

Mathe Medien

Ulrich Paasch

MatheMedien

Fachbezogene Mathematik

Mediengestaltung

Medientechnologie Druck

Fotografie

Achte Auflage

Website des Autors:
www.mathemedien.de

Achte Auflage, 2023

© 2023 Ulrich Paasch

ISBN Softcover: 978-3-347-88022-1

ISBN Hardcover: 978-3-347-88028-3

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, An der Strusbek 10, 22926 Ahrensburg, Germany

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt.
Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich.
Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig.

Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors,
zu erreichen unter: tredition GmbH, Abteilung „Impressumservice“,
An der Strusbek 10, 22926 Ahrensburg, Deutschland

 **tredition**

Zu diesem Buch

MatheMedien wurde nicht für Mathe-Genies geschrieben. In diesem Buch geht es nicht um höhere Mathematik, sondern um fachkundliche Fragestellungen, die sich mithilfe von elementaren, vergleichsweise einfachen mathematischen Methoden beantworten lassen.

Wo immer es möglich und sinnvoll ist, werden Beispiele in kurzen, möglichst einfachen Schritten erklärt und durchgerechnet. Für alle, die lieber mit Formeln arbeiten, folgt die mathematisch formalisierte Darstellung als Zugabe.

Mein Tipp: Versuchen Sie bitte nicht, möglichst viele Formeln auswendig zu lernen. Wird irgendwann eine bestimmte Formel gebraucht, haben Sie gerade diese möglicherweise nicht mehr im Kopf. Wenn Sie die fachlichen Zusammenhänge verstanden haben, können Sie die Lösungswege in den meisten Fällen auch ohne Formeln selbst entwickeln.

Beim Bearbeiten der Übungsaufgaben kann durchweg auf die in den Beispielen erläuterten Lösungswege zurückgegriffen werden. Das gilt allerdings nicht für Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad: Dort ist die Fertigkeit gefragt, Lösungswege mithilfe der Erläuterungen im jeweiligen Abschnitt selbst zu erarbeiten. Lösungen der Übungsaufgaben stehen in meiner Webpräsenz www.mathemedien.de zum Download bereit.

Fachbezogene Mathematik ist kein Selbstzweck. Die Sachgebiete und Aufgabenstellungen in diesem Buch haben teils unmittelbaren Bezug zur beruflichen Praxis. Andere zielen auf das Verstehen von technischen, physikalischen oder wirtschaftlichen Zusammenhängen, also berufliches Hintergrundwissen.

Es gibt keinen Grund, *MatheMedien* von vorn bis hinten durchzuarbeiten. Suchen Sie sich die benötigten Abschnitte heraus – Inhaltsverzeichnis und Register helfen beim Finden. Falls Sie beim Durcharbeiten eines Abschnitts feststellen, dass Ihnen mathematisches Grundlagenwissen fehlt, schlagen Sie bitte im ersten Kapitel nach.

Inhalt

1	Mathematische Grundlagen	15
1.1	Grundrechenarten	15
1.1.1	Terminologie	15
1.1.2	Kommutativ- und Assoziativgesetze	15
1.1.3	Rangfolge der Rechenarten, Klammern	16
1.1.4	Positive und negative Zahlen	17
1.1.5	Die Zahl Null	18
1.1.6	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.1	18
1.2	Gebrochene Zahlen	19
1.2.1	Gemeine Brüche	19
1.2.2	Grundrechenarten mit gemeinen Brüchen	19
1.2.3	Kürzen von gemeinen Brüchen	20
1.2.4	Dezimalbrüche	21
1.2.5	Umwandlung gemein–dezimal	21
1.2.6	Runden von Dezimalbrüchen	21
1.2.7	Division mit Rest und Modulo	23
1.2.8	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.2	25
1.3	Höhere Rechenarten	26
1.3.1	Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	26
1.3.2	Wurzeln	27
1.3.3	Potenzen mit gebrochenen Exponenten	28
1.3.4	Logarithmen	29
1.3.5	Exkurs: Dekadische Logarithmen im Kopf	30
1.3.6	Rangfolge der Rechenarten	31
1.3.7	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.3	31
1.4	Zahlen und Zahlensysteme	32
1.4.1	Natürliche, ganze, rationale und irrationale Zahlen	32
1.4.2	Zahlensysteme: dezimal, binär, hexadezimal	33
1.4.3	Umwandlung binär–dezimal	35
1.4.4	Umwandlung hexadezimal–dezimal	36
1.4.5	Umwandlung binär–hexadezimal	36
1.4.6	Römische Zahlen	37
1.4.7	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.4	38
1.5	Größen und Einheiten	39
1.5.1	Rechnen mit Größenwerten	39
1.5.2	SI-Basiseinheiten und abgeleitete Einheiten	41
1.5.3	Vielfache und Bruchteile von Einheiten	42
1.5.4	Metrische Längen-, Flächen- und Volumeneinheiten	43

