JETZT mit LERN-VIDEOS

10. Klasse

Mittelschule 2023 MSA Bayern

Mathematik M 10

Zusätzlich mit
- Musterprüfungen im Stil der neuen Abschlussprüfung mit Lösungen

Inkl. 2022
Original-Prüfungen mit Lösungen

MS 10

Mittelschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Original-Prüfungen
Mittelschule M10
Bayern 2023

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der
Mittelschulen in Bayern

INKL.
Original-Prüfungen
2022
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsvorbereitungsbuch **Original-Prüfungen Mittelschule M10 Bayern 2023 Mathematik** sind die letzten acht zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2015 bis 2022 mit der Musterprüfung 2022 enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2022 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **Mittwoch, 21.06.2023** statt und dauert **150 Minuten**. (Stand 01.09.2022 - Angaben ohne Gewähr)
Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner und eine Formelsammlung erlaubt.

Neues

Lernplattform unter **https://lern.de/mittelschule/** kommt. Themenbezogene Übersicht - „Finde Dich leicht zurecht“ eingefügt.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig an, sich auf die Abschlussprüfung vorzubereiten und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Im Überblick

Von 2016 bis 2022		
Note 1:	45,0 – 38,0	Punkte
Note 2:	37,5 – 31,0	Punkte
Note 3:	30,5 – 23,0	Punkte
Note 4:	22,5 – 15,0	Punkte
Note 5:	14,5 – 7,0	Punkte
Note 6:	6,5 – 0	Punkte
Punkte und Notenverteilung ab 2023		
Teil A:	8	Punkte
Teil B:	40	Punkte
Note 1:	48,0 – 41,0	Punkte
Note 2:	40,5 – 33,0	Punkte
Note 3:	32,5 – 25,0	Punkte
Note 4:	24,5 – 16,0	Punkte
Note 5:	15,5 – 8,0	Punkte
Note 6:	7,5 – 0	Punkte

Impressum
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, lern.de und cleverlag sind eingetragene Marken von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team aus Pädagogen der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

8. ergänzte Auflage ©2022 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0102-2
Artikelnummer:
EAN 9783743001022

Aktuelles rund um die Prüfung 2023 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über quadratische Funktionen oder Trigonometrie und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos angezeigt mit unterschiedlichen Erklärungen? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die eventuell zusammenhängen.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtsstoff und „ON-TOP“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen in dieser Neuauflage 2022/2023 - ISBN: 978-3-7430-0102-2

- Musterprüfung nach LehrplanPLUS eingefügt und Themenbezogene Übersicht überarbeitet
- Inhaltsverzeichnins komplett neu und übersichtlicher gestaltet.
- Gemeldete und gefundene Rechen- oder Rechtschreibfehler verbessert.
- **Original-Prüfung 2022 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Inhaltsverzeichnis

Lösungen sind jeweils direkt nach jedem Prüfungsteil zu finden.

Themenbezogene Übersicht - Finde Dich leicht zurecht

Damit man sich auch während des Schuljahres optimal auf die einzelnen Arbeiten vorbereiten kann, haben wir eine **Übersicht zu den einzelnen Themengebieten** erstellt.
Mit den zusätzlichen Markierungen der einzelnen Themen in der Musterprüfung, kann man sich beispielsweise gezielt auf die Arbeit mit dem Thema *quadratische Funktionen* oder *Geradengleichungen* vorbereiten und dazu alle entsprechenden Original-Prüfungen durcharbeiten.

Kein Anspruch auf Vollständigkeit!

Quadratische Funktionen - Parabel

Parabel, Scheitelpunkt, Schnittpunkte, Scheitelpunktform, p-q-Formel, Lösungsformel

2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
AI 8 (11) AII 4 (23)	AI 3 (36) AII 5 (51) AII 8 (52)	AI 1 (65) AII 3 (80)	AI 1 (95) AII 6 (110)	AI 1 (123) AII 5 (140)	AI 1 (155) AII 5 (172)	AI 1 (187) AII 5 (203)

Lineare Funktionen - Geradengleichungen

Steigung m, Punkte auf der Geraden, Schnittpunkte, Orthogonale (Senkrechte)

AI 1 (9) AII 1 (22)	AI 1 (35) AII 1 (49) AII 8 (52)	AI 4 (66) AII 1 (79)	AI 4 (96) AII 1 (108)	AI 5 (125) AII 1 (138)	AI 5 (157) AII 1 (170)	AI 5 (188) AII 1 (201)

Lösen von Termen

Vereinfachen von Termen mit mehreren Unbekannten, Kürzen von Bruchtermen

AII 5 (24)	AI 10 (39) AII 6 (51)		AI 9 (98) AII 7 (111)	AI 4 (124) AII 9 (141)	AI 4 (156) AII 6 (172)	AI 4 (188) AII 6 (203)

