahr.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus pünktlich in Flensburg losfährt.
Untersuchen Sie, ob die veranschlagte Höhe der Rückerstattungen ausreicht.
Da der Bus zu oft zu spät losgefahren ist, kommt es zu massiven Beschwerden der Kunden in Flensburg. Daraufhin soll der Fahrplan geändert werden, indem die Abfahrtszeit in Flensburg auf eine spätere Uhrzeit verlegt wird. Bestimmen Sie die Abfahrtszeit in Flensburg so, dass der Bus in 98 % aller Fälle pünktlich abfährt. (18 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS

Aufgabe 3A

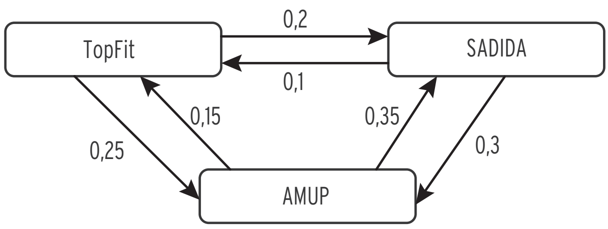
Das Unternehmen TopFit stellt in drei Abteilungen Sportbekleidung her. Diese drei Abteilungen sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Der Zusammenhang geht aus der folgenden Matrix und dem angegebenen Vektor hervor:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} & \frac{665}{552} & \frac{361}{276} \\ \frac{4}{9} & \frac{406}{207} & \frac{220}{207} \\ \frac{1}{2} & \frac{95}{92} & \frac{91}{46} \end{pmatrix}; \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Die Elemente des Vektors entsprechen Geldeinheiten (GE).

a) Für das nächste Quartal sind aufwendige Modernisierungsmaßnahmen in der Abteilung 3 geplant. Aus diesem Grund kann die Abteilung nur noch zweidrittel ihrer bisherigen Gesamtproduktion herstellen. Die Geschäftsführung erbittet die Untersuchung der Auswirkung dieser Maßnahmen und benötigt dafür eine Präsentation mit folgenden Inhalten:
Erstellen Sie die Input-Output-Tabelle, die vor den Modernisierungsmaßnahmen gilt.
Bestimmen Sie, wie viele Güter und Dienstleistungen in GE Abteilung 1 und 2 herstellen müssten, wenn auch während der Modernisierungsmaßnahmen eine Marktabgabe im Verhältnis 2 : 2 : 3 gewährleistet werden soll.
Untersuchen Sie, ob die Einschränkung für Abteilung 3 dazu führt, dass die Marktabgaben der drei Abteilungen jeweils sinken.
Geben Sie an, um wie viel Prozent sich die Summe der Marktabgaben verändert.
(14 BE)

b) Nach den Modernisierungsmaßnahmen sollen neue Werbekampagnen geschaltet werden; dafür wurde eine Marktforschung durchgeführt. Diese hat ergeben, dass der aktuelle Marktanteil von TopFit bei 20 % liegt, SADIDAund AMUP teilen sich hälftig den verbleibenden Marktanteil.
Die folgende Graphik veranschaulicht die Kundenwanderung:



Fortsetzung Aufgabe 3A b)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS
Fortsetzung Aufgabe 3A b)

b) • Wenn der Marktanteil in der nächsten Periode t = 1 voraussichtlich auf mehr als 22 % steigt, dann soll nur Werbung in Zeitschriften geschaltet werden.

• Wenn der Marktanteil in der übernächsten Periode t = 2 voraussichtlich unter 23 % liegt, dann soll ein Kino-Spot in der Periode geschaltet werden.

• Wenn der Marktanteil langfristig voraussichtlich unter 25 % bleibt, dann sollen Modenschauen in Shopping-Centern mithilfe von Sportvereinen organisiert werden.

• Wenn die Steigerung des Marktanteils von der Vorperiode bis zur nächsten Periode konstant bleibt, dann soll die Werbeagentur nicht gewechselt werden.