1.5.5	Nichtmetrische Längeneinheiten	44
1.5.6	Zeiteinheiten	44
1.5.7	Frequenz, Drehzahl, Ortsfrequenz	45
1.5.8	Bits und Bytes	46
1.5.9	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.5	47
1.6	Variable, Gleichungen, Funktionen	48
1.6.1	Rechnen mit Variablen	48
1.6.2	Lösung von linearen Gleichungen	50
1.6.3	Lösung von quadratischen Gleichungen	51
1.6.4	Umformulieren von Gleichungen mit Variablen	53
1.6.5	Funktionen, Koordinatensystem	54
1.6.6	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.6	56
1.7	Verhältnisgleichung (Dreisatz) und Prozentrechnen	57
1.7.1	Verhältnisgleichungen	57
1.7.2	Schematische Dreisatzrechnung	58
1.7.3	Prozentrechnen	59
1.7.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.7	61
1.8	Geometrie	63
1.8.1	Flächen- und Volumenberechnungen	63
1.8.2	Ebene geometrische Körper: Fläche und Umfang	63
1.8.3	Räumliche geometrische Körper: Volumen und Oberfläche	64
1.8.4	Satz des Pythagoras	65
1.8.5	Ebene Winkel	66
1.8.6	Winkelfunktionen	67
1.8.7	Raumwinkel	71
1.8.8	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.8	72
1.9	Mittelwerte	73
1.9.1	Arithmetisches Mittel	73
1.9.2	Geometrisches Mittel	74
1.9.3	Zentralwert	75
1.9.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.9	76
2	Typografie und Layout	77
2.1	Typografische Längeneinheiten	77
2.1.1	PostScript, Pica und Didot	77
2.1.2	Umwandlung Point–Pica	78
2.1.3	Umwandlung PostScript-Point–Millimeter	78
2.1.4	Geviert	79
2.1.5	Pixel und Längeneinheiten in Cascading Style Sheets (CSS)	80
2.1.6	Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.1	81
2.2	Größe und vertikaler Raumbedarf der Schrift	82

2.2.1	Schriftgröße und Zeilenabstand	82
2.2.2	Satzspiegelhöhe	83
2.2.3	Zeilen und ZAB bei vorgegebener Satzspiegelhöhe	84
2.2.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.2	86
2.3	Seiten- und Teilungsverhältnisse	87
2.3.1	Angabe von Format, Seiten- und Teilungsverhältnissen	87
2.3.2	Rechnen mit Seitenverhältnissen	87
2.3.3	Rechnen mit Teilungsverhältnissen	89
2.3.4	Goldener Schnitt	91
2.3.5	Seitenverhältnis der Normformate	92
2.3.6	Ermittlung von Seiten- und Teilungsverhältnissen	92
2.3.7	Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.3	94
2.4	Satzspiegel, Ränder und Spalten	96
2.4.1	Ränder bei vorgegebenem Satzspiegel	96
2.4.2	Satzspiegel und Ränder nach Teilungsmethode	97
2.4.3	Seitenformat, Satzspiegel und Ränder nach goldenem Schnitt	98
2.4.4	Spalten	98
2.4.5	Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.4	99
2.5	Manuskript- und Satzumfang	100
2.5.1	Manuskriptumfang	100
2.5.2	Satzumfang	101
2.5.3	Umfang bei mehrspaltigem Satz	102
2.5.4	Satzumfang bei Veränderung des Umbruchs	103
2.5.5	Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.5	104

3 Bild, Video und Audio 106

3.1 Maßstab und Bildgröße 106

3.1.1	Allgemeines	106
3.1.2	Numerischer und prozentualer Maßstab	107
3.1.3	Maßstab als Quotient	108
3.1.4	Proportionalität von Breite und Höhe	110
3.1.5	Formatänderung mit Wegfall oder Ergänzung	111
3.1.6	Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.1	113

3.2 Pixelauflösung und Bildgröße 116

3.2.1	Rechnen mit Pixelaufösungen	116
3.2.2	Umwandlung der Einheiten von Strecken und Pixelaufösungen	117
3.2.3	Bildgröße und Pixelauflösung	118
3.2.4	Skalieren digitaler Bilder	119
3.2.5	Pixelauflösung und Bilddetaillauflösung	121
3.2.6	Scanning-Frequenz	124
3.2.7	Verwendung von Digitalfotos und Archivbildern	126