Exponentialfunktionen

Wachstumsfaktor q^n, Zinseszins, Abschreibung, Bevölkerungsentwicklung

AI 4 (10) AII 7 (24)	AI 8 (38) AII 3 (50)	AI 8 (68) AII 5 (81)	AI 8 (98) AII 2 (108)	AI 2 (124) AII 3 (139)	AI 2 (156) AII 3 (171)	AI 2 (187) AII 9 (205)

Binomische Formel

Anwenden der binomischen Formeln, Platzhalter durch Terme ersetzen

AI 9 (11)	AI 6 (37)	AI 2 (65) AII 8 (83)	AII 5 (109)	AI 9 (127) AII 7 (141)	AI 9 (158) AII 6 (172)	AI 9 (189) AII 6 (203)

Lösen von Gleichungen

Bruchgleichungen lösen, Definitions- und Lösungsmenge

2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
AI 6 (10) AI 10 (11) AII 8 (24)	AI 2 (36) AII 7 (51)	AI 7 (67) AI 10 (69) AII 6 (82)	AI 2 (95) AI 9 (98) AII 3 (109)	AI 6 (125) AI 9 (127) AII 2 (139)	AI 6 (157) AII 2 (171)	AI 6 (188) AII 8 (204)

Statistik und Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm, Ereignisse, Zufallsversuche, Formulierung von Ereignissen

AI 3 (9) AII 3 (22)	AI 5 (37) AII 8 (52) AII 10 (53)	AI 5 (67) AII 7 (82)	AI 10 (99) AII 8 (111)	AI 10 (127) AII 8 (141)	AI 10 (159) AII 9 (174)	AI 10 (190) AII 4 (202)

Raumgeometrie

Volumen und Oberflächen berechnen, Kugel, Zylinder, Würfel, Kegel

AI 7 (11) AII 6 (24)	AI 7 (38) AII 4 (50) AII 8 (52)	AI 9 (68) AII 10 (83)	AI 5 (97) AII 4 (109)	AI 7 (125) AII 10 (142)	AI 7 (157) AII 8 (173)	AI 7 (188) AII 2 (201)

Geometrie der Ebene

Berechnung von Längen, Winkeln, Flächen, Dreiecke, Vierecke, Vielecke, Trigonometrie, Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz

AI 5 (10) AII 9 (25)	AI 4 (36) AII 2 (49) AII 8 (52)	AI 3 (66) AII 4 (81) AII 9 (83)	AI 3 (96) AII 9 (112)	AI 3 (124) AII 4 (139)	AI 3 (156) AII 4 (171)	AI 3 (187) AI 8 (189) AII 7 (204)

Geometrie - Strahlensätze/Streckung

Ähnliche Figuren, Strahlensätze, Streckung

AI 2 (9) AI 5 (10) AII 2 (22) AII 10 (25)	AI 9 (39) AII 9 (52)	AI 6 (67) AII 2 (80)	AI 6 (97) AI 7 (98) AII 9 (112) AII 10 (112)	AI 8 (126) AII 6 (140)	AI 8 (158) AII 7 (173)	AI 8 (189) AII 3 (202)

Hinweis zur Prüfung 2023 in Mathematik M10 Mittelschule

Sonderregelung für den MSA 2023 an der Mittelschule:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 01.08.2022):

- **Aus LB M10 10.4 Trigonometrie:**
  Sinus und Kosinus im Einheitskreis.
- **Aus LB M10 10.5 Flächeninhalt und Rauminhalt:**
  Notwendige Skizzen erstellen.
- **Aus LB M9 9.6 Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeiten:**
  Mehrstufige Zufallsexperimente
- **Aus LB M10 10.7 Funktionale Zusammenhänge:**
  Plausibilität der Ergebnisse im Sachzusammenhang überprüfen. Umgekehrte Proportionalität.

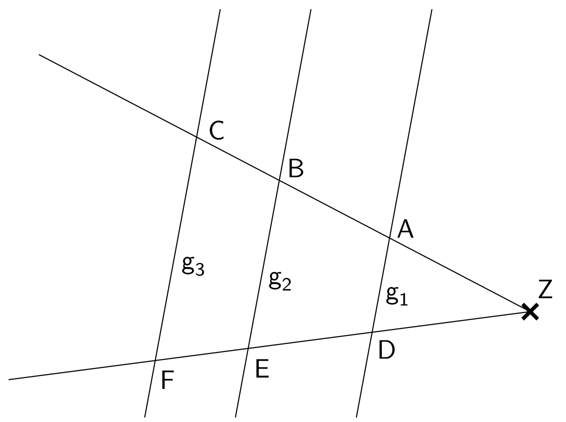
Bitte fragen Sie bzgl. aktueller Änderungen immer auch noch einmal bei Ihrer Lehrkraft nach!

