JETZT mit LERN-VIDEOS

13. Klasse

FOS·BOS 2023
Abitur Bayern

Mathematik Technik

Zusätzlich mit

- Miniskript,

- Musterprüfungen und

- Übungaufgaben

Inkl. 2022
Original-Prüfungen
mit Lösungen

FOS·BOS 13

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag
www.lern-verlag.de

Abiturprüfung
FOS | BOS Bayern 2023
Mathematik Technik
13. Klasse

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Beruflichen Oberschule
technischer Zweig in Bayern

INKL.
Original-Prüfungen
2022
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsbuch **Abiturprüfung FOS/BOS Bayern 2023 Mathematik Technik 13. Klasse** sind die zentral gestellten Original-Prüfungen der letzten Jahren nach LehrplanPLUS zusammengestellt worden. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2023 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **Montag, 22.05.2023** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2022) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Abitur 2023 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum
lernverlag® www.lern-verlag.de
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – www.lern-verlag.de
lern.de, cleverlag und lernverlag sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

8. ergänzte Auflage ©2022 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0088-9
Artikelnummer:
EAN 9783743000889

Aktuelles Rund um die Prüfung 2023 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über Polynomdivision oder Vektoren und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**" Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2022/2023 - ISBN: 978-3-7430-0088-9

- Den Übungsteil herausgenommen und online zum Üben per QR-Code bereitgestellt.

- **Original-Prüfung 2022 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2023**.

Inhaltsverzeichnis

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2023

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2023 an der FOSBOS:
Kürzungen aus dem Vorjahr bleiben bestehen - Nicht prüfungsrelevant (Stand: 27.06.2022):

- Aus LB 3: berechnen uneigentliche Integrale 1. und 2.Art, um damit Maßzahlen der Flächeninhalte von Flächen zu ermitteln, die in x-oder y-Richtung unbegrenzt sind
- Aus LB 8: bestimmen für kombinatorische Problemstellungen die Anzahl der Belegungsmöglichkeiten für ein k-Tupel mithilfe des allgemeinen Zählprinzips. Damit erschließen sie sich unter anderem die Anzahl der Möglichkeiten für die Bildung eines Passworts

Bitte fragen Sie bzgl. aktuellen Änderungen immer auch noch einmal bei Ihrer Lehrkraft nach!

MINISKRIPT

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**“ zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

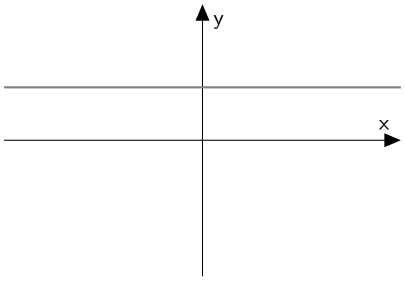
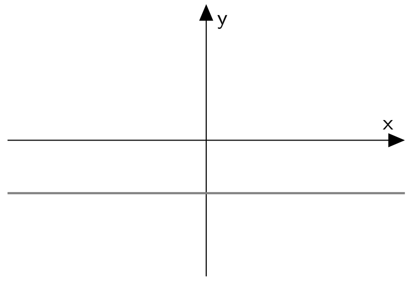
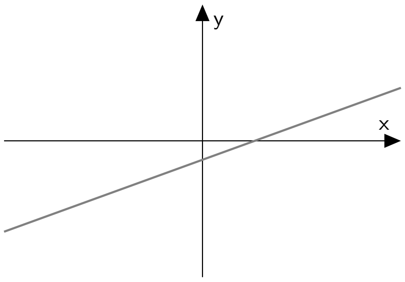
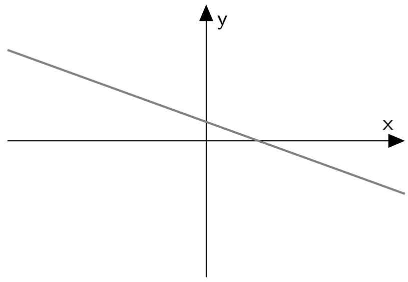
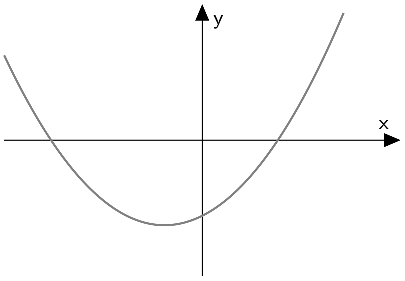
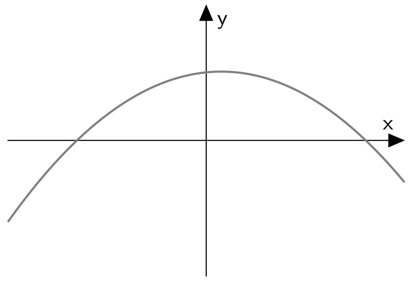
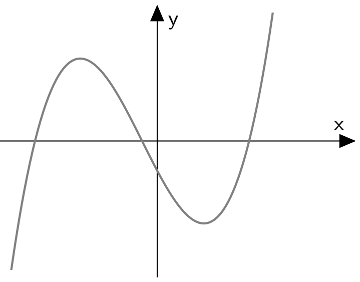
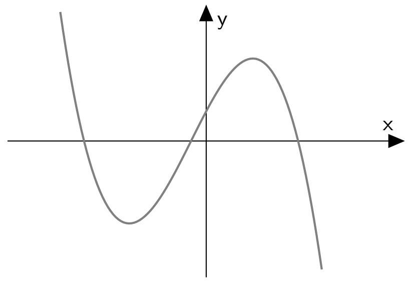
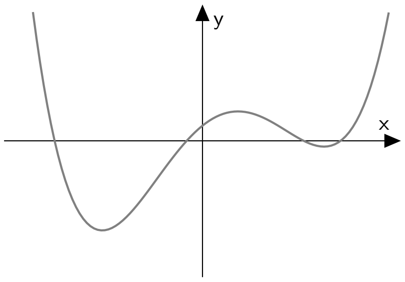
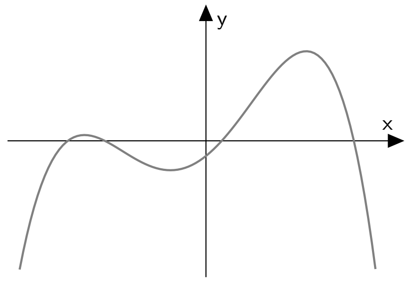
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan“ zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**“ der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
  - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte“, „Steigungswerte“ und „Krümmungswerte“ definiert bzw. berechnet.
  - Funktionen kann man ableiten.
  - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**“.
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, ...)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient“ a niemals null sein darf. Dies ist „logisch“, da ja der „namensgebende“ Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**“, die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich“ sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
  - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über“– bzw. „unterhalb der x-Achse“.
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**“.

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**“!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \;\wedge\; d = 0$)

mögliche Graphentypen für a > 0	**mögliche** Graphentypen für a < 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug" alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug" wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen" zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug" einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge" kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge" zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten" werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Lösungen - Polynome

1 Vollständige Lösung:

Werkzeug	**Gleichungstyp**	**Beispiel**
Äquivalenzumformung	lineare Gleichung	$x + 1 = 0$
Ausklammern	quadratische Gleichung ($c = 0$) kubische Gleichung ($d = 0$) Gleichung 4. Grades ($e = 0$)	$4x^2 - 2x = 0$ $3x^3 - 2x^2 + x = 0$ $x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
Mitternachtsformel	quadratische Gleichung (vollständige Gleichung)	$3x^2 - 4x + 1 = 0$
Radizieren	quadratische Gleichung ($b = 0$)	$4x^2 - 16 = 0$
Polynomdivision	kubische Gleichung (zum Vereinfachen) Gleichung 4. Grades (zum Vereinfachen)	$3x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$ $4x^4 - 3x^2 + 2x^2 + x - 1 = 0$
Substitution	Gleichung 4. Grades ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)	$4x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

2 Für jede Teilaufgabe wird die Lösung einer Gleichung ausführlich angegeben und für die restlichen Gleichungen jeweils eine Kurzlösung.

a) Gleichung I): $2x - 4 = 0$; Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 2x - 4 = 0 && | + 4 \\ \iff \quad & 2x = 4 && | : 2 \\ \iff \quad & \underline{\underline{x_1 = 2}} && \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{2}{7}}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 3}}$

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{5}}}$

b) Gleichung I): $x^2 - 4 = 0$; Radizieren:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4 = 0 && | + 4 \\ \iff \quad & x^2 = 4 && | \pm \sqrt{\ } \\ \iff \quad & \underline{\underline{x_1 = -2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = 2}} && \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}}$

Gleichung III): keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\sqrt{3}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3}}}$

Alternative Übersicht - Auswahlvorgänge

Grundsätzlich können vier verschiedene Auswahlvorgänge unterschieden werden. In nachfolgender Tabelle sind die Berechnungsvorschriften allgemein und anhand des Beispiels „Von drei ($\mathbf{n} = \mathbf{3}$) vermischten, verdeckten Spielkarten (Bube B, Dame D und König K) werden zwei ($\mathbf{k} = \mathbf{2}$) zufällige Karten aufgedeckt." gegeben:

	mit Beachtung der Reihenfolge	**ohne** Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholung	**allgemeine Rechenvorschrift:** n^k	**allgemeine Rechenvorschrift:** $\binom{n+k-1}{k}$
	Kombinationen für das Bsp.: B B B D B K D B D D D K K B K D K K $3^2 = 9$	Kombinationen für das Bsp.: B B D B K B D D D K K K $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$
ohne Wiederholung	**allgemeine Rechenvorschrift:** $\frac{n!}{(n-k)!}$	**allgemeine Rechenvorschrift:** $\binom{n}{k}$
	Kombinationen für das Bsp.: B D B K D B D K K B K D $\frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$	Kombinationen für das Bsp.: D B K B D K $\binom{3}{2} = 3$

Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsgröße

Eine *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* ist eine Funktion, die jedem Ergebnis ω eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet. Sie wird meist als Großbuchstabe $(Z, X, \ldots)$ notiert. Die zugeordnete Zahl x nennt man *Zufallswert*.