Untersuchen Sie, welche Werbemaßnahmen umgesetzt werden sollten, und ob die Werbeagentur weitere Aufträge erhält. (10 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS
Aufgabe 3B


Abb. 1: Fidget Spinner

Ein Spielzeughersteller produziert Fidget Spinner. Die hochwertigen Plastikrahmen der Fidget Spinner werden in drei Stufen gefertigt.
In der ersten Stufe werden aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 gefertigt.
In der zweiten Stufe werden aus diesen Zwischenprodukten die beiden Plastikrahmen P_1 und P_2 gegossen.
Anschließend wird jede Mengeneinheit (ME) der Plastikrahme mit vier ME Kugellagern bestückt. Die nachfolgenden Tabellen geben die benötigten ME zur Herstellung jeweils einer ME Plastikrahmen an.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	2	2
R_2	3	2	1
R_3	0	4	5

	P_1	P_2
R_1	8	6
R_2	8	7
R_3	13	5

a) Die technische Dokumentation und einige wirtschaftliche Kalkulationen für die Plastikrahmen sind zu erstellen. Sie bekommen von dem Qualitätsbeauftragten folgende Aufgaben:

Fortsetzung Aufgabe 3B a)

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS
Aufgabe 3B Fortsetzung

a) Zeichnen Sie für den Produktionsprozess der Plastikrahmen das zugehörige Verflechtungsdiagramm. Erläutern Sie mithilfe eines Beispiels die Berechnung eines Elements der Rohstoff-End-produktmatrix C_{RP} und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Die aktuellen Rohstoffpreise betragen 0,12 EUR je ME von R_1, 0,09 EUR je ME von R_2 und 0,10 EUR je ME von R_3. In der Kalkulation sollen die Materialkosten für die Produktion je einer ME von P_1 und P_2 ausgewiesen werden.
Berechnen Sie diese Materialkosten.
Der Mindestbestand an Zwischenprodukten ist mit 3 000 ME je Zwischenprodukt und der Mindestbestand an Plastikrahmen ist mit je 1 000 ME angegeben.
Ermitteln Sie die Kapitalbindung der für den Mindestbestand benötigten Rohstoffmengen.

(12 BE)

b) Die Rohstoffkosten von P_1 dürfen laut Kalkulation 3,14 EUR, die von P_2 1,96 EUR nicht übersteigen. Der Rohstoffpreis von R_1 unterliegt starken Schwankungen und steigt auf 0,15 EUR je ME. Ermitteln Sie die Preise für die Rohstoffe R_2 und R_3, die unter diesen Bedingungen beim Einkauf nicht überschritten werden dürfen.

Ein Auftrag über 10 000 ME Fidget Spinner der Art P_1 und 7 500 ME Fidget Spinner der Art P_2 erbringt einen Gewinn von 15 000 EUR. Die Kugellager werden für 0,24 EUR je ME von einem Zulieferer bezogen.
Die Fertigungskosten der Zwischenprodukte je einer ME des Endproduktes für die jeweilige Verarbeitungsstufe belaufen sich auf: $\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZP} = (1{,}02 \quad 0{,}62)$.
Die Fertigungskosten für eine ME der Endprodukte belaufen sich auf: $\vec{k}_E^T = (0{,}25 \quad 0{,}22)$.
Das Unternehmen kalkuliert mit den maximal möglichen Rohstoffpreisen.

Die Kosten für den Einbau der vier ME Kugellager werden mit 1,20 EUR je ME Plastikrahmen angegeben. Das Unternehmen möchte für diesen Auftrag eine Wirtschaftlichkeit von $W = \frac{E}{K} = \frac{8}{7}$ realisieren.

Berechnen Sie die Höhe der Fixkosten, die in diesem Fall nicht überschritten werden dürfen und die Höhe des Erlöses.

(12 BE)

Lösungen Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Pflichtteil eA

Aufgabe P1

a) Linearfaktordarstellung (Nullstellenansatz): $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Mit den Nullstellen (abgelesen): $x_1 = 1$; $x_2 = 5$

Punktprobe mit S(3 | 2): $2 = a \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 5) \Rightarrow a = -0{,}5$

Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5(x - 1) \cdot (x - 5)$

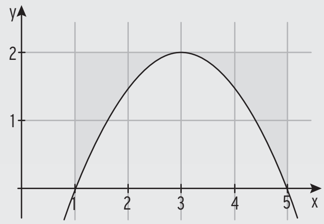
Hinweis: Ansatz mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und Einsetzen von 3 Punkten (1 | 0); (5| 0),(3| 2) führt über ein LGS auf $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

Ansatz mit $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ und Einsetzen von Scheitelpunkt S(3| 2) und P(1 | 0) führt auf $f(x) = -0{,}5(x - 3)^2 + 2$

b) Der erste Term beschreibt die durchschnittliche Steigung des Graphen von f im Intervall [1; 3] (Sekantensteigung).