Mittlerer Schulabschluss an der Mittelschule Mathematik 2016

1. Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte A (4 | 1,5) und B (− 3 | − 2).
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_1 rechnerisch.
   b) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Rechnung, ob der Punkt C (− 13 | − 44,5) auf der Geraden $g_2: y = 4x + 6{,}5$ liegt.
   c) Gegeben ist die Gerade $g_3: y = 2 - 0{,}5x$.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N von g_3 mit der x-Achse und geben Sie N an.
   d) Die Gerade g_3 schneidet die Gerade g_2 im Punkt T.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten von T und geben Sie den Punkt an.
   e) Zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_3 in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm).
   f) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels α, den die Gerade g_1 mit der x-Achse einschließt.

(7 Pkt.)

2. Schreiben Sie die folgenden Aussagen auf Ihr Lösungsblatt und ersetzen Sie jeweils den Platzhalter □ so, dass die Streckenverhältnisse richtig wiedergegeben werden.
Es gilt: $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$
   a) $\square : \overline{ZA} = \overline{ZF} : \overline{ZD}$
   b) $\overline{BE} : \overline{CF} = \square : \overline{ZF}$
   c) Wenn gilt:
   $\overline{ZA} = 4$ cm,
   $\overline{ZC} = 8$ cm,
   $\overline{AD} = 3$ cm,
   dann gilt:
   $\overline{CF} = \square$ cm



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

(3 Pkt.)

3. In einer Tüte befinden sich 4 rote, 2 grüne und 1 weißes Gummibärchen.
Christiane nimmt ein Gummibärchen heraus und isst es. Anschließen nimmt sie ein zweites und isst es ebenfalls.
   a) Stellen Sie die möglichen Ereignisse in einem Baumdiagramm dar und beschriften Sie die einzelnen Äste mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Gummibärchen rot sind.
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keines der beiden entnommenen Gummibärchen weiß ist.

(4 Pkt.)

Fortsetzung nächste Seite

5. Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich.
Es gilt: $x, y, z \neq 0$.

$$\frac{4x^4 \cdot 3y^{-8} \cdot 5z^{-3} \cdot 2x^{-2} \cdot 4y^7 \cdot 1z^4}{16z \cdot 15x^2 \cdot 3y^{-2}}$$

(2 Pkt.)

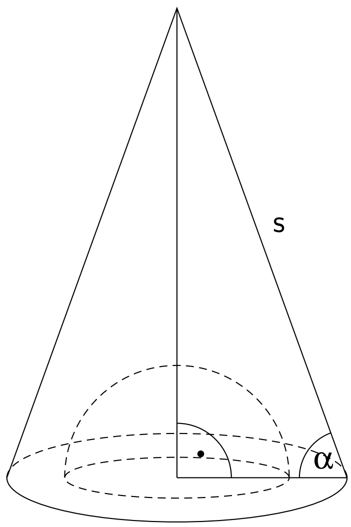
6. Aus einem kegelförmigen Werkstück wurde eine halbkugelförmige Vertiefung herausgefräst (siehe Skizze).

Die Mantellinie s des Kegels ist 15 cm lang.
Sie schließt mit dem Radius der Grundfläche des Kegels den Winkel $\alpha = 53{,}1°$ ein.

Der Radius der Halbkugel beträgt zwei Drittel des Radius der Kegelgrundfläche.

Berechnen Sie das Volumen des Werkstücks.

Hinweis:
Skizze nicht maßstabsgetreu



(4 Pkt.)

7. Markus erwirbt einen Motorroller zum Preis von 2800 €.

a) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren dieser Motorroller noch einen Wert von 210 € hätte, wenn man von einem gleichbleibenden jährlichen Wertverlust von 21 % in Bezug auf das jeweilige Vorjahr ausgeht.

b) Tatsächlich beträgt der Wertverlust im ersten Jahr 23 %, in den folgenden Jahren jeweils 16 % vom Wert des Vorjahres. Berechnen Sie den Wert des Rollers nach 4 Jahren.

c) Auch Thomas kauft sich einen Motorroller, jedoch zum Preis von 3200 €. Ermitteln Sie rechnerisch, bei welchem jährlich gleichbleibenden prozentualen Wertverlust in Bezug auf das Vorjahr der Wert des Rollers nach 10 Jahren noch 500 € betragen würde.

(5 Pkt.)

8. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch.

$$6 = \frac{36}{6-3x} - \frac{5x}{3x-6}$$

(4 Pkt.)