Beispiel:
Beim einmaligen Würfelwurf wird die Zufallsgröße Z = „gewürfelte Augenzahl" betrachtet. Die Zuordnung von Zufallswerten x_i zu den Ergebnissen ω_i könnte wie folgt definiert werden:

ω_i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6

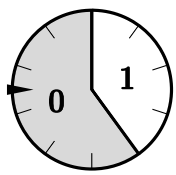
Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Einem Zufallswert x einer Zufallsgröße X kann seine Eintrittswahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zugeordnet werden. Macht man dies für alle möglichen Zufallswerte, so erhält man die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsgröße X.

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ ist stets 1.

Die Darstellung erfolgt in Tabellenform oder grafisch (z.B. Histogramm, Stabdiagramm).

Beispiel:
Es wird an rechtsstehendem Glücksrad gedreht. Die Zufallsgröße X wird wie folgt definiert:



$$X = \text{„Ergebnis der Drehung"}$$

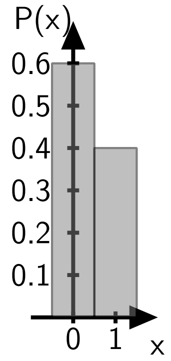
Die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse kann man anhand der Segmente abzählen. Es gilt:

$$P(X = 0) = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad P(X = 1) = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

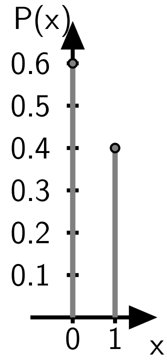
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann zum Beispiel als Tabelle, als Histogramm und als Stabdiagramm darstellt werden:

x	0	1
$P(X = x)$	0,6	0,4

Histogramm



Stabdiagramm



Übungsteil

Unter folgendem QR-Code haben wir Ihnen auf unserer Verlagsseite einen Übungsteil zur Verfügung gestellt. Der Übungsteil ist aufgeteilt in einen Teil Analysis und einen weiteren Teil analytischen Geometrie, damit Sie sich noch gezielter auf die Abschlussprüfung vorbereiten können.

Download über unsere Verlagsseite https://www.lern-verlag.de

Sollte der Link auf unserer Verlagsseite einmal nicht funktionieren, so finden Sie alternativ alle Informationen rund um unsere FOS/BOS Bücher auch unter folgendem QR-Code.

Download über unsere Lernplattform unter https://lern.de

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
Muster	oHm AI	$F(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$	**79**	Stammfunktion; Rotationsvolumen
		$h(x) = \dfrac{x^2+3}{-x^2-2}$ und $k(x) = \arctan(h(x))$	**79**	Symmetrie; Monotonie; Umkehrfunktion
	oHm AII	$h(x) = x \cdot e^{x+1}$ und $g(x) = (x-1) \cdot e^{x+1}$	**83**	Stammfunktion; Monotonie; Extrema; Wendepunkt; Integral
	mHm AI	$f(x) = \dfrac{2x^2-5x+5}{1-x}$	**93**	Definitionsmenge; NST; Grenzwert; Asymptoten; Monotonie; Extrema; Wendepunkte; Integral
		$h(x) = 10 \cdot e^{-0{,}2x}$ und $p(x) = 0{,}1 \cdot (x-a)^2 + b$ und $\ell(x) = cx + d$	**93**	Funktionsterm bestimmen; Rotationsvolumen
		$I(t) \cdot R = U - L \cdot \dot{I}(t)$	**94**	spezielle Lösung
	mHm AII	$f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2}{x-4}\right)$	**101**	Definitionsmenge; NST; Grenzwert; Asymptoten; Monotonie; Extrema; Wertemenge; Umkehrfunktion; Funktionsterm bestimmen
		$\dot{h}(t) = 2 \cdot h(t) - 4 \cdot h^2(t)$	**101**	allgemeine Lösung; Grenzwert
2020	oHm A	$g\colon x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$	**121**	NST; Monotonie
		$f\colon x \mapsto \dfrac{5}{4e^x+1}$	**121**	Umkehrfunktion; Definitionsmenge
	mHm AI	$s\colon x \mapsto 8 - 2\sqrt{x^2-9}$	**128**	Rotationsvolumen
		$f\colon x \mapsto -\dfrac{4x+2}{x^2+1}$	**128**	NST; Asymptote; Extrema; Fläche; Umkehrfunktion
		$g\colon x \mapsto \ln(f(x))$	**129**	Definitionsmenge; NST; Wertemenge
		$\dot{z} + 0{,}03 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \cdot z = 0{,}5 \cdot z$	**129**	spezielle Lösung
	mHm AII	$f\colon x \mapsto x + \arctan\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$	**136**	Grenzwert; Monotonie; Extrema; Asymptote; NST
		$r\colon x \mapsto \sqrt{x^2 \ln(x)}$	**136**	Rotationsvolumen
		$\dot{v} = 0{,}484 - 0{,}0040 \cdot v^2$	**137**	spezielle Lösung; Integral; Umkehrfunktion

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2021	oHm A	$f(x) = 2 \cdot \arctan(3 - 5x - 2x^2)$	**155**	NST; Asymptote; Extrema
		$h\colon x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^x}$	**155**	Symmetrie; Stammfunktion; Umkehrfunktion
	mHm AI	$f\colon x \mapsto 3 \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{4x - 14}\right)$	**162**	Definitionsmenge; NST; Grenzwert; Asymptote; Extrema; Wertemenge
		$h\colon x \mapsto \frac{4x - 4}{(x-4)^2 + 16}$ und $H\colon x \mapsto \int\limits_0^x h(t)dt$	**162**	Monotonie; Krümmung; Integral
		$\dot{m}(t) + \frac{1}{120} \cdot m(t) = \frac{1}{5}$	**163**	allgemeine Lösung; spezielle Lösung; Grenzwert
	mHm AII	$f\colon x \mapsto (x+2) \cdot e^{-x}$	**171**	NST; Grenzwert; Fläche; Definitionsmenge; Umkehrfunktion
		$r\colon x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{x^2 - 4}\right)$	**171**	Definitionsmenge; Monotonie; Integral; Symmetrie; Krümmung
		$x \cdot y' = y - \frac{x^2}{(x-1)^2 + 1}$	**172**	Tangente; spezielle Lösung
2022	oHm A	$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2}$	**191**	NST; Asymptote; Umkehrfunktion; Definitionsmenge; Fläche
		$g(x) = \ln(f(x))$	**191**	Definitionsmenge; NST
	mHm AI	$f(x) = \arctan\left(1 - \frac{2}{5x}\right)$	**198**	NST; Grenzwert; Asymptoten; Monotonie; Wertemenge; Wendepunkt
		$u(x) = \frac{2 \cdot \ln(x)}{\ln(x) - 1}$	**198**	Monotonie; Umkehrfunktion
		$h(x) = \frac{12x^2 - 14x}{(2x-3)(3x+1)}$ und $H(x) = \int\limits_0^x h(t)dt$	**198**	Definitionsmenge; Extrema; Integral
		$\dot{T} = -\lambda \cdot (T - T_W)$	**199**	allgemeine Lösung; spezielle Lösung
	mHm AII	$f(x) = \ln\left(4 - \frac{8}{x^2 + 1}\right)$	**207**	Definitionsmenge; NST; Asymptoten; Monotonie; Extrema
		$h(x) = \int\limits_{0,6}^x \frac{3}{(5t-1)^2 + 4}dt$	**207**	Integral; NST
		$g(x) = \frac{2}{2e^{-x} + 1} - 1$	**207**	Extrema; Asymptote; Umkehrfunktion; Tangente
		$5\dot{v} = 50 - 2v^2$	**208**	spezielle Lösung
Lösungen:		StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau) und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

Musterprüfung nach LehrplanPLUS

1.0 Gegeben ist die Funktion $F(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ mit $D_{F;max} =]0; \infty[$.

1.1 Zeigen Sie, dass F(x) eine Stammfunktion von $f(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{-x}$ ist. **2 BE**

1.2 Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Volumens der Körpers der entsteht, wenn der Graph von F(x) im Intervall [1; 2] um die x-Achse rotiert. **5 BE**

2 Betrachtet wird nun die gebrochenrationale Funktion $g(x) = \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16}$ mit $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass für die Funktion g(x) und deren erste Ableitung g′(x) der Zusammenhang $\frac{g(x)}{g'(x)} = -x - 4$ gilt. **5 BE**

3.0 Weiterhin sind die Funktionen $h(x) = \frac{x^2 + 3}{-x^2 - 2}$ und $k(x) = \arctan(h(x))$ mit $D_{h;max} = D_{k;max} = \mathbb{R}$ gegeben.

3.1 Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen h(x) und k(x) auf Symmetrie zum Koordinatensystem. **2 BE**

3.2.0 Die erste Ableitung der Funktion h(x) ist gegeben zu $h'(x) = \frac{2x}{(-x^2 - 2)^2}$ (Nachweis nicht erforderlich).