- 3.2.8 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.2 126
- 3.3 Datenmengen und Datenkompression 129**
- 3.3.1 Rechnen mit Datenmengen 129
- 3.3.2 Komprimierte Datenmenge 130
- 3.3.3 Kompressionsfaktor und Kompressionsrate 133
- 3.3.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.3 136
- 3.4 Bilddaten 138**
- 3.4.1 Datentiefe und Farbtiefe 138
- 3.4.2 Bilddatenmenge 139
- 3.4.3 Datenkompression 141
- 3.4.4 Bilddateigröße und Speicherplatzbedarf 142
- 3.4.5 Veränderung der Datenmenge durch Bildmodifikation 143
- 3.4.6 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.4 144
- 3.5 Video- und Audiodaten 147**
- 3.5.1 Pixelrate Video 147
- 3.5.2 Datenrate Video 148
- 3.5.3 Datenmenge Video 150
- 3.5.4 Datenrate Audio 152
- 3.5.5 Datenmenge Audio 153
- 3.5.6 Vertontes Video 154
- 3.5.7 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.5 154
- 3.6 Gammakorrektur 156**
- 3.6.1 Grundlagen 156
- 3.6.2 Einfache Gammakorrektur digitaler Bilddaten 158
- 3.6.3 Gammakorrektur mit erweiterten Berechnungsverfahren 158
- 3.6.4 Gammakorrektur in der Bildbearbeitung 160
- 3.6.5 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.6 160
- 3.7 Farbcodierung und Farbsysteme 162**
- 3.7.1 RGB, CMYK und CIELAB 162
- 3.7.2 RGB-Farbwerte in Cascading Style Sheets 162
- 3.7.3 HSB, HSL und HWB: Hue 163
- 3.7.4 HSB: Brightness und Saturation 165
- 3.7.5 HSL: Lightness und Saturation 166
- 3.7.6 HWB: Whiteness und Blackness 167
- 3.7.7 $Y_{C_B}C_R$ 167
- 3.7.8 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.7 169
- 4 Datentransfer und Datenausgabe 170**
- 4.1 Datentransfer 170**
- 4.1.1 Massenspeicher 170
- 4.1.2 Netzwerke 171

- 4.1.3 Übungsaufgaben zu Abschnitt 4.1 172
- 4.2 Display 173**
- 4.2.1 Displaygröße 173
- 4.2.2 Pixelauflösung und Pixelabstand 174
- 4.2.3 Übungsaufgaben zu Abschnitt 4.2 177
- 4.3 Raster 178**
- 4.3.1 Rasterfrequenz, Rasterkonstante und Rasterzelle 178
- 4.3.2 Rastertonwert 179
- 4.3.3 Übungsaufgaben zu Abschnitt 4.3 181
- 4.4 Druckplattenrecorder 182**
- 4.4.1 Aufzeichnungsfeinheit und Recorder-Element 182
- 4.4.2 Rasterzelle und Rasterfrequenz 183
- 4.4.3 Tonwertstufen 182
- 4.4.4 Rastertonwert 185
- 4.4.5 Übungsaufgaben zu Abschnitt 4.4 186
- 4.5 Ausschießen 188**
- 4.5.1 Ausschießschema 188
- 4.5.2 Zuordnung der Seiten zu Bogen und Form 190
- 4.5.3 Druck mit einer Form 192
- 4.5.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt 4.5 193

- 5 Papier 195**
- 5.1 Normformate 195**
- 5.1.1 Endformate 195
- 5.1.2 Rohformate 196
- 5.1.3 Nutzenberechnung mit Normformaten 197
- 5.1.4 Masseberechnung mit Normformaten der Reihe A 197
- 5.1.5 Übungsaufgaben zu Abschnitt 5.1 198
- 5.2 Nutzen, Seiten, Druckbogen 199**
- 5.2.1 Nutzen ohne Vorgabe der Nutzenstellung 199
- 5.2.2 Nutzen bei vorgegebener Laufrichtung 200
- 5.2.3 Faltblätter 201
- 5.2.4 Seiten pro Druckbogen 202
- 5.2.5 Greiferrand, Kontrollelemente und Beschnitt 203
- 5.2.6 Druckbogenformat 205
- 5.2.7 Übungsaufgaben zu Abschnitt 5.2 206
- 5.3 Masse und Dicke 208**
- 5.3.1 Flächenmasse und Masse 208
- 5.3.2 Tausend-Bogen-Masse 209
- 5.3.3 Volumen und Dicke 210

5.3.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 5.3	210
5.4	Papierbedarf und Papierpreis	212
5.4.1	Papierbedarf	212
5.4.2	Papierpreis	216
5.4.3	Übungsaufgaben zu Abschnitt 5.4	217
5.5	Rollenberechnungen	219
5.5.1	Masse und Bahnlänge	219
5.5.2	Rollendurchmesser und Bahnlänge	220
5.5.3	Übungsaufgaben zu Abschnitt 5.5	221
5.6	Luftfeuchte	222
5.6.1	Vorbemerkung	222
5.6.2	Absolute und relative Luftfeuchte	222
5.6.3	Temperatur und relative Luftfeuchte	223
5.6.4	Kondensation	224
5.6.5	Übungsaufgaben zu Abschnitt 5.6	225
6	Drucktechnik	227
6.1	Maschinenleistung und Druckzeit	227
6.1.1	Zylinderdrehzahl und Druckgeschwindigkeit	227
6.1.2	Maschinenleistung in Druck, Bogen, Seiten pro Stunde	228
6.1.3	Druckzeiten	229
6.1.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 6.1	230
6.2	Druckfarbe und Feuchtmittel	232
6.2.1	Mischen von Druckfarbe	232
6.2.2	Druckfarbenverbrauch – Offset- und Siebdruck	233
6.2.3	Druckfarbenverbrauch – Illustrationstiefdruck	234
6.2.4	Feuchtmittel im Offsetdruck	235
6.2.5	Übungsaufgaben zu Abschnitt 6.2	236
6.3	Pressung und Zylinderabwicklung im Offsetdruck	238
6.3.1	Pressung Druckplatte–Gummituch	238
6.3.2	Pressung Gummituch–Gegendruck	241
6.3.3	Zylinderabwicklung – Grundlagen	241
6.3.4	Aufzughöhe und Druckbildlänge	243
6.3.5	Umspannungswinkel	245
6.3.6	Bedruckstoffdicke und Druckbildlänge	247
6.3.7	Übungsaufgaben zu Abschnitt 6.3	249
6.4	Getriebe	252
6.4.1	Antrieb und Abtrieb	252
6.4.2	Übersetzungsverhältnis	254
6.4.3	Übungsaufgaben zu Abschnitt 6.4	255