Der zweite Term beschreibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle 4 (Tangentensteigung).

c) Einzeichnen eines möglichen Flächenstücks.



Aufgabe P2

a) Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$ auflösen nach x: $e^{a \cdot x} = 2$

Logarithmieren $a \cdot x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{a}$

b) Ableitung von f_a mit der Kettenregel: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot a = e^{a \cdot x}$

Vertikaler Abstand in x = 0: $f_a(0) - f_a'(0) = \frac{1}{a} - 1$ $(e^{a \cdot 0} = 1)$

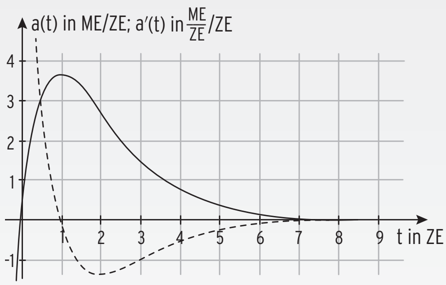
Ungleichung für a: $\frac{1}{a} - 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq 4 \quad | \cdot a$

$4a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$ $(0 < a < 1)$

Für $0 < a \leq \frac{1}{4}$ beträgt der gesuchte vertikale Abstand mindestens 3.

Aufgabe P3

a) Ableitungsgraphen skizzieren



b) Größter Absatz pro ZE (größter momentaner Absatz):

$a'(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10t \cdot e^{-t} \cdot (-1)$

$a'(t) = (10 - 10t) \cdot e^{-t}$

Bed.: $a'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 10t = 0$

wegen $e^{-t} > 0$: $t = 1$

Zum Zeitpunkt 1 ZE wird der größte momentane Absatz erzielt.

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Lösungen Pflichtteil eA

Aufgabe P4

a) Die Gleichung D = A · B · C mit den entsprechenden Matrizenformaten:

$D_{(3;\,4)} = A_{(3;\,7)} \cdot B_{(7;\,2)} \cdot C_{(x;\,y)}$

x gibt hierbei die Zeilenanzahl, y die Spaltenanzahl der Matrix C an.

Da die Spaltenanzahl der Matrix B mit der Zeilenanzahl der Matrix C übereinstimmen muss, gilt x = 2. Die Spaltenanzahl der Matrix D muss der Spaltenanzahl der Matrix C entsprechen. Somit gilt y = 4.

Ingesamt hat C also das Format 2×4.

b) $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Wegen Z = X · Y muss dies Z entsprechen:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

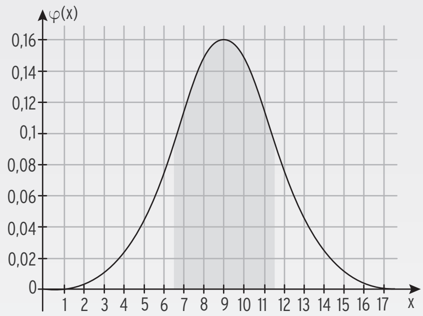
Aus $4 = b^2$ erhält man $b_{1|2} = \pm 2$; aus 11 = 10 + c erhält man c = 1;

Mit c = 1 erhält man aus $12 = 9 + 2a \cdot (a-1) + 3 \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; 0 = 2a \cdot (a-1)$

und dem Satz vom Nullprodukt: $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Man erhält die Lösungen: (0; – 2 ; 1); (1; – 2 ; 1); (0; 2 ; 1) und (1; 2 ; 1) und somit also 4 Lösungen.

Aufgabe P5



a) Der Erwartungswert ist $\mu_X = 9$.

($\varphi(x)$ ist maximal in x = 9)

b) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A entspricht der Wahrscheinlichkeit einer $1{\cdot}\sigma_X$-Umgebung um $\mu_X = 9$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B entspricht der Wahrscheinlichkeit einer $2{\cdot}\sigma_Y$-Umgebung um $\mu_Y = 7$.

Somit gilt P(A) < P(B).