3.2.1 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von h(x). **4 BE**

3.2.2 Schließen Sie aus dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe auf das Monotonieverhalten des Graphen von k(x). **2 BE**

3.3 Begründen Sie, dass die Funktion $u(x) = h(x)$ mit $D_u = [1; \infty[$ umkehrbar ist und weisen Sie nach, dass ihr Graph durch den Punkt $\left(-\frac{4}{3} \middle| 1\right)$ verläuft. **2 BE**

1.1 Um nachzuweisen, dass es sich um eine Stammfunktion handelt, muss $F'(x) = f(x)$ gezeigt werden. Die erste Ableitung wird mithilfe von Produkt- und Kettenregel berechnet.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sqrt{x} \cdot e^{-x} \\
F'(x) &= \left[(\sqrt{x})' \cdot e^{-x} + \sqrt{x} \cdot (e^{-x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} + \sqrt{x} \cdot e^{-x} \cdot (-1) && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} - \sqrt{x} \cdot e^{-x} && \text{(e^{-x} Ausklammern)} \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{-x} \\
&= f(x) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

1.2 Für das Volumen muss der Term $\pi \int\limits_1^2 (F(x))^2 dx$ berechnet werden. Zunächst wird das Integral ohne Integrationsgrenzen berechnet. Dafür wird partiell integriert.

$$
\begin{aligned}
\int (F(x))^2 dx = \int (\sqrt{x} \cdot e^{-x})^2 dx = \int (x \cdot e^{-2x}) dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x}x - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}
\end{aligned}
$$

Für das Rotationsvolumen gilt damit:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int\limits_1^2 (F(x))^2 dx = \pi \left[\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}\right]_1^2 = \pi \left(\left(-\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4}\right) e^{-2\cdot 2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4}\right) e^{-2\cdot 1}\right) \\
&= \pi \left(\left(-1 - \frac{1}{4}\right) e^{-4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{-2}\right) = \underline{\underline{\pi \left(-\frac{5}{4}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{-2}\right)}} \text{ [VE]}
\end{aligned}
$$

2 Um den gegebenen Zusammenhang zu zeigen, wird zunächst mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung der Funktion $g(x)$ berechnet.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\frac{1}{2}x + 2)' \cdot (x^2 + 8x + 16) - (\frac{1}{2}x + 2) \cdot (x^2 + 8x + 16)'}{(x^2 + 8x + 16)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 8x + 16) - (\frac{1}{2}x + 2) \cdot (2x + 8)}{(x^2 + 8x + 16)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{(x^2 + 8x + 16)} - \cancel{(x^2 + 8x + 16)}}{(x^2 + 8x + 16)^{\cancel{2}1}} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 8x + 16} \quad \text{mit } D_{g'} = D_g
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{g(x)}{g'(x)} &= \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16} : \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 8x + 16} = \frac{\frac{1}{2}x + 2}{\cancel{x^2 + 8x + 16}} \cdot \frac{\cancel{x^2 + 8x + 16}}{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot (-2) \\
&= -x - 4 \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

3.1 Für die Untersuchung der Symmetrie wird $h(-x)$ betrachtet:

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{-(-x)^2 - 2} = \frac{x^2 + 3}{-x^2 - 2} = h(x)$$

Wegen $h(-x) = h(x)$ liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor. Dieses Ergebnis wird für die Untersuchung von $k(x)$ verwendet.

$$k(-x) = \arctan(h(-x)) = \arctan(h(x)) = k(x)$$

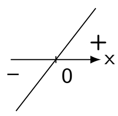
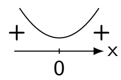
Auch für $k(x)$ liegt also Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

Alternative:
Alternativ kann für $h(x)$ auf die Achsensymmetrie geschlossen werden, da nur **geradzahlige** Potenzen von x vorliegen.
Für $k(x) = \arctan(h(x))$ folgt aus der Tatsache, dass $h(x)$ achsensymmetrisch ist außerdem direkt, dass $k(x)$ ebenfalls achsensymmetrisch ist.

3.2.1 Zunächst wird die Nullstelle von $h'(x)$ bestimmt. Diese entspricht der Nullstelle des Zählerterms:

$$h'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Anhand einer Vorzeichentabelle wird über das Monotonieverhalten entschieden:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$	Skizzen
$h'(x)$-Zähler: $2x$	$-$	0	$+$	
$h'(x)$-Nenner: $(-x^2 - 2)^2$	$+$	$+$	$+$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	
G_h	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Der Graph von $h(x)$ ist demnach streng monoton fallend im Intervall $]-\infty; 0]$ und streng monoton steigend im Intervall $[0; \infty[$.

3.2.2 Für die Ableitung von $k(x)$ gilt mithilfe der Kettenregel:

$$k(x) = \arctan(h(x)) \qquad k'(x) = \frac{1}{1 + (h(x))^2} \cdot h'(x)$$

Da der Bruch $\frac{1}{1 + (h(x))^2}$ nun aber stets positiv ist, stimmen Vorzeichen der ersten Ableitung von $k(x)$ und $h(x)$ überein, weswegen deren Graphen auch im Monotonieverhalten übereinstimmen. Demnach ist auch der Graph von $k(x)$ streng monoton fallend im Intervall $]-\infty; 0]$ und streng monoton steigend im Intervall $[0; \infty[$.

Abiturprüfung 2020
zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

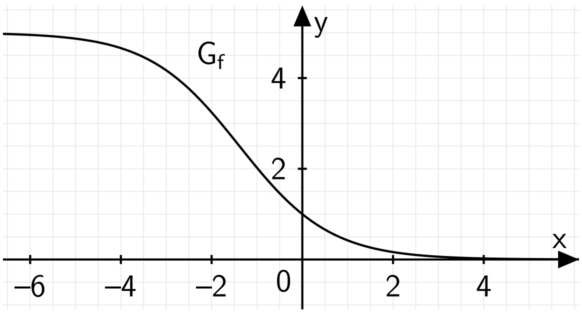
1.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1.1 Der Graph von g schneidet die x-Achse im Punkt X_0 und besitzt die Asymptote a. Geben Sie die Koordinaten von X_0 und die Gleichung von a an. **4 BE**

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion g.

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = -\frac{-1}{x^2+1}$] **4 BE**

2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{5}{4e^x+1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ein Ausschnitt des Graphen von f ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Der Term der Ableitung von f lautet $f'(x) = \frac{-20e^x}{(4e^x+1)^2}$.



2.1 Begründen Sie, warum f eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f an. **2 BE**

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt $Q\,(2{,}5\,|\,-\ln(4))$ auf dem Graphen der Umkehrfunktion von f liegt, und ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion von f im Punkt Q. **4 BE**

2.3 Untersuchen Sie, ob f eine Lösung der Differentialgleichung $y \cdot (1-y) = y' \cdot (e^{-x}-1)$ ist. **3 BE**

3 Zeigen Sie, dass gilt: $\int_1^4 (\ln(x) \cdot \sqrt{x})dx = \frac{32}{2}\ln(2) - \frac{28}{9}$. **5 BE**

2020

1.1 **Koordinaten von X_0**

Schnitt mit der x-Achse heißt $y = g(x) = 0$. Wegen $\arctan(0) = 0$ gilt also:

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{x+1}{x-1} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x+1 = 0 \qquad |-1 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -1 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $X_0\,(-1\,|\,0)$.

Gleichung der Asymptote

Es wird zunächst das Verhalten des Arguments des arctan für $x \to \pm\infty$ betrachtet. Da Zählergrad und Nennergrad gleich sind, ergibt sich der Grenzwert aus den Leitkoeffizienten:

$$x \to \pm\infty: \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{\mathbf{1}x+1}{\mathbf{1x}-1} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x \to \pm\infty: \quad g(x) = \arctan\left(\underbrace{\frac{x+1}{x-1}}_{\to 1}\right) \to \frac{\pi}{4}$$

Demnach lautet die Gleichung der waagrechte Asymptote $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{4}}}$.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe von Ketten- und Quotientenregel wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ g'(x) &= \left[\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\ &= \left[\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}+1} \cdot \left(\frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}\right)\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}+\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}\right) && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} && \text{(Brüche multiplizieren)} \\ &= \frac{-2}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{\cancel{(x-1)^2}} \cdot \cancel{(x-1)^2}} && \text{(Kürzen)} \\ &= \frac{-2}{(x+1)^2+(x-1)^2} && \text{(binom. Formel)} \\ &= \frac{-2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{-2}{2x^2+2} && \text{(Ausklammern)} \\ &= \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}(x^2+1)} && \text{(Kürzen)} \end{aligned}$$

Abiturprüfung 2022
zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \dfrac{2x}{4-x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-2; 2[$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

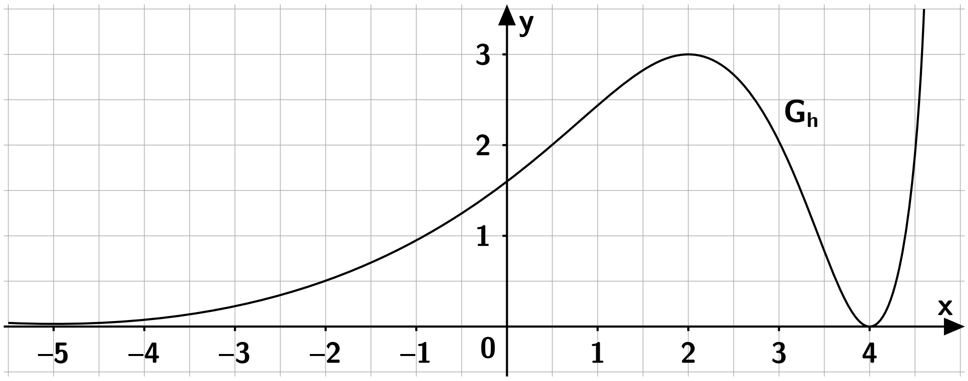
1.1 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f und die Nullstelle von f an. **2 BE**

1.2 Weisen Sie nach, dass die Funktion f in ihrer Definitionsmenge D_f umkehrbar ist, und ermitteln Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f. **6 BE**

1.3 Der Graph von f und die zur x-Achse senkrechte Gerade bei $x = 1$ schließen zusammen mit der x-Achse im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **4 BE**

1.4 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto \ln(f(x))$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset D_f$. Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_g und die exakte Nullstelle von g. **5 BE**

2 Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer in $\mathbb{R}$ stetigen Funktion h. Die x-Achse ist Asymptote von G_h. Außerdem gilt: $h(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.