7	Messen und Prüfen	257
7.1	Fotometrie (Lichtmessung)	257
7.1.1	Fotometrische Größen und Einheiten	257
7.1.2	Lichtstärke und Lichtstrom	258
7.1.3	Leuchtdichte und spezifische Lichtausstrahlung	260
7.1.4	Lichtstrom und Beleuchtungsstärke	261
7.1.5	Fotometrisches Entfernungsgesetz	261
7.1.6	Belichtung und Bestrahlung	262
7.1.7	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.1	263
7.2	Densitometrie I – Grundlagen	265
7.2.1	Transmissions- und Reflexionsfaktor	265
7.2.2	Dichte	266
7.2.3	Kontrastverhältnis und Dichteumfang	267
7.2.4	Dynamikumfang	268
7.2.5	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.2	270
7.3	Densitometrie II – Rastertonwert	272
7.3.1	Rastertonwert im Film	272
7.3.2	Rastertonwert im Druck (Murray-Davies-Formel)	273
7.3.3	Tonwertzunahme im Druck, Druckkennlinie	275
7.3.4	Geometrischer Rastertonwert (Yule-Nielsen-Formel)	276
7.3.5	Messfeldgröße bei Rastertonwertmessung	277
7.3.6	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.3	280
7.4	Farbmetrik	282
7.4.1	Einführung	282
7.4.2	Normfarbwerte und Normfarbwertanteile	282
7.4.3	CIELAB-Farbwerte	283
7.4.4	CIELAB-Buntheit und -Bunttonwinkel	285
7.4.5	CIELAB-Farbabstand	287
7.4.6	Helligkeits-, Buntheits- und Bunttondifferenz	288
7.4.7	Chromaticness-Differenz	290
7.4.8	Farbabstand CIEDE2000	290
7.4.9	CIELUV	291
7.4.10	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.4	292
7.5	Standardisierung des Offsetdrucks	294
7.5.1	Soll-Werte und Toleranzen	294
7.5.2	Ermittlung der Standardabweichung	295
7.5.3	Stichprobengröße und Aussagesicherheit	296
7.5.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.5	297
7.6	Schall	298
7.6.1	Schalldruck, Schallintensität und Schallpegel	298

7.6.2	Lautstärkepegel, Lautheit und frequenzbewerteter Schallpegel	300
7.6.3	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.6	301
7.7	Elektrische Energie	302
7.7.1	Spannung, Stromstärke, Widerstand	302
7.7.2	Elektrische Leistung	303
7.7.3	Elektrische Arbeit	304
7.7.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 7.7	304
8	Fotografie	306
8.1	Linsen und Linsensysteme	306
8.1.1	Brennweite und Brechwert	306
8.1.2	Linsensysteme, Vorsatzlinsen	307
8.1.3	Übungsaufgaben zu Abschnitt 8.1	307
8.2	Fotografische Bilder	310
8.2.1	Geometrische Bildkonstruktion	310
8.2.2	Gegenstands- und Bildweite	311
8.2.3	Abbildungsverhältnis	311
8.2.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 8.2	312
8.3	Brennweite, Aufnahmeformat und Bildwinkel	313
8.3.1	Normalbrennweite	313
8.3.2	Brennweitenfaktor und äquivalente Brennweite	314
8.3.3	Bildwinkel	315
8.3.4	Übungsaufgaben zu Abschnitt 8.3	317
8.4	Belichtung I – Blende, Belichtungszeit, Empfindlichkeit	318
8.4.1	Blende	318
8.4.2	Belichtungszeit	319
8.4.3	Blende und Belichtungszeit	320
8.4.4	ISO-Empfindlichkeit	321
8.4.5	Übungsaufgaben zu Abschnitt 8.4	323
8.5	Belichtung II – Lichtwert, Korrekturen, Blitz	325
8.5.1	Lichtwert, Blendenleitwert und Zeitleitwert	325
8.5.2	Lichtwert und ISO-Empfindlichkeit	327
8.5.3	Belichtungskorrektur	328
8.5.4	Filterfaktor	329
8.5.5	Verlängerungsfaktor	329
8.5.6	Blitz-Leitzahl	331
8.5.7	Übungsaufgaben zu Abschnitt 8.5	332
8.6	Schärfe und Schärfentiefe	333
8.6.1	Unschärfekreis	333
8.6.2	Hyperfokale Distanz und Schärfentiefe	334