Hinweis: $P(A) = P(6{,}5 \le X \le 11{,}5) = P(\mu_X - \sigma_X \le X \le \mu_X + \sigma_X) \approx 68\ \%$

$P(B) = P(4{,}5 \le Y \le 9{,}5) = P(\mu_Y - 2{\cdot}\sigma_Y \le Y \le \mu_Y + 2{\cdot}\sigma_Y) \approx 95{,}5\ \%$

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS
Lösungen Wahlteil Aufgabe 1A Seite 1/3

a) Erlösfunktion E mit $E(x) = p(x) \cdot x = (-70x + 7000) \cdot x = -70x^2 + 7000x$

Gewinnfunktion: $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (da die Gesamtkosten ertragsgesetzlich sind)

Grenzgewinn $G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Fixkosten: 40000 GE: $G(0) = -40000$ $\quad d = -40000$ (1)

$G'(40) = 1300$ $\quad 3a \cdot 40^2 + 2b \cdot 40 + c = 1300$ (2)

Gewinn $G(10) = 3500$ $\quad a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = 3500$ (3)

Gewinngrenze: $G(80) = 0$ $\quad a \cdot 80^3 + b \cdot 80^2 + c \cdot 80 + d = 0$ (4)

Das LGS aus den Gleichungen (1) bis (4)

hat die Lösung (GTR/CAS): $\quad a = -0{,}5;\ b = -10;\ c = 4500;\ d = -40000$

Bedingungsmatrix

für a, b und c (d eingesetzt):

Lösen mit GTR: rref($\left(\begin{array}{ccc|c} 4800 & 80 & 1 & 1300 \\ 1000 & 100 & 10 & 43500 \\ 512000 & 6400 & 80 & 40000 \end{array}\right)$

Gewinnfunktion G mit $\quad G(x) = -0{,}5x^3 - 10x^2 + 4500x - 40000$

Gesamtkostenfunktion K mit $\quad K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 2500x + 40000$

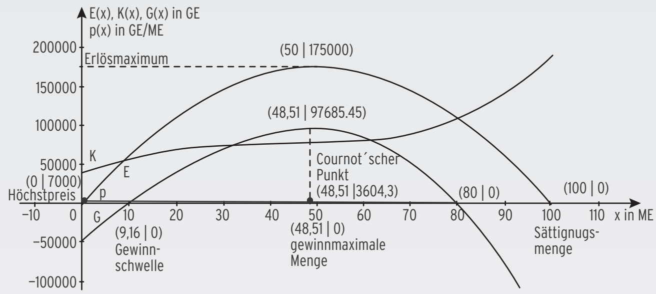
Höchstpreis in GE/ME:

$p(0) = 7000$

Sättigungsmenge in ME:

$p(x) = 0$ für $x = 100$

$D_{ök} = [0; 100]$



Erlösmaximum in GE:

$E'(x) = 0$ und $E''(x) < 0$ für $x = 50$

$E(50) = E_{max} = 175000$

Gewinnschwelle in ME: $G(x) = 0$ für $x = 9{,}16$

Gewinnmaximale Menge in ME: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$ für $x = 48{,}51$

Cournot'scher Punkt C (C liegt auf dem Graphen der Preis-Absatzfunktion p)

$p(48{,}51) = 3604{,}30$

Cournot'scher Punkt $C(48{,}51 \mid 3604{,}30)$

Der Cournot'sche Punkt gibt den gewinnmaximalen Preis in Höhe von 3604,30 GE/ME an, dieser führt bei Fertigung und Verkauf von 48,51 ME zum maximalen Gewinn.

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA

Lösungen Seite 267/268

Aufgabe P1

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen

f_k mit $f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der Ordinatenachse ist. [1 BE]

b) Es gibt einen Wert von k, für den 1 eine Wendestelle von f_k ist.

Berechnen Sie diesen Wert von k. [4 BE]

Aufgabe P2

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

f_k mit $f_k(x) = k \cdot e^{-x} + 3$ und $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f'_k(0) = -k$ gilt. [1 BE]

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die die Tangente im Punkt $(0 \mid f_k(0))$ an den Graphen von f_k eine positive Steigung hat und ihre Schnittstelle mit der Abszissenachse größer als $\frac{1}{2}$ ist. [4 BE]

Aufgabe P3

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsgröße A.