Zudem ist die Funktion $H\colon x \mapsto \int_2^x h(t)dt$ mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}$ gegeben.

Entscheiden Sie für die beiden folgenden Aussagen jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

A: „Der Graph von H besitzt bei $x = 4$ einen Extrempunkt.“

B: „Der Graph von H hat bei $x = 1$ eine Tangente mit einem positiven y-Achsenabschnitt.“

5 BE

2022

1.1 **Gleichungen aller Asymptoten**

Es wird das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs untersucht:

$$x \to -2^+: \quad f(x) = \frac{\overbrace{2x}^{\to(-4)}}{\underbrace{4-x^2}_{\to 0^+}} \to -\infty$$

$$x \to 2^-: \quad f(x) = \frac{\overbrace{2x}^{\to 4}}{\underbrace{4-x^2}_{\to 0^+}} \to \infty$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen zweier senkrechter Asymptoten zu $\underline{\underline{x = -2}}$ und $\underline{\underline{x = 2}}$.

Nullstelle

Die Nullstelle der Funktion entspricht der Nullstelle des Zählerterms:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 & \\ \Rightarrow \quad & 2x = 0 & \quad |:2 \\ \Longleftrightarrow \quad & x_1 = 0 & \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$.

(Hinweis: Die Aufgabenstellung „Geben Sie an…“ erfordert keine Angabe des Rechenwegs)

1.2 **Nachweis der Umkehrbarkeit**

Zunächst wird mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{4-x^2} \\ f'(x) &= \left[\frac{(2x)' \cdot (4-x^2) - 2x \cdot (4-x^2)'}{(4-x^2)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{2 \cdot (4-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{8 - 2x^2 + 4x^2}{(4-x^2)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{8 + 2x^2}{(4-x^2)^2} \end{aligned}$$

Im Definitionsbereich sind sowohl Zähler- als auch Nennerterm stets größer null, sodass allgemein $f'(x) > 0$ gilt. Damit ist G_f streng monoton steigend in D_f und damit umkehrbar.

Definitionsmenge der Umkehrfunktion

Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} entspricht der Wertemenge von f. Da G_f streng monoton steigend ist und in Teilaufgabe 1.1 bereits untersucht wurde, dass

$$x \to -2^+: \quad f(x) \to -\infty \qquad\qquad x \to 2^-: \quad f(x) \to \infty$$

gilt, ist $W_f = \mathbb{R}$. Damit ergibt sich auch die Definitionsmenge der Umkehrfunktion zu $\underline{\underline{D_{f^{-1}} = \mathbb{R}}}$.

1.3 **Maßzahl des Flächeninhalts**

Es wurde bereits ermittelt, dass $x_1 = 0$ eine Nullstelle von $f(x)$ ist. Damit ergeben sich die Grenzen für die Integration zur Ermittlung der Fläche zu $x = 0$ und $x = 1$.

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x}{4-x^2}dx = \int_0^1 -\frac{2x}{x^2-4} = -\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4}dx$$

Bei dem nach der Umformung verbleibenden Integral ist der Zählerterm eine Ableitung des Nennerterms, für diese Integrale gilt

$$\int \frac{N'(x)}{N(x)}dx = \ln|N(x)| + C$$

und damit für das Integral:

$$\begin{aligned} A &= -\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4}dx = -\left[\ln|x^2-4|\right]_0^1 = -\left(\ln|1^2-4| - \ln|0^2-4|\right) \\ &= -(\ln(3)-\ln(4)) = \ln(4)-\ln(3) = \underline{\underline{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}}\ [FE] \end{aligned}$$

1.4 **Maximale Definitionsmenge**

Gegeben ist die Funktion $g(x) = \ln\left(\frac{2x}{4-x^2}\right)$. Der ln( ) ist nur für Argumente größer als null definiert. Demzufolge nur dort, wo $f(x) > 0$ gilt. Da G_f auf D_f streng monoton steigend ist und bei $x = 0$ eine Nullstelle besitzt, ist $f(x) > 0$ also für alle $x > 0$ erfüllt. Wegen dem Definitionsbereich von D_f gilt zusätzlich $x < 2$ und damit $\underline{\underline{D_g =]0; 2[}}$.

Nullstelle

Allgemein ist $\ln(1) = 0$ die Nullstelle des ln( ). Damit ist gesucht, wo $f(x) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} && g(x) &= 0 & \\ \iff && \ln(f(x)) &= 0 & \\ \Rightarrow && f(x) &= 1 & \\ \iff && \frac{2x}{4-x^2} &= 1 & | \cdot (4-x^2) \\ \iff && 2x &= 4-x^2 & | -(4-x^2) \\ \iff && x^2+2x-4 &= 0 & \\ \Rightarrow && x_{1;2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} & \\ \iff && x_{1;2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} & \\ \iff && x_{1;2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4\cdot 5}}{2} & \\ \iff && x_{1;2} &= \frac{-2 \pm 2\cdot\sqrt{5}}{2} & \\ \iff && x_{1;2} &= -1 \pm \sqrt{5} & \end{aligned}$$

2022

Da kein Taschenrechner verwendet werden kann, muss der Wert abgeschätzt werden, damit beurteilt werden kann, ob die Werte in D_g liegen. Es ist $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ und damit $2 < \sqrt{5} < 3$. Damit liegt $x_1 = -1 - \sqrt{5} \notin D_g$ aber $x_2 = -1 + \sqrt{5} \in D_g$. Die Nullstelle von $g(x)$ liegt damit bei $\underline{\underline{x = -1 + \sqrt{5}}}$.

2 **Beurteilung der Aussagen**

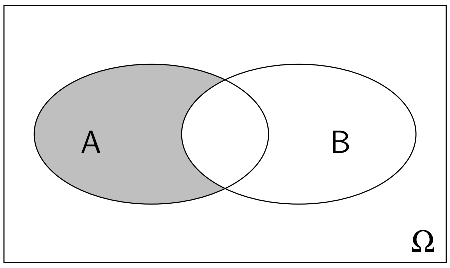
A: Es ist $H'(x) = h(x)$, daher gibt der abgebildete Graph die erste Ableitung von H wieder. Aus der Abbildung ist zu entnehmen, dass G_h bei $x = 4$ die x-Achse nur berührt, also eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat. Wenn H an dieser Stelle einen Extrempunkt hätte, müsste bei $H'(x) = h(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel vorliegen. Da dies nicht der Fall ist, ist die Aussage **falsch**.

B: Zunächst wird der Funktionswert H(1) betrachtet:

$$H(1) = \int_2^1 h(t)dt = -\int_1^2 h(t)dt$$

Die Fläche, die x-Achse und G_h einschließen liegt zwar oberhalb der x-Achse, aber da die obere Integrationsgrenze kleiner als die untere ist, ergibt sich dennoch ein negatives Vorzeichen, sodass $H(1) < 0$ ist. Die Steigung der Tangente an diesen Punkt ist positiv, da $H'(1) = h(1) > 0$ ist. Wenn die Tangente steigend ist, bei $x = 1$ aber einen negativen Funktionswert hat, dann ist auch der y-Achsenabschnitt negativ. Die Aussage ist demnach **falsch**.

1 A und B sind vereinbare Ereignisse des Ergebnisraums Ω.



a) Geben Sie das im nebenstehenden Venn-Diagramm grau markierte Ereignis E_1 möglichst einfach als Verknüpfung der Ereignisse A und B an.

b) Veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = A \cup \overline{B}$ in einem Venn-Diagramm.

3 BE

2.0 Ein Handballspieler trainiert Siebenmeter-Würfe, wobei der Torhüter seines Vereins im Tor steht. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80 % seiner Würfe ins Tor.

2.1 Der Spieler führt zwei Siebenmeter-Würfe aus.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_3 : „Der Spieler trifft jedes Mal."

E_4 : „Der Spieler trifft mindestens einmal."

3 BE

2.2 Formulieren Sie zwei Ereignisse E_5 und E_6 im Sachzusammenhang, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie folgt berechnen lassen:

$$P(E_5) = 0{,}8^{20}$$

$$P(E_6) = \binom{50}{30} \cdot 0{,}8^{30} \cdot 0{,}2^{20}$$

2 BE

3 Einer Gruppe von fünf Jugendlichen werden zwei Freikarten für ein Rockkonzert zur Verfügung gestellt. Um diese zu verteilen, werden nacheinander Lose gezogen, ohne diese zurückzulegen. Jeder Jugendliche zieht dabei genau einmal. Neben den zwei Gewinnlosen für die Freikarten befinden sich drei Nieten in der Lostrommel.