- 8.6.3 Entfernungseinstellung und Blende 337
- 8.6.4 Optimale Blende bei Makroaufnahmen 339
- 8.6.5 Übungsaufgaben zu Abschnitt 8.6 340

9 Geld 342

9.1 Preisberechnung 342

- 9.1.1 Rabatt, Umsatzsteuer, Skonto 342
- 9.1.2 Anzeigenpreis 344
- 9.1.3 Übungsaufgaben zu Abschnitt 9.1 345

9.2 Zins- und Währungsrechnen 347

- 9.2.1 Zinsen 347
- 9.2.2 Zinseszinsen 349
- 9.2.3 Währungen 350
- 9.2.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt 9.2 350

9.3 Fixe und variable Kosten 352

- 9.3.1 Gesamtkosten und Stückkosten 352
- 9.3.2 Gewinnschwelle (Break-even-Point) 353
- 9.3.3 Grenzaufgabe 354
- 9.3.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt 9.3 355

9.4 Kosten- und Leistungsrechnung 356

- 9.4.1 Bilanzielle und kalkulatorische Abschreibung 356
- 9.4.2 Kalkulatorische Zinsen 357
- 9.4.3 Wiederbeschaffungsneuwert 358
- 9.4.4 Beschäftigungs- und Nutzungsgrad 358
- 9.4.5 Kapazitätsplanung 360
- 9.4.6 Arbeitsplatzkosten 361
- 9.4.7 Übungsaufgaben zu Abschnitt 9.4 365

10 Anhang 368

- 10.1 Mathematische Zeichen 368
- 10.2 Wichtige Rechenregeln 369
- 10.3 Griechische Buchstaben 371

Register 372

Lösungen der Übungsaufgaben www.mathemedien.de/mathemedien

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Grundrechenarten

1.1.1 Terminologie

Grundrechenarten sind die Rechenoperationen der ersten Stufe (Addition und Subtraktion) sowie die Rechenoperationen der zweiten Stufe (Multiplikation und Division).

Addition, Addieren:

$$\begin{array}{c} 42 + 23 \\ \hline \text{Summand } \textit{plus} \text{ Summand} \\ \hline \text{Summe} \end{array}$$

Subtraktion, Subtrahieren:

$$\begin{array}{c} 42 - 23 \\ \hline \text{Minuend } \textit{minus} \text{ Subtrahend} \\ \hline \text{Differenz} \end{array}$$

Multiplikation, Multiplizieren:

$$\begin{array}{c} 42 \cdot 23 \\ \hline \text{Faktor } \textit{mal} \text{ Faktor} \\ \hline \text{Produkt} \end{array}$$

Division, Dividieren:

$$\begin{array}{c} 42 : 23 \\ \hline \text{Dividend } \textit{geteilt durch} \text{ Divisor} \\ \hline \text{Quotient} \end{array}$$

Bei der Division kann auch der Bruchstrich als Operationszeichen benutzt werden. Der Quotient wird dann Bruch, der Dividend Zähler und der Divisor Nenner genannt.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ Zähler (Dividend)} \\ \hline 2 \text{ Nenner (Divisor)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Bruch} \\ \textit{geteilt durch} \\ \text{(Quotient)} \end{array}$$

1.1.2 Kommutativ- und Assoziativgesetze

Summanden einer Summe und Faktoren eines Produkts können untereinander vertauscht werden (Kommutativgesetz der Addition, der Multiplikation).

$$43 + 24 = 24 + 43$$

$$32 \cdot 14 = 14 \cdot 32$$

Bei mehr als zwei Summanden oder Faktoren können beliebige Teilsummen bzw. -produkte berechnet werden (Assoziativgesetz der Addition, der Multiplikation). Die Reihenfolge ist gleichgültig.

$$\underline{22 + 14} + 6 = 36 + 6 = 42$$

$$\underline{12 \cdot 5} \cdot 8 = 60 \cdot 8 = 480$$

$$22 + \underline{14 + 6} = 22 + 20 = 42$$

$$12 \cdot \underline{5 \cdot 8} = 12 \cdot 40 = 480$$

Kommutativ- und Assoziativgesetze gelten nicht für Subtraktion und Division. Ausdrücke mit beiden Rechenarten derselben Stufe werden grundsätzlich von links nach rechts abgearbeitet. Missachtung dieser Regel führt immer dann zum falschen Ergebnis, wenn die weiter rechts stehende Operation auf eine Subtraktion bzw. Division folgt.