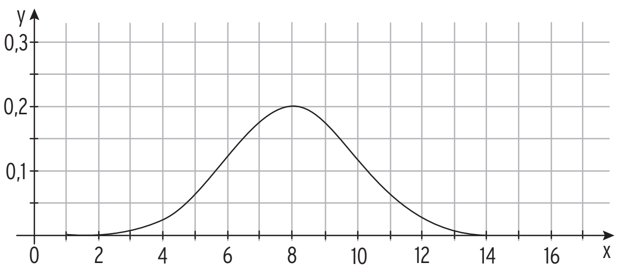


Abbildung 1

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert aus dem Intervall [6; 10] annimmt, beträgt etwa 68%.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert annimmt, der größer als 10 ist. [2 BE]

b) Die Zufallsgröße B ist ebenfalls normalverteilt; der Erwartungswert von B ist ebenso groß wie der Erwartungswert von A, die Standardabweichung von B ist größer als die Standardabweichung von A.

Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion von B. [3 BE]

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA .

Aufgabe P4

Im Rahmen einer Qualitätskontrolle wurden Spargelstangen geprüft, ob diese zerbrochen sind. Erfahrungsgemäß entspricht jede zehnte Stange nicht den Qualitätsanforderungen.

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Wahrscheinlichkeit algebraisch berechnet werden kann, dass sich in einem Korb mit 20 Spargelstangen mehr als zwei zerbrochene Spargelstangen befinden. [3 BE]

b) Zu Werbezwecken werden je drei Stangen in Probepackungen verpackt. Hier darf keine zerbrochen sein.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Probepackungen nicht ausgeliefert werden können. [2 BE]

Aufgabe P5

Das Unternehmen *Blühfreude* stellt verschiedene Dünger her. Im Rahmen des Produktionsprozesses werden aus drei Rohstoffen (R), drei Zwischenprodukte (Z) und dann vier Endprodukte (E) hergestellt. Nur die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C_{RE} ist bekannt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie den prinzipiell zugrundeliegenden Produktionsprozess grafisch dar.
Geben Sie das Format der zugrundeliegenden Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} an. [2 BE]

b) In der Produktionsabteilung sollen von Dünger E_1 und von E_3 je 20 Mengeneinheiten (ME) hergestellt werden sowie je 10 ME von E_2 und E_4.
Berechnen Sie die benötigten Rohstoffmengen, die aus dem Lager für diese Produktion beschafft werden müssen. [3 BE]

Aufgabe P6

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Für jeden Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ mit $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ gilt $M^2 \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$, wobei a eine reelle Zahl ist.
Ermitteln Sie den Wert von a. [2 BE]

b) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, für die $M \cdot \vec{v} = 2 \cdot \vec{v}$ gilt. [3 BE]

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Lösungen Seite 269 - 287

Aufgabe 1A

Das Unternehmen *Ciel AG* stellt Klima- und Filteranlagen her und verkauft diese an Unternehmen sowie an Privatpersonen.

a) Mit der Klima-Filter-Anlage KliHePa15 der Güteklasse 15 hat die *Ciel AG* eine Weltneuheit auf den Markt gebracht. Bei einem einzigen Durchgang der Luft durch den sogenannten Hepa-Filter werden 99,998 Prozent der Schwebstoffe in der Luft gebunden, womit diese Anlage die EU-Norm DIN EN 1822 mehr als erfüllt.

Die Preisgestaltung für diese Anlage basiert auf Erkenntnissen vorheriger Modelle.

Die Controlling-Abteilung der *Ciel AG* modelliert auf dieser Basis die Preis-Absatz-Funktion p mit $p(x) = -7{,}4x + 44{,}4$ und kalkuliert die variablen Stückkosten k_V mit $k_V(x) = x^2 - 8x + 22$; x wird in Mengeneinheiten (ME) und $p(x)$, $k_V(x)$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Die Mitarbeitenden der Controlling-Abteilung haben im Zuge der Preisgestaltung folgende Grafik (vgl. Abb. 1) begonnen:

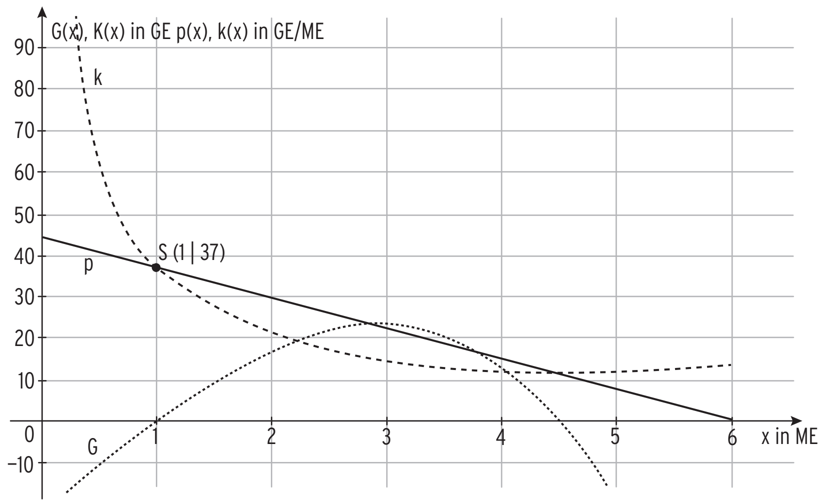


Abbildung 1: Preisgestaltung für die Klima-Filter-Anlage KliHePa 15

Fortsetzung Aufgabe 1A a)

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS Lösungen Seite 264 - 272

Aufgabe 1A Fortsetzung

Aus weiteren Analysen müssen noch zusätzliche Erkenntnisse für die Preisgestaltung gewonnen werden:
Zeichnen Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion K im ökonomischen Definitionsbereich in das Koordinatensystem im **Materialanhang M1** (Abb. 2).
Kennzeichnen Sie unter Angabe der exakten Werte
- den Höchstpreis und die Sättigungsmenge
- den Gewinnbereich und den Cournot'schen Punkt.

Der Abteilungsleiter der Controlling-Abteilung vermutet nach eingehender Betrachtung der Abbildung 1, dass die Nullstellen des Graphen der Gewinnfunktion identisch sind mit den Schnittstellen der Graphen von p und K. Er möchte für zukünftige Analysen wissen, ob dies allgemeingültig ist.
Untersuchen Sie die Vermutung des Abteilungsleiters auf Allgemeingültigkeit.

[23 BE]

b) Die *Ciel AG* vermarktet auch Klimageräte der Güteklasse 14. Bei diesen Geräten steht die *Ciel AG* in Konkurrenz zu anderen Anbietern. Die Mitarbeitenden der Controlling-Abteilung erstellen für diesen polypolistischen Markt regelmäßig einen Report für die Geschäftsführung auf Basis der Gesamtkostenfunktion. Die ertragsgesetzliche Gesamtkostenfunktionenschar K_a lautet:
$K_a(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + (22 + a)x + 17$, mit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, x in ME und $K_a(x)$ in GE.
Der Scharparameter a entspricht einem Zuschlag auf die variablen Gesamtkosten.
Ist a = 0 wird kein Kostenzuschlag erhoben.
Ermitteln Sie für diesen Report den Preis, zu dem die *Ciel AG* das Klimagerät KliHePa14 mindestens anbieten muss, wenn kein Kostenzuschlag erhoben wird und alle Kosten gedeckt sein sollen.
Zurzeit wird das Klimagerät KliHePa14 für 18 GE/ME verkauft. Die *Ciel AG* hat aufgrund der Produktionsgegebenheiten eine Kapazitätsgrenze von 4 ME. Zukünftig möchte die Controlling-Abteilung den Wert für a so wählen, dass die Gewinnschwelle und der größte Gewinnzuwachs bei derselben zu verkaufenden Menge liegen.
Berechnen Sie für den Report die Höhe des dann zu erwartenden Gewinnes.

[17 BE]