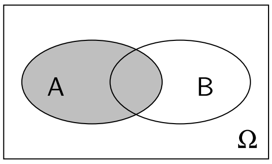
Entscheiden Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rechnung, ob der Zweite, der zieht, die gleiche Chance auf eine Freikarte hat wie der Erste. **4 BE**

1 **Ereignisse im Venn-Diagramm**

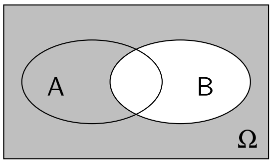
a) In Worten formuliert ist grau markiert alles, was in A ist, aber gleichzeitig nicht in B. Exakt diese Formulierung kann als Verknüpfung geschrieben werden als $\underline{\underline{E_1 = A \cap \overline{B}}}$.

b) Als Hilfestellung wird separat gezeigt, wie die Einzelereignisse A und $\overline{B}$ visualisiert werden. Die Verknüpfung mit $\cup$ bedeutet „oder", sodass am Ende alle Bereiche zu markieren sind, die einem oder beiden Einzelergebnissen entsprechen:

Nur A

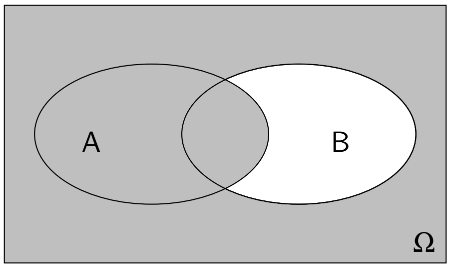


Nur $\overline{B}$



$\Rightarrow$

ODER-Vereinigung $A \cup \overline{B}$



2.1 **Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse**

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler bei einem Wurf ein Tor erzielt ist 0,8. Für zwei Tore bei zwei Würfen folgt daher:

$$P(E_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}8^2 = \underline{\underline{0{,}64}}$$

Für die Berechnung von $P(E_4)$ wird verwendet, dass E_4 das Gegenereignis von „Der Spieler trifft beide male nicht." ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass er beide nicht trifft ist $0{,}2^2$, sodass gilt:

$$P(E_4) = 1 - 0{,}2^2 = 1 - 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}96}}$$

2.2 **Formulieren der Ereignisse**

Entsprechend der Berechnung von $P(E_3)$ in Teilaufgabe 2.1 wurde hier die Einzelwahrscheinlichkeit 0,8 eines Treffers 20 mal mit sich selbst multipliziert. Das entspricht dem Ereignis

E_5: „Der Handballer trifft bei 20 Würfen jedes mal."

Vergleicht man den gegebenen Term mit der allgemeinen Berechnungsvorschrift der Binomialverteilung

$$P(\text{„k Treffer"}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

mit n Versuchen, einer Einzelwahrscheinlichkeit p und k Treffern, so können daraus die Werte $n = 50$, $k = 30$ und $p = 0{,}8$ abgelesen werden. Demnach ist $p = 0{,}8$ weiterhin die Wahrscheinlichkeit, das ein Tor erzielt wird, weshalb gilt:

E_6: „Bei 50 Würfen erzielt der Handballer genau 30 Tore."

3 **Wahrscheinlichkeit für ein Gewinnlos im ersten und zweiten Zug**

Es gibt insgesamt fünf Lose, davon sind zwei Gewinnlose. Daher gilt:

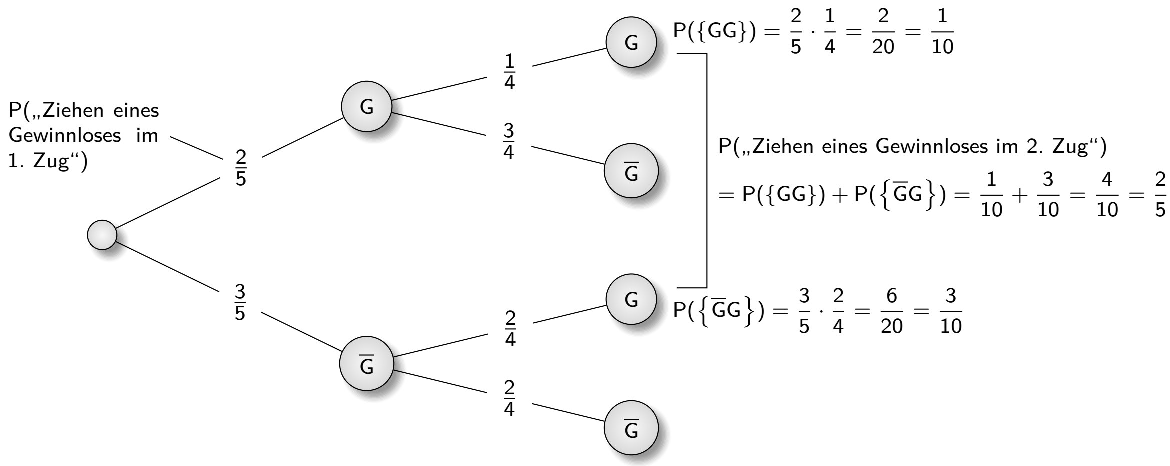
1. Zug: P(„Ziehen eines Gewinnloses im 1. Zug.“) $= \frac{2}{5}$

Wenn das Gewinnlos im 2. Zug gezogen werden soll, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder im vorherigen 1. Zug wurde bereits das erste Gewinnlos gezogen (Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$), in diesem Fall sind noch vier Lose und ein Gewinnlos vorhanden. Oder im vorherigen 1. Zug wurde kein Gewinnlos gezogen (Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$), dann gibt es im 2. Zug noch vier Lose mit zwei Gewinnlosen. Daher gilt für die Wahrscheinlichkeit:

2. Zug: P(„Ziehen eines Gewinnloses im 2. Zug.“) $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Der Zweite, der zieht, hat also die gleiche Chance auf eine Freikarte wie der Erste.

Veranschaulichung mithilfe eines Baumdiagramms (nicht gefordert):



1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \arctan\left(1-\frac{2}{5x}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstelle von f. Bestimmen Sie außerdem das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_f an. **7 BE**

1.2 Ermitteln Sie das Steigungsverhalten von G_f und geben Sie die Wertemenge von f an.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{1}{5x^2-2x+0{,}4}$] **5 BE**

1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f. **5 BE**

2.0 Gegeben ist die Funktion $u\colon x \mapsto \frac{2\cdot\ln(x)}{\ln(x)-1}$ mit der Definitionsmenge $D_u =]e; +\infty[$.

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion u streng monoton fallend ist. **4 BE**

2.2 Die Funktion u ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von u. **3 BE**

3.0 Gegeben sind die Funktionen $h\colon x \mapsto \frac{12x^2-14x}{(2x-3)(3x+1)}$ und $H\colon x \mapsto \int\limits_0^x h(t)dt$ mit den jeweils maximalen Definitionsmengen $D_h \subset \mathbb{R}$ und $D_H \subset \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von H, sowie jeweils Art und x-Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von H. **7 BE**

3.2 Zeigen Sie, dass h(x) auch in der Form $\frac{6}{(2x-3)(3x+1)}+2$ dargestellt werden kann. Ermitteln Sie anschließend eine integralfreie Darstellung von H. **8 BE**

4 Weinkenner sind davon überzeugt, dass je nach Weinsorte die passende Weintemperatur wichtig für den Genuss des Weins ist. So soll zum Beispiel Rotwein bei Raumtemperatur genossen werden. Mit einem Wein-Thermometer wird in einem Raum die Temperatur des Weins gemessen, die niedriger als die Raumtemperatur ist. In dieser Aufgabe zeigt das Wein-Thermometer unmittelbar vor dem Eintauchen in den Wein die Raumtemperatur $20\,^\circ\mathrm{C}$ an. Nach dem Eintauchen in den Wein wird es erst allmählich die Weintemperatur T_W anzeigen. Sowohl die Raumtemperatur als auch die Weintemperatur sind während der Messung als konstant zu betrachten.

Die vom Wein-Thermometer in der Einheit $^\circ\mathrm{C}$ angezeigte Temperatur $T(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Sekunden ab dem Zeitpunkt $t = 0$ des Eintauchens) lässt sich durch die Differenzialgleichung $\dot{T} = -\lambda \cdot (T - T_W)$ beschreiben, wobei $\lambda > 0$ ein reeller Parameter ist. Auf das Mitführen der Einheiten wird im Folgenden verzichtet.

Zeigen Sie, dass die Funktion $T_D \colon t \mapsto D \cdot e^{-\lambda \cdot t} + T_W$ für jeden Wert von $D \in \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen Differenzialgleichung ist, und begründen Sie, warum in der vorliegenden Situation $D = 20 - T_W$ gelten muss. **4 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \arctan\left(1 - \frac{2}{5x}\right)$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.1 **Nullstelle**

Allgemein gilt $\arctan(0) = 0$, daher ergibt sich für die Nullstelle:

$$\begin{aligned} && f(x) &= 0 & \\ \Rightarrow && 1 - \frac{2}{5x} &= 0 & \left| + \frac{2}{5x} \right. \\ \Longleftrightarrow && 1 &= \frac{2}{5x} & | \cdot (5x) \\ \Longleftrightarrow && 5x &= 2 & | : 5 \\ \Longleftrightarrow && x &= \frac{2}{5} & \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei $\underline{\underline{x_1 = \frac{2}{5}}}$.