In den links stehenden Beispielen kann von der Regel „von links nach rechts“ abgewichen werden. In den rechten Beispielen führt das zu falschen Ergebnissen.

$$\underline{15 + 9} - 4 = 24 - 4 = 20$$

$$15 + \underline{9 - 4} = 15 + 5 = 20$$

$$\underline{9 \cdot 12} : 3 = 108 : 3 = 36$$

$$9 \cdot \underline{12 : 3} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\underline{15 - 9} + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$15 - \underline{9 + 4} = 15 - 13 = 2 \quad \text{falsch!}$$

$$\underline{72 : 12} \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

$$72 : \underline{12 \cdot 3} = 72 : 36 = 2 \quad \text{falsch!}$$

Kein Regelverstoß ist das Umstellen der Reihenfolge, wenn dabei sichergestellt ist, dass Subtrahenden nicht zu Minuenden und Divisoren nicht zu Dividenden werden (und umgekehrt).

$$15 - 9 + 4 = 15 + 4 - 9 = 10$$

$$72 : 12 \cdot 3 = 72 \cdot 3 : 12 = 18$$

1.1.3 Rangfolge der Rechenarten, Klammern

Multiplikation und Division haben Vorrang vor Addition und Subtraktion, sind also zuerst auszuführen. Merksatz: Punktrechnung vor Strichrechnung.

$$\underline{17 \cdot 3} + \underline{12 \cdot 4} = 51 + 48 = 99$$

$$63 - \underline{56 : 7} = 63 - 8 = 55$$

$$74 - \underline{8 \cdot 6} + 19 = 74 - 48 + 19 = 45$$

Wenn eine Rechenoperation der ersten Stufe in Klammern gesetzt ist, erhält sie Vorrang vor einer Operation der zweiten Stufe. Es gilt dann die Rangfolge:

1. Berechnungen in Klammern
2. Multiplikationen und Divisionen
3. Additionen und Subtraktionen

$$17 + 4 \cdot 3 = 17 + 12 = 29$$

$$48 : 3 + 5 = 16 + 5 = 21$$

$$(17 + 4) \cdot 3 = 21 \cdot 3 = 63$$

$$48 : (3 + 5) = 48 : 8 = 6$$

Klammern können durch Ausmultiplizieren bzw. Ausdividieren entfernt werden (Distributivgesetz). Bei der Division funktioniert das aber nur, wenn das Divisionszeichen rechts von der Klammer steht.

$$(17 + 4) \cdot 3 = 17 \cdot 3 + 4 \cdot 3$$

$$(32 + 16) : 8 = 32 : 8 + 16 : 8$$

$$3 \cdot (17 + 4) = 3 \cdot 17 + 3 \cdot 4$$

Klammern können auch bei gleichrangigen Rechenarten wichtig sein.

$$20 - 12 + 7 = 8 + 7 = 15$$

$$75 : 3 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$$

$$20 - (12 + 7) = 20 - 19 = 1$$

$$75 : (3 \cdot 5) = 75 : 15 = 5$$

Wenn bei gleichrangigen Rechenarten ein Additions- bzw. Multiplikationszeichen oder kein Rechenzeichen vor der Klammer steht, ist die Klammer überflüssig.

$$15 + (12 - 7) = 15 + 12 - 7$$

$$12 \cdot (24 : 3) = 12 \cdot 24 : 3$$

$$(15 + 12) - 7 = 15 + 12 - 7$$

$$(12 \cdot 24) : 3 = 12 \cdot 24 : 3$$

Klammern hinter Subtraktions- oder Divisionszeichen können entfernt werden. Die Rechenart in der Klammer wird durch die jeweils entgegengesetzte ersetzt.

$$20 - (12 + 7) = 20 - 12 - 7$$

$$75 : (3 \cdot 5) = 75 : 3 : 5$$

$$34 - (16 - 9) = 34 - 16 + 9$$

$$45 : (9 : 3) = 45 : 9 \cdot 3$$

Summen oder Differenzen in Zähler oder Nenner eines Bruchs sind so zu behandeln, als würden sie in Klammern stehen.

$$\frac{21+9}{17-12} = \frac{30}{5} = 6$$

Soll anstelle des Bruchstriches der Doppelpunkt als Divisionszeichen benutzt werden, müssen Klammern gesetzt werden. Dasselbe gilt für Produkte und Quotienten im Nenner.

$$\frac{21+9}{17-12} = (21+9) : (17-12) \qquad \frac{16 \cdot 6}{12 \cdot 4} = 16 \cdot 6 : (12 \cdot 4)$$

Zum Einklammern mehrerer Klammersausdrücke werden der Übersichtlichkeit halber eckige Klammern benutzt. Zur Kennzeichnung einer dritten Klammer Ebene dienen geschweifte Klammern. Beim Rechnen werden die Klammern von innen nach außen (rund, eckig, geschweift) abgearbeitet.

$$\{27 - [11 - (25 - 21)]\} \cdot (9 - 4) = \{27 - [11 - 4]\} \cdot 5 = \{27 - 7\} \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 100$$

1.1.4 Positive und negative Zahlen

Positive Zahlen sind größer, negative Zahlen sind kleiner als null. Um eine Zahl als positiv oder negativ zu kennzeichnen, werden die Vorzeichen Plus und Minus vorangestellt. Vorzeichen und Ziffern werden der Übersichtlichkeit halber oft in Klammern eingeschlossen.

$$\begin{array}{cccc} (+2) & (+23) & (+99) & (+7398) \\ (-2) & (-23) & (-99) & (-7398) \end{array}$$

Die Klammern verdeutlichen, dass es sich bei den Plus- und Minus-Zeichen um Vorzeichen und nicht um Rechenzeichen handelt. Wenn keine Konfusion zu befürchten ist, kann auf Klammern verzichtet werden.