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS

Materialanhang M1

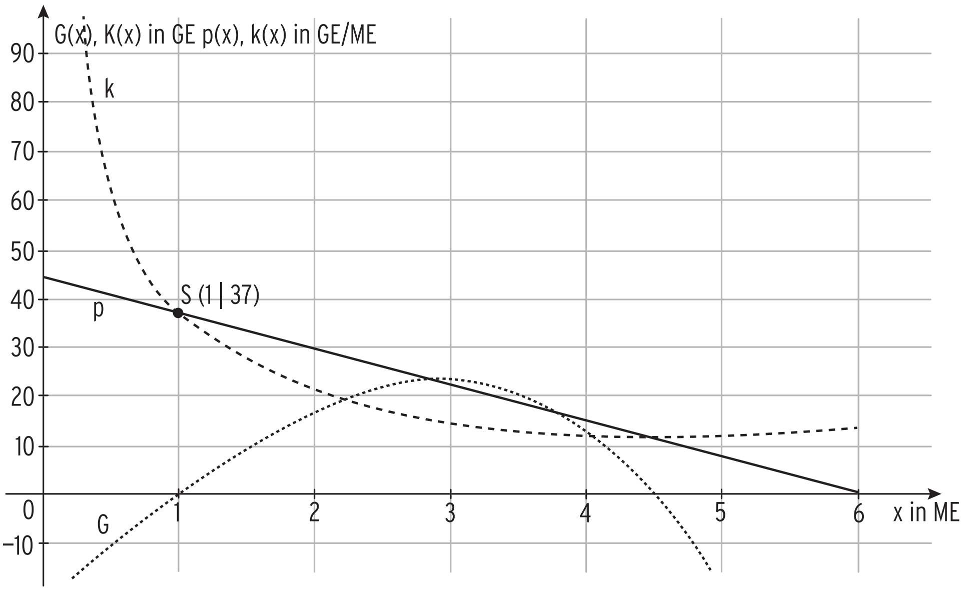


Abbildung 2: Preisgestaltung für die Klima-Filter-Anlage KliHePa 15

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Aufgabe 1B

Im Alten Land auf dem *Obsthof Kernig* erfolgt die Kirschernte per Hand und mithilfe von Maschinen. Die Geschäftsführung geht davon aus, dass die Erntemenge größer sein wird als im letzten Jahr. Abbildung 1 zeigt die Isoquante für die diesjährige Ernte aller Sauerkirschen. Die Geschäftsführung plant damit, dass für die diesjährige Ernte mehr als zwei Mengeneinheiten (ME) Kapital benötigt werden. Eine ME Kapital kostet 60 Geldeinheiten (GE), genau wie im letzten Jahr. Der Preis für eine ME Arbeit hat sich vom letzten Jahr zu diesem Jahr verändert.

In Abbildung 1 veranschaulicht die Isokostengerade 1 die Zusammenhänge für die diesjährige Ernte, die Isokostengerade 2 die Zusammenhänge der Ernte im letzten Jahr.

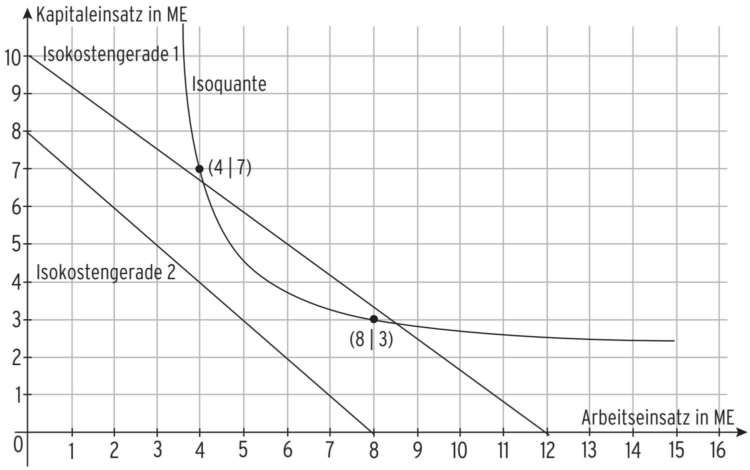


Abbildung 1: Planung für die diesjährige Ernte der Sauerkirschen.

a) Für die weitere Planung der diesjährigen Ernte der Sauerkirschen benötigt die Geschäftsführung des *Obsthofes Kernig* weitere Zahlen, Daten und Fakten:
Bestimmen Sie die prozentuale Preisänderung für eine ME Arbeit und die prozentuale Änderung des Kostenbudgets von der letzten zur diesjährigen Ernte.
Berechnen Sie die möglichen Kombinationen der Produktionsfaktoren für die diesjährige Ernte unter der Voraussetzung, dass das geplante Kostenbudget vollständig ausgenutzt wird, und geben Sie die Kombinationen an. [23 BE]

Fortsetzung Aufgabe 1 B

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Aufgabe 1 B Fortsetzung

b) Der langanhaltende Nachtfrost während der Blütephase der Kirschen führt dazu, dass die Erntemenge nicht größer sein wird als im Vorjahr. Deshalb erfolgen alle weiteren rechnerischen und grafischen Untersuchungen mit der Isoquante I_{alt}

mit $I_{alt}(x) = \frac{4}{x-3} + 1$

aus dem letzten Jahr und dem neuen Preis für eine ME Arbeit in Höhe von 50 GE.