Verhalten der Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$x \to -\infty: \quad f(x) = \arctan\left(\overbrace{1 - \frac{2}{5x}}^{\to 1^+}\right) \to \frac{\pi}{4}$$

$$x \to \infty: \quad f(x) = \arctan\left(\overbrace{1 - \frac{2}{5x}}^{\to 1^-}\right) \to \frac{\pi}{4}$$

$$x \to 0^-: \quad f(x) = \arctan\left(\overbrace{1 - \frac{2}{5x}}^{\to \infty}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

$$x \to 0^+: \quad f(x) = \arctan\left(\overbrace{1 - \frac{2}{5x}}^{\to -\infty}\right) \to -\frac{\pi}{2}$$

Gleichung der Asymptote

Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ ergibt sich die Gleichung einer waagrechten Asymptote zu $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{4}}}$.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Die Ableitung wird mithilfe der Kettenregel ermittelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\left(1 - \frac{2}{5x}\right) & \\ f'(x) &= \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5x}\right)^2 + 1} \cdot \left(1 - \frac{2}{5x}\right)'\right] & \text{(Ansatz Kettenregel)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5x}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{2}{5x^2}\right) & \text{(Anwendung)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(1-\frac{4}{5x}+\left(\frac{2}{5x}\right)^2\right)+1}\cdot\frac{2}{5x^2} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= \frac{1}{2-\frac{4}{5x}+\frac{4}{25x^2}}\cdot\frac{2}{5x^2} && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&= \frac{2}{10x^2-4x+\frac{4}{5}} && \text{(2 ausklammern)}\\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot(5x^2-2x+\frac{2}{5})} && \text{(Kürzen)}\\
&= \frac{1}{5x^2-2x+0{,}4} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Steigungsverhalten

Der Nennerterm der Ableitung wird auf Nullstellen untersucht. Dafür wird die Diskriminante betrachtet:

$$D = (-2)^2 - 4\cdot 5\cdot 0{,}4 = 4-8 = -4 < 0$$

Der Nennerterm hat keine Nullstellen. Da es sich dabei um eine nach oben geöffnete Parabel handelt, ist der Nennerterm stets größer null und damit auch $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$. Der Graph G_f ist streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich, also in $]-\infty; 0[$ und $]0; \infty[$.

Wertemenge

Aus dem Steigungsverhalten und dem Verhalten der Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs, ergibt sich die Wertemenge zu $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

1.3 **Koordinaten des Wendepunktes**

Zunächst wird die zweite Ableitung bestimmt.

Möglichkeit 1: Kettenregel

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{5x^2-2x+0{,}4} = (5x^2-2x+0{,}4)^{-1}\\
f''(x) &= \left[(-1)\cdot(5x^2-2x+0{,}4)^{-2}\cdot(5x^2-2x+0{,}4)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)}\\
&= \frac{-(5\cdot 2x-2)}{(5x^2-2x+0{,}4)^2} && \text{(Anwendung)}\\
&= \frac{-10x+2}{(5x^2-2x+0{,}4)^2}
\end{aligned}
$$

Möglichkeit 2: Quotientenregel

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{5x^2-2x+0{,}4}\\
f''(x) &= \left[\frac{(1)'\cdot(5x^2-2x+0{,}4)-1\cdot(5x^2-2x+0{,}4)'}{(5x^2-2x+0{,}4)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)}\\
&= \frac{0-1\cdot(5\cdot 2x-2)}{(5x^2-2x+0{,}4)^2} && \text{(Anwendung)}\\
&= \frac{-10x+2}{(5x^2-2x+0{,}4)^2}
\end{aligned}
$$

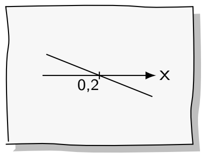
Wie bereits in der letzten Teilaufgabe gezeigt, ist der Nennerterm stets größer null, sodass das Vorzeichen der zweiten Ableitung nur von dem Zählerterm abhängig ist. Es wird die Nullstelle der Ableitung bzw. des Zählerterms bestimmt:

$$\begin{aligned} & & f''(x) &= 0 & \\ &\Rightarrow & -10x+2 &= 0 & \quad |-2 \\ &\Longleftrightarrow & -10x &= -2 & \quad |:(-10) \\ &\Longleftrightarrow & x &= 0{,}2 & \end{aligned}$$

Es wird nun eine Vorzeichentabelle betrachtet:

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<0{,}2$	$x=0{,}2$	$0{,}2<x$
Zählerterm $-10x+2$	$+$	n.def.	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	n.def.	$+$	0	$-$
G_f	$\smile$	n.def.	$\smile$	WEP	$\frown$

Skizze Graph Zählerterm



Demnach liegt bei $x = 0{,}2$ ein Wendepunkt vor. Es werden nun noch die Koordinaten dieses Punktes bestimmt:

$$f(0{,}2) = \arctan\left(1 - \frac{2}{5\cdot 0{,}2}\right) = \arctan\left(1-\frac{2}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten $\underline{\underline{\text{WEP}\left(0{,}2\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}\right)}}$.

2.0 Gegeben ist die Funktion u durch $u(x) = \dfrac{2\ln(x)}{\ln(x)-1}$ mit $D_u = \,]e;\,\infty[$.

2.1 **Nachweis des Steigungsverhaltens**

Es wird zunächst die erste Ableitung der Funktion mithilfe der Quotientenregel bestimmt:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2\ln(x)}{\ln(x)-1} \\ u'(x) &= \left[\frac{(2\ln(x))'\cdot(\ln(x)-1) - 2\ln(x)\cdot(\ln(x)-1)'}{(\ln(x)-1)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln(x)-1) - 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{\frac{2}{x}\cdot\ln(x) - \frac{2}{x} - \frac{2}{x}\cdot\ln(x)}{(\ln(x)-1)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= -\frac{2}{x\cdot(\ln(x)-1)^2} \end{aligned}$$

Im Nennerterm werden die beiden Faktoren analysiert:

- der Faktor x ist für $x \in D_u = \,]e;\,\infty[$ stets größer null

- der Faktor $(\ln(x)-1)^2$ ist null, wenn $\ln(x)-1=0$ und sonst stets größer null. Die Bedingung $\ln(x)-1=0$ ist erfüllt für

$$\begin{aligned} && \ln(x)-1 &= 0 && \mid +1 \\ \iff && \ln(x) &= 1 && \mid \exp(\ ) \\ \iff && x &= e && \end{aligned}$$

  Da aber $e \notin D_u$, ist auch dieser Faktor in D_u stets größer null.

Beide Faktoren im Nennerterm sind stets größer null, sodass die Ableitung aufgrund des negativen Vorzeichens des Bruchs stets $u'(x) < 0$ ist. Damit ist G_u streng monoton fallend.

2.2 Term der Umkehrfunktion

Einen Term für die Umkehrfunktion erhält man, indem man in $y = u(x)$ die Variablen x und y vertauscht und wieder nach y umformt:

$$\begin{aligned} && x &= \frac{2\ln(y)}{\ln(y)-1} && \mid \cdot (\ln(y)-1) \\ \iff && x\cdot(\ln(y)-1) &= 2\ln(y) && \\ \iff && x\cdot\ln(y)-x &= 2\ln(y) && \mid -2\ln(y) \\ \iff && x\cdot\ln(y)-x-2\ln(y) &= 0 && \mid +x \\ \iff && x\cdot\ln(y)-2\ln(y) &= x && \\ \iff && \ln(y)\cdot(x-2) &= x && \mid :(x-2) \\ \iff && \ln(y) &= \frac{x}{x-2} && \mid \exp(\ ) \\ \iff && y &= e^{\frac{x}{x-2}} && \end{aligned}$$

Der Funktionsterm der Umkehrfunktion lautet $\underline{\underline{u^{-1}(x) = e^{\frac{x}{x-2}}}}$.

3.0 Gegeben sind die Funktionen h durch $h(x) = \dfrac{12x^2-14x}{(2x-3)(3x+1)}$ und H durch $H(x) = \int\limits_0^x h(t)dt$ mit $D_h \subset \mathbb{R}$ und $D_H \subset \mathbb{R}$.

3.1 Maximale Definitionsmenge von H

Die Integralfunktion H(x) an sich ist zunächst überall definiert, vorausgesetzt h(x) ist definiert. Daher werden die Definitionslücken von h(x) identifiziert, indem die Nullstellen des Zähler- und des Nennerterms von h(x) bestimmt werden. Nullstellen Zählerterm:

$$\begin{aligned} && 12x^2-14x &= 0 \\ \iff && x(12x-14) &= 0 \\ \iff && x = 0 \quad &\text{oder} \quad 12x-14 = 0 \\ \iff && x = 0 \quad &\text{oder} \quad 12x = 14 \\ \iff && x = 0 \quad &\text{oder} \quad x = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Nullstellen Nennerterm:

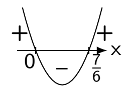
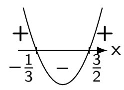
$$
\begin{aligned}
& & (2x-3)(3x+1) &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 2x-3=0 \quad &\text{oder} \quad 3x+1=0 \\
&\Longleftrightarrow & 2x=3 \quad &\text{oder} \quad 3x=-1 \\
&\Longleftrightarrow & x=\frac{3}{2} \quad &\text{oder} \quad x=-\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

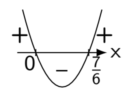
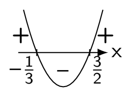
Die Nullstellen des Nennerterms stimmen nicht mit denen des Zählerterms überein, somit liegen hier Unendlichkeitsstellen von h(x) vor, welche aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden müssen. Damit ist $D_h = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\}$ und damit auch $\underline{\underline{D_H = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\}}}$.