Das Vorzeichen Plus wird meistens weggelassen. Eine Zahl ohne Vorzeichen ist immer eine positive Zahl.

$$(+7) = 7 \qquad 37 = (+37)$$

Operationen der ersten Stufe können vereinfacht werden: Wenn Rechen- und Vorzeichen gleich sind, wird eine positive Zahl addiert; wenn Rechen- und Vorzeichen verschieden sind, wird eine positive Zahl subtrahiert.

$$\begin{array}{ll} (+38) + (+12) = 38 + 12 & (+38) + (-12) = 38 - (+12) = 38 - 12 \\ (+38) - (+12) = 38 - 12 & (+38) - (-12) = 38 + (+12) = 38 + 12 \end{array}$$

Bei den Rechenarten der zweiten Stufe gilt: Haben zwei Faktoren bzw. Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so ergibt sich eine positive Zahl. Haben sie unterschiedliche Vorzeichen, so ergibt sich eine negative Zahl.

$$\begin{array}{ll} (+12) \cdot (+4) = (+48) & (+12) : (+4) = (+3) \\ (-12) \cdot (-4) = (+48) & (-12) : (-4) = (+3) \\ (+12) \cdot (-4) = (-48) & (+12) : (-4) = (-3) \\ (-12) \cdot (+4) = (-48) & (-12) : (+4) = (-3) \end{array}$$

Bei längeren Ausdrücken mit Rechenarten der zweiten Stufe kann einfach die Anzahl der negativen Vorzeichen abgezählt werden. Bei gerader Anzahl ist das Ergebnis positiv, bei ungerader Anzahl negativ.

$$\begin{aligned} (-2) \cdot (-3) : (+6) \cdot (-5) \cdot (+4) : (-2) &= (+10) && \text{vier negative Vorzeichen} \\ (-3) \cdot (-5) \cdot (+2) \cdot (-4) \cdot (-2) : (-10) &= (-24) && \text{fünf negative Vorzeichen} \end{aligned}$$

1.1.5 Die Zahl Null

Wie mit der Zahl Null in einer Berechnung umzugehen ist, hängt von der Rechenart ab. Summand und Subtrahend Null können weggelassen werden.

$$17 + 0 + 33 = 17 + 33 \qquad 29 + 8 - 0 = 29 + 8$$

Der Minuend Null kann ebenfalls weggelassen werden. Dabei wird das Rechenzeichen Minus zum Vorzeichen der verbleibenden Zahl.

$$0 - 8 = (-8)$$

Ein Produkt, das den Faktor Null enthält, ist immer gleich Null. Bevor mit dem Ausrechnen eines umfangreichen Produkts begonnen wird, sollte also überprüft werden, ob eine Null darin vorkommt.

$$23 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 38 \cdot 0 \cdot 63 \cdot 8 = 0$$

Jeder Quotient mit dem Dividenden Null ist gleich Null.

$$0 : 42 = 0$$

Division durch Null ist „nicht erlaubt“; Quotienten mit dem Divisor Null sind mathematisch nicht definierbar.

$$\text{„unerlaubter“ Quotient:} \qquad 42 : 0$$

1.1.6 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.1

- a) $4 \cdot 5 + 3 \cdot 7$ b) $7 + 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5$ c) $12 + 6 : 3$ d) $26 - 16 : 2 + 7$
- a) $(4 + 5) \cdot (9 - 6)$ g) $\frac{14 + 6}{7 - 2}$
 b) $7 + 3 \cdot (12 - 4)$
 c) $29 - (17 + 10)$ h) $45 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot (4 + 8)$
 d) $16 - 5 + (19 - 14)$ i) $[(48 - 6 \cdot 4) - (9 + 12)] \cdot 5$
 e) $3 \cdot 3 - (28 - 9)$ j) $[30 - (38 - 16)] \cdot [17 - (8 + 6)]$
 f) $6 \cdot 4 : (7 - 4)$
- a) $(+5) + (-3)$ d) $(-20) + (-15) - (+20)$
 b) $(-6) - (-10) + (-2)$ e) $(+10) - (-5) + (-25) - (+8)$
 c) $(+26) - (+14) + (-8) - (-5)$
- Prüfen Sie bitte jeweils, ob das Ergebnis positiv, negativ oder Null ist.