Die Geschäftsführung möchte das Kostenbudget mithilfe der Minimalkostenkombination (MKK) optimieren. Im letzten Jahr lag die MKK bei (5| 3).

Untersuchen Sie die Veränderung der MKK im Vergleich zur Ernte im letzten Jahr. Ermitteln Sie das notwendige Kostenbudget für die Umsetzung der MKK in diesem Jahr.

Um auf alle Eventualitäten vorbereitet zu sein, benötigt die Geschäftsführung Angaben über die Grenzrate der Substitution.

Bestimmen Sie für die diesjährige Ernte die Grenzrate der Substitution für die MKK und interpretieren Sie das Ergebnis für die Geschäftsführung.

Zeichnen Sie zur Visualisierung der Untersuchungen die Isoquante und die Isokostengerade in ein geeignetes Koordinatensystem und ergänzen Sie die Zeichnung um die Polgerade und die Asymptote der Isoquante.

Erläutern Sie der Geschäftsführung die Bedeutung des Pols und der Asymptote für die Ernte der Sauerkirschen in diesem Jahr und vergleichen Sie Ihre Erläuterungen mit der Planungsgrundlage der Geschäftsführung. [17 BE]

Zentralabitur 2022 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS
Aufgabe 1C

Im Ausdauersport werden zur Trainingssteuerung u. a. Laktat-Tests verwendet. Hierbei wird z. B. die Laufgeschwindigkeit v für eine Sportlerin / einen Sportler auf einem Laufband schrittweise erhöht und dann der Laktatgehalt f(v) im Blut gemessen.
Anschließend wird mithilfe der Messwerte eine Funktion modelliert, die als Basis für die Berechnung der individuellen Belastungsgrenze (anaerobe Schwelle v_{AS}) dient.
Ein Sportmediziner möchte künftig diese Berechnungen anbieten und führt deshalb probeweise Messungen an einem Sportler durch, bei dem dabei die folgenden Ergebnisse (vgl. Tab. 1) ermittelt wurden:

		Test-anfang					Test-ende
v in $\frac{\text{Kilometer}}{\text{Stunde}}$ $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	0	8	10	12	14	16	18
$f(v)$ in $\frac{\text{MilliMol}}{\text{Liter}}$ $\left(\frac{\text{mmol}}{\text{l}}\right)$	1	1,3	1,2	1,3	2,1	4,2	8,2

Tabelle 1: Testergebnisse

a) Übertragen Sie alle Datenpaare aus Tabelle 1 in das Kodinatensystem im **Materialanhang M1** (Abb. 2). Beschreiben Sie drei Auffälligkeiten zwischen dem abgebildeten Graphen und den Datenpaaren.
Der Sportmediziner vermutet, dass der oben beschriebene Zusammenhang mithilfe der Funktion f mit $f(v) = 0{,}00044(v - 11)^2 \cdot e^{0{,}5v+1} + 0{,}9$
modelliert werden kann. Um die Eignung der Modellierung zu evaluieren, müssen verschiedene Kriterien untersucht werden:
Der Wert für die Zunahme des Laktatgehaltes sollte am Ende des Tests nicht größer als 6 sein, damit die Modellierung sinnvoll ist. Außerdem sollte der kleinste Wert des Laktatgehaltes nicht geringer sein als der bei einer Geschwindigkeit von $0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Des Weiteren sollte der stärkste Rückgang bei einer Geschwindigkeit von weniger als $9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eintreten. Die Funktion ist zur Modellierung nur dann geeignet, wenn mindestens eins der drei Kriterien erfüllt ist.
Prüfen Sie die Eignung der Funktion f zur Modellierung der Entwicklung des Laktatgehaltes im Blut.
Beschreiben Sie die Entwicklung des Laktatgehaltes anhand des Verlaufes des Graphen der Funktion f bis zu einer Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ unter Angabe der Koordinaten von vier markanten Punkten (vgl. Abb. 1). [20 BE]

Fortsetzung Aufgabe 1C a)