Art und x-Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von H

Es gilt $H'(x) = h(x)$. Für h(x) als erste Ableitung von H(x) wurden bereits die Nullstellen bestimmt zu $x = 0$ und $x = \frac{7}{6}$. Es wird nun eine Vorzeichentabelle erstellt:

(Hinweis: Die beiden nachfolgenden Tabellen bilden eine zusammengehörende Tabelle, die aus Platzgründen aufgeteilt wurde.)

x	$x < -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{7}{6}$	Skizzen
h(x)-Zähler: $12x^2 - 14x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
h(x)-Nenner: $(2x-3)(3x+1)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
h(x)	$+$	n.def.	$-$	0	$+$	
G_H	$\nearrow$	n.def.	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

x	$x = \frac{7}{6}$	$\frac{7}{6} < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x$	Skizzen
h(x)-Zähler: $12x^2 - 14x$	0	$+$	$+$	$+$	
h(x)-Nenner: $(2x-3)(3x+1)$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$-$	n.def.	$+$	
G_f	HOP	$\searrow$	n.def.	$\nearrow$	

Demnach liegt ein relativer Tiefpunkt von G_H bei $x = 0$ und ein relativer Hochpunkt bei $x = \frac{7}{6}$.

3.2 **Alternativer Funktionsterm**

Die alternativ gegebene Form des Funktionsterms wird auf einen Hauptnenner gebracht und entsprechend umgeformt:

$$\begin{aligned}\frac{6}{(2x-3)(3x+1)}+2 &= \frac{6}{(2x-3)(3x+1)}+\frac{2((2x-3)(3x+1))}{(2x-3)(3x+1)}=\frac{6+2(2x-3)(3x+1)}{(2x-3)(3x+1)}\\ &= \frac{6+2(6x^2-9x+2x-3)}{(2x-3)(3x+1)}=\frac{6+12x^2-18x+4x-6}{(2x-3)(3x+1)}\\ &= \frac{12x^2-14x}{(2x-3)(3x+1)}=h(x)\end{aligned}$$

Integralfreie Darstellung von H

Das Integral wird zunächst ohne Integrationsgrenzen betrachtet:

$$\int h(t)dt=\int\left(\frac{6}{(2t-3)(3t+1)}+2\right)dt=\int\frac{6}{(2t-3)(3t+1)}dt+2t$$

Für den Term im verbleibenden Integral wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt:

$$\begin{aligned}\frac{6}{(2t-3)(3t+1)} &= \frac{A}{2t-3}+\frac{B}{3t+1}=\frac{A(3t+1)}{(2t-3)(3t+1)}+\frac{B(2t-3)}{(2t-3)(3t+1)}\\ &= \frac{A(3t+1)+B(2t-3)}{(2t-3)(3t+1)}\end{aligned}$$

Da die Nennerterme des Ausgangsterms und der umgeformten Terms übereinstimmen, müssen auch deren Zählerterme gleich sein: $6=A(3t+1)+B(2t-3)$. Durch Einsetzen verschiedener Werte für t können A und B bestimmt werden:

$$\begin{aligned}t=-\frac{1}{3} &\quad\Rightarrow\quad 6=A(-1+1)+B\cdot(-\frac{2}{3}-3)=-\frac{11}{3}B \quad\iff\quad B=-\frac{18}{11}\\ t=\frac{3}{2} &\quad\Rightarrow\quad 6=A(\frac{9}{2}+1)+B\cdot(3-3)=\frac{11}{2}A \quad\iff\quad A=\frac{12}{11}\end{aligned}$$

Damit gilt für das Integral:

$$\begin{aligned}\int h(t)dt &= \int\frac{6}{(2t-3)(3t+1)}dt+2t=\int\left(\frac{\frac{12}{11}}{2t-3}+\frac{-\frac{18}{11}}{3t+1}\right)dt+2t\\ &= \frac{1}{11}\int\left(\frac{12}{2t-3}-\frac{18}{3t+1}\right)dt+2t\\ &= \frac{1}{11}\cdot\left(12\ln(|2t-3|)\cdot\frac{1}{2}-18\ln(|3t+1|)\cdot\frac{1}{3}\right)+2t+C\\ &= \frac{1}{11}\cdot(6\ln(|2t-3|)-6\ln(|3t+1|))+2t+C=\frac{6}{11}\ln\left(\left|\frac{2t-3}{3t+1}\right|\right)+2t+C\end{aligned}$$

Dabei ist $C\in\mathbb{R}$ die Integrationskonstante, die jedoch bei der nachfolgenden bestimmten Integration entfällt. Für den integralfreien Funktionsterm gilt damit:

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_0^x h(t)dt=\left[\frac{6}{11}\ln\left(\left|\frac{2t-3}{3t+1}\right|\right)+2t\right]_0^x\\ &= \left(\frac{6}{11}\ln\left(\left|\frac{2x-3}{3x+1}\right|\right)+2x\right)-\left(\frac{6}{11}\ln\left(\left|\frac{2\cdot0-3}{3\cdot0+1}\right|\right)+2\cdot0\right)\\ &= \underline{\underline{\frac{6}{11}\ln\left(\left|\frac{2x-3}{3x+1}\right|\right)+2x-\frac{6}{11}\cdot\ln(3)}}\end{aligned}$$

4 **Nachweis der Lösung**

Es wird zunächst $\dot{T}_D$ der gegebenen Lösung ermittelt:

$$T_D(t) = D \cdot e^{-\lambda \cdot t} + T_W$$
$$\dot{T}_D(t) = D \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (-\lambda) = -D\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es werden nun $T_D(t)$ und $\dot{T}_D(t)$ in die Differenzialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \dot{T} = -\lambda \cdot (T - T_W) \\ \Rightarrow \quad & -D\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} = -\lambda \cdot (D \cdot e^{-\lambda \cdot t} + T_W - T_W) \\ \Longleftrightarrow \quad & -D\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} = -\lambda \cdot D \cdot e^{-\lambda \cdot t} \end{aligned}$$

Das Einsetzen führt zu einer wahren Aussage, demnach ist T_D eine Lösung der Differenzialgleichung.

Begründung für $D = 20 - T_W$

Zum Zeitpunkt des Eintauchens zeigt das Thermometer 20 °C an. Diese Bedingung muss auch von T_D erfüllt werden, sodass $T_D(0) = 20$ gelten muss:

$$\begin{aligned} & T_D(0) = 20 \\ \Longleftrightarrow \quad & D \cdot e^{-\lambda \cdot 0} + T_W = 20 \\ \Longleftrightarrow \quad & D \cdot e^{0} + T_W = 20 \qquad \left| -T_W \right. \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{D = 20 - T_W}} \end{aligned}$$

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \ln\left(4 - \frac{8x}{x^2+1}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ist, und berechnen Sie die Nullstellen von f auf eine Nachkommastelle genau. **6 BE**

1.2 Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f. **5 BE**

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie damit Art und Koordinaten des Extrempunkts von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}$] **8 BE**

2.0 Nun wird die Funktion $h\colon x \mapsto \int\limits_{0,6}^{x} \frac{3}{(5t-1)^2+4}\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ betrachtet.

2.1 Ermitteln Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von h die Anzahl und die Lage der Nullstellen von h. **3 BE**

2.2 Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von h. **6 BE**

3.0 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto \frac{2}{2e^{-x}+1} - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = [0; +\infty[$. Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

3.1 Begründen Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind.

A: „Der Graph von g hat bei $x = 0$ einen absoluten Extrempunkt.“

B: „Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ ist Asymptote von G_g.“

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{4e^{-x}}{(2e^{-x}+1)^2}$] **6 BE**

3.2 Die Funktion g ist umkehrbar (Nachweis ist nicht erforderlich). Die Tangente t berührt den Graphen der Umkehrfunktion von g im Punkt $P^{\bullet}\left(\frac{1}{2}\middle|?\right)$. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente t. **5 BE**

4 Auf einen bestimmten Körper wirkt zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ seit Beobachtungsbeginn ($t = 0$) eine konstante Kraft. Außerdem wirkt auf den Körper eine Reibungskraft, die proportional zum Quadrat der Momentangeschwindigkeit $v(t)$ des Körpers ist. Es gilt modellhaft die Differenzialgleichung $5\dot{v} = 50 - 2v^2$. Die Geschwindigkeit wird in $\frac{m}{s}$, die Zeit in s angegeben. Bei den folgenden Berechnungen darf auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

Untersuchen Sie, ob die Funktion v mit der Gleichung $v(t) = 5 \cdot \frac{e^{4 \cdot t} - 1}{e^{4 \cdot t} + 1}$ eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung ist. **4 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \ln\left(4 - \frac{8x}{x^2+1}\right)$ mit $D_f \subset \mathbb{R}$.

1.1 **Definitionsmenge**

Der Bruch gibt keine Einschränkung des Definitionsbereichs vor, da $x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist der Logarithmus jedoch nur für Zahlen größer null definiert, sodass gelten muss:

$$\begin{aligned} & & 4 - \frac{8x}{x^2+1} &> 0 & &\left| + \frac{8x}{x^2+1}\right. \\ &\iff & 4 &> \frac{8x}{x^2+1} & &| \cdot (x^2+1) \\ &\iff & 4(x^2+1) &> 8x & &| : 4 \\ &\iff & x^2+1 &> 2x & &| - 2x \\ &\iff & x^2 - 2x + 1 &> 0 & & \\ &\iff & (x-1)^2 &> 0 & & \end{aligned}$$

Da $x - 1$ quadriert wird, ist diese Bedingung erfüllt für alle $x \neq 1$. Für $x = 1$ wäre das Argument des Logarithmus gleich null, sodass dieser Wert aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss und somit $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}}}$ gilt.