a) $(-28) \cdot (-16)$ d) $(-6) \cdot (-9) \cdot (+2) \cdot (-17) \cdot (+11) \cdot (-8)$
 b) $(+84) : (-12)$ e) $(6 + 4) \cdot (7 - 9) \cdot (2 - 8) \cdot (9 - 3)$
 c) $3 \cdot (-14) \cdot (-8) \cdot 2 \cdot (-9)$ f) $(19 - 9 + 5) \cdot (8 - 16 + 3) \cdot (12 + 5 - 17) \cdot (8 + 2 - 12)$

1.2 Gebrochene Zahlen

1.2.1 Gemeine Brüche

Das Adjektiv „gemein“ bedeutet hier „allgemein“, grenzt also die gemeinen Brüche vom Spezialfall der Dezimalbrüche ab. Gemeine Brüche, im Folgenden kurz Brüche genannt, sind Quotienten. Beim Bruchrechnen geht es aber nicht darum, diese Quotienten auszurechnen, sondern um Operationen mit diesen Quotienten, also Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen.

Brüche, deren Zähler kleiner als ihre Nenner sind, werden eigentliche oder echte Brüche genannt. Brüche, deren Zähler größer als ihre Nenner sind, heißen uneigentliche oder unechte Brüche.

$$\text{Eigentliche Brüche:} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{12}{43}$$

$$\text{Uneigentliche Brüche:} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{59}{12} \quad \frac{91}{43}$$

Uneigentliche Brüche können als gemischte Zahlen geschrieben werden.

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Gegenüber uneigentlichen Brüchen haben gemischte Zahlen zwar den Vorteil größerer Anschaulichkeit. Beim Rechnen mit Brüchen ist es aber in aller Regel günstiger, mit uneigentlichen Brüchen zu arbeiten.

1.2.2 Grundrechenarten mit gemeinen Brüchen

Brüche mit gleichen Nennern, kurz gleichnamige Brüche genannt, werden addiert und subtrahiert, indem ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\frac{8}{17} + \frac{12}{17} = \frac{8+12}{17} = \frac{20}{17} \qquad \frac{18}{23} - \frac{7}{23} = \frac{18-7}{23} = \frac{11}{23}$$

Um ungleichnamige Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, müssen sie zunächst durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden. Erweitern heißt, Zähler und Nenner mit derselben Zahl zu multiplizieren.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9+4}{12} = \frac{13}{12}$$

Brüche werden multipliziert, indem ihre Zähler und ihre Nenner miteinander multipliziert werden.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{11}{7} = \frac{3 \cdot 11}{5 \cdot 7} = \frac{33}{35}$$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem sein Zähler mit dieser Zahl multipliziert wird.

$$\frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{7} = \frac{12}{7}$$

Brüche werden dividiert, indem der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird. Im Kehrwert sind Zähler und Nenner vertauscht.

$$\frac{5}{17} : \frac{2}{3} = \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{17 \cdot 2} = \frac{15}{34}$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem sein Nenner mit dieser Zahl multipliziert wird.

$$\frac{19}{5} : 4 = \frac{19}{5 \cdot 4} = \frac{19}{20}$$

1.2.3 Kürzen von gemeinen Brüchen

Kürzen bedeutet, Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl zu dividieren. Ziel sind möglichst kleine ganze Zahlen als Zähler und Nenner.

$$\frac{25}{40} = \frac{25:5}{40:5} = \frac{5}{8}$$

Faktoren von Produkten in Zähler und Nenner lassen sich gegeneinander kürzen. Gleiche Faktoren in Zähler und Nenner werden dabei einfach weggelassen.

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{7 \cdot 13}{11}$$

Achtung: Wenn in Zähler oder Nenner alle Faktoren weggekürzt werden, bleibt eine Eins zurück (keine Null!).

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{1}{5} \qquad \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 17}{5 \cdot 8 \cdot 17} = \frac{7}{1} = 7$$

Entsprechend kann gekürzt werden, wenn zwar keine gleichen Faktoren, stattdessen aber Faktoren mit gemeinsamen Teilern vorhanden sind.

$$\frac{6 \cdot 25}{9 \cdot 35} = \frac{(6:3) \cdot (25:5)}{(9:3) \cdot (35:5)} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$$

Summen und Differenzen sind so zu behandeln, als wären sie eingeklammert (vgl. Abschnitt 1.1.3). Sie müssen also vor dem Kürzen ausgerechnet werden.

$$\frac{3+7+22}{6+14-8} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

1.2.4 Dezimalbrüche

Dezimalbrüche werden als gemischte Zahlen geschrieben. Die Stellen links vom Komma repräsentieren eine ganze Zahl, die Stellen rechts vom Komma (Dezimalstellen, Dezimale) Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000, ... ($10^1, 10^2, 10^3, \dots$).

$$25,582 = 25 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{2}{1000} = 25 + \frac{582}{1000}$$

Die Stellen links vom Komma werden sprachlich zu einem Zahlwort zusammengefasst, die Dezimalen dagegen einzeln gesprochen: „fünfundzwanzig Komma fünf acht zwei“.