Nullstellen

Es ist $\ln(1) = 0$, weshalb für die Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} & & f(x) &= 0 & & \\ &\Rightarrow & 4 - \frac{8x}{x^2+1} &= 1 & &| - 4 \\ &\iff & -\frac{8x}{x^2+1} &= -3 & &| \cdot (x^2+1) \\ &\iff & -8x &= -3(x^2+1) & & \\ &\iff & -8x &= -3x^2 - 3 & &| + 3x^2 + 3 \\ &\iff & 3x^2 - 8x + 3 &= 0 & & \\ &\Rightarrow & x_{1;2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} & & \\ &\iff & x_{1;2} &= \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6} & & \\ &\iff & &\underline{\underline{x_1 \approx 0{,}5}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 \approx 2{,}2}} & & \end{aligned}$$

1.2 **Gleichungen aller Asymptoten**

Es wird das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs untersucht:

$$x \to \pm\infty: \quad 4 - \frac{8x}{\underbrace{x^2+1}_{\to 0}} \to 4 \text{ (da ZG>NG)} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln\Bigg(\underbrace{4 - \frac{8x}{x^2+1}}_{\to 4}\Bigg) \to \ln(4)$$

$$x \to 1: \quad 4 - \frac{8x}{\underbrace{x^2+1}_{\to 4}} \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln\Bigg(\underbrace{4 - \frac{8x}{x^2+1}}_{\to 0^+}\Bigg) \to -\infty$$

Daraus ergibt sich die Gleichung einer waagrechten Asymptote zu $\underline{\underline{y = \ln(4)}}$ und die Gleichung einer senkrechten Asymptote zu $\underline{\underline{x = 1}}$.

1.3 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Die erste Ableitung wird mithilfe von Ketten- und Quotientenregel ermittelt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(4 - \frac{8x}{x^2+1}\right) \\
f'(x) &= \left[\frac{1}{4 - \frac{8x}{x^2+1}} \cdot \left(4 - \frac{8x}{x^2+1}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \left[\frac{1}{4 - \frac{8x}{x^2+1}} \cdot \left(-\frac{(8x)' \cdot (x^2+1) - 8x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right)\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{1}{4 - \frac{8x}{x^2+1}} \cdot \left(-\frac{8 \cdot (x^2+1) - 8x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right) && \text{(Anwendung)} \\
&= -\frac{1}{4 - \frac{8x}{x^2+1}} \cdot \frac{8x^2 + 8 - 16x^2}{(x^2+1)^2} && \text{(Hauptnenner bilden)} \\
&= -\frac{1}{\frac{4(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{8x}{x^2+1}} \cdot \frac{8x^2 + 8 - 16x^2}{(x^2+1)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= -\frac{\cancel{x^2+1}^{1}}{4x^2 - 8x + 4} \cdot \frac{-8x^2 + 8}{(x^2+1)^{\cancel{2}1}} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{1}{4x^2 - 8x + 4} \cdot \frac{8x^2 - 8}{x^2+1} && \text{(4 ausklammern)} \\
&= \frac{1}{\cancel{4}(x^2 - 2x + 1)} \cdot \frac{\cancel{4}(2x^2 - 2)}{x^2+1} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{2(x^2 - 1)}{x^2+1} && \text{(binomische Formeln)} \\
&= \frac{1}{(x-1)^{\cancel{2}1}} \cdot \frac{2(x+1)\cancel{(x-1)}^{1}}{x^2+1} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{2(x+1)}{(x-1) \cdot (x^2+1)} \quad D_{f'} = D_f && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Maximale Monotonieintervalle und Art und Koordinaten des Extrempunkts

Es wird nun die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt. Diese entspricht der Nullstelle des Zählerterms der ersten Ableitung:

$$
\begin{aligned}
& & f'(x) &= 0 & \\
&\Rightarrow & 2(x+1) &= 0 & &| : 2 \\
&\Longleftrightarrow & x + 1 &= 0 & &| - 1 \\
&\Longleftrightarrow & x &= -1 &
\end{aligned}
$$

Für eine Vorzeichenbetrachtung der Ableitung werden die drei Terme $2(x+1)$, $(x-1)$ und (x^2+1) jeweils separat betrachtet und daraus dann das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$	Skizzen
$2(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.def.	$+$	
G_f	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	n.def.	$\nearrow$	

Daraus ergibt sich, dass der Graph G_f streng monoton steigend in $]-\infty; -1]$ und $]1; \infty[$ und streng monoton fallend in $[-1; 1[$ ist. Damit liegt bei $x = -1$ ein relativer Hochpunkt der Funktion, dessen Funktionswert noch ermittelt wird:

$$f(-1) = \ln\left(4 - \frac{8 \cdot (-1)}{(-1)^2 + 1}\right) = \ln\left(4 - \frac{-8}{2}\right) = \ln(8)$$

Die Koordinaten des relativen Hochpunktes lauten $\underline{\underline{HOP\,(-1 \mid \ln(8))}}$.

2.0 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \int\limits_{0,6}^{x} \frac{3}{(5t-1)^2 + 4} dt$ mit $D_h = \mathbb{R}$.

2.1 **Anzahl und Lage der Nullstellen**

Der Wert eines Integrals ist null, wenn obere und untere Integrationsgrenze gleich sind. Da in $h(x)$ von 0,6 bis x integriert wird, ergibt sich daher eine Nullstelle zu $\underline{\underline{x_1 = 0{,}6}}$. Die erste Ableitung der Funktion ist der Integrand, das heißt es gilt:

$$h(x) = \int\limits_{0,6}^{x} \frac{3}{(5t-1)^2 + 4} dt \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{3}{\underbrace{\underbrace{(5x-1)^2}_{\geq 0} + 4}_{\geq 4}}$$

Wie bereits angedeutet, ist der Nennerterm und damit die erste Ableitung stets positiv. Das heißt, der Graph von h ist streng monoton steigend in $\mathbb{R}$. Damit handelt es sich bei der ermittelten Nullstelle $x_1 = 0{,}6$ um die einzige Nullstelle der Funktion h.

2.2 **Integralfreie Darstellung von h**

Das gegebene Integral wird zunächst ohne Integrationsgrenzen betrachtet:

$$\int \frac{3}{(5t-1)^2 + 4} dt = 3 \int \frac{1}{(5t-1)^2 + 4} dt$$

Für die Berechnung des Integrals eignet sich eine Substitution:

$$z = 5t - 1 \quad \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \frac{dz}{5}$$

Damit gilt für das Integral:

$$\int \frac{3}{(5t-1)^2+4}dt = 3\int \frac{1}{(5t-1)^2+4}dt = 3\int \frac{1}{z^2+4}\frac{dz}{5} = \frac{3}{5}\int \frac{1}{z^2+2^2}dz$$

Entsprechend Formelsammlung ist

$$\int \frac{1}{z^2+a^2}dz = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{z}{a}\right)+C$$

sodass für das vorliegende Integral gilt:

$$\frac{3}{5}\int \frac{1}{z^2+2^2}dz = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{z}{2}\right)+C = \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{z}{2}\right)+C$$

Schließlich wird rücksubstituiert:

$$\frac{3}{10}\arctan\left(\frac{z}{2}\right)+C = \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{5t-1}{2}\right)+C$$

Dabei ist $C\in\mathbb{R}$ die Integrationskonstante, die bei der nachfolgenden bestimmten Integration entfällt. Für den Funktionsterm von $h(x)$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{0,6}^{x}\frac{3}{(5t-1)^2+4}dt = \left[\frac{3}{10}\arctan\left(\frac{5t-1}{2}\right)\right]_{0,6}^{x}\\
&= \left(\frac{3}{10}\arctan\left(\frac{5x-1}{2}\right)\right)-\left(\frac{3}{10}\arctan\left(\frac{5\cdot 0{,}6-1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{5x-1}{2}\right)-\frac{3}{10}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)\\
&= \underline{\underline{\frac{3}{10}\arctan\left(\frac{5x-1}{2}\right)-\frac{3\pi}{40}}}
\end{aligned}$$

3.0 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x)=\dfrac{2}{2e^{-x}+1}-1$ mit $D_g=[0;\infty[$.

3.1 **Beurteilung der Aussagen**

A: Zunächst muss die erste Ableitung der Funktion bestimmt werden:

Möglichkeit 1: Kettenregel

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{2}{2e^{-x}+1}-1 = 2\cdot(2e^{-x}+1)^{-1}-1\\
g'(x) &= \left[2\cdot(-1)\cdot(2e^{-x}+1)^{-2}\cdot(2e^{-x}+1)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)}\\
&= \left[\frac{-2}{(2e^{-x}+1)^2}\cdot e^{-x}\cdot(-x)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)}\\
&= \frac{-2}{(2e^{-x}+1)^2}\cdot 2e^{-x}\cdot(-1) && \text{(Anwendung)}\\
&= \frac{4e^{-x}}{(2e^{-x}+1)^2} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

K

M

N

R

S

U

W

Stochastik

A

B

E

F

H

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 13 Bayern 2023

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- ✓ An den LehrplanPLUS angepasste Original-Prüfungen
- ✓ Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- ✓ Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Abiturprüfung
- ✓ Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- ✓ Inkl. Anpassungen und der Original-Prüfung 2022 mit Lösungen

Abi-Trainer für FOS · BOS 13 MT 2023

DIGITALES COACHING

- ✓ Neue Lernplattform mit geschützem Mitgliederbereich
- ✓ Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- ✓ Individuelles Online-Coaching
- ✓ Prüfungsvorbereitung Online
- ✓ Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Bestell-Nr. : EAN 9783743000889

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0088-9
€ 13,90
9 783743 000889 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de