Fortsetzung nächste Seite

Durch Einsetzen dieser Werte in die Funktionsgleichung von p_2 oder p_4 können die Funktionswerte an diesen Stellen ermittelt werden:

$$x_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = -0^2 + 4{,}25 = 4{,}25$$
$$x_2 = -1{,}5 \quad \Longleftrightarrow \quad y_2 = -(-1{,}5)^2 + 4{,}25 = -2{,}25 + 4{,}25 = 2$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte lauten $C\,(0\,|\,4{,}25)$ und $Q\,(-1{,}5\,|\,2)$.

e) Aus der Abbildung können die Koordinaten der Punkte $P\,(-4\,|\,3)$ und $Q\,(0\,|\,-5)$ abgelesen werden, die beide auf der Geraden g liegen. Damit kann zunächst der Anstieg bestimmt werden:
Gegeben: $P\,(-4\,|\,3)$; $Q\,(0\,|\,-5)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-3}{0-(-4)} = \frac{-8}{4} = -2$$

Der y-Achsenabschnitt kann direkt zu $t = -5$ abgelesen werden. Die Geradengleichung lautet also $g: y = -2x - 5$.

f) Für den Anstieg der Gerade g gilt: $\tan\alpha = |m|$ (hier wird der Betrag des Anstiegs eingesetzt, damit sich ein positiver Winkel ergibt). Also folgt für den Winkel:

$$\begin{aligned}
&& \tan\alpha &= |m| \\
\Longleftrightarrow && \tan\alpha &= |-2| && |\tan^{-1}(\,) \\
\Longleftrightarrow && \alpha &= \tan^{-1}(2) \\
\Longleftrightarrow && \alpha &\approx 63{,}4^\circ
\end{aligned}$$

g) Die Koordinaten des Scheitelpunktes können direkt abgelesen werden: $S_5\left(\overset{x_s}{-3}\,\middle|\,\overset{y_s}{4}\right)$. Aus den Koordinaten des Scheitelpunktes kann nun direkt die Scheitelpunktform aufgestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Parabel nach unten geöffnet ist, also ein negatives Vorzeichen besitzt. Die Scheitelpunktform kann dann in die Normalform umgewandelt werden:

$$\begin{aligned}
&& y &= -(x - x_s)^2 + y_s \\
&& y &= -(x+3)^2 + 4 \\
\Longleftrightarrow && y &= -(x^2 + 6x + 9) + 4 \\
\Longleftrightarrow && y &= -x^2 - 6x - 5
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet $p_5: y = -x^2 - 6x - 5$.

5. Da sowohl im Zähler als auch im Nenner nur Produkte vorkommen, kann der Term T zunächst nach Variablen sortiert werden:

$$T = \frac{4x^4 \cdot 3y^{-8} \cdot 5z^{-3} \cdot 2x^{-2} \cdot 4y^7 \cdot 1z^4}{16z \cdot 15x^2 \cdot 3y^{-2}} = \frac{4x^4 \cdot 2x^{-2}}{15x^2} \cdot \frac{3y^{-8} \cdot 4y^7}{3y^{-2}} \cdot \frac{5z^{-3} \cdot z^4}{16z}$$

Als nächstes können alle Zahlen vor die Brüche gezogen und zusammengefasst werden:

$$T = \frac{4 \cdot 2}{15} \cdot \frac{x^4 \cdot x^{-2}}{x^2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{3} \cdot \frac{y^{-8} \cdot y^7}{y^{-2}} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{z^{-3} \cdot z^4}{z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4 \cdot x^{-2}}{x^2} \cdot \frac{y^{-8} \cdot y^7}{y^{-2}} \cdot \frac{z^{-3} \cdot z^4}{z}$$

Verwendet man nun noch, dass $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ ist ergibt sich:

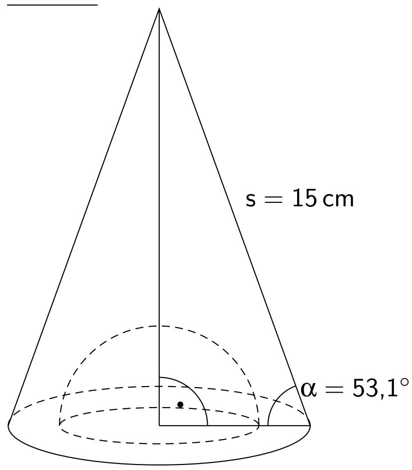
$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 \cdot x^2} \cdot \frac{y^2 \cdot y^7}{y^8} \cdot \frac{z^4}{z \cdot z^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{y^9}{y^8} \cdot \frac{z^4}{z^4} = \frac{2}{3}y$$

6. Zunächst wird der Radius r_K des Kegels berechnet. Dazu wird das Dreieck mit dem Winkel α und der Mantellinie s betrachtet:

$$\begin{aligned} && \cos\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} && \\ \Longleftrightarrow && \cos 53{,}1^\circ &= \frac{r_K}{s} && |\cdot s \\ \Longleftrightarrow && r_K &= \cos 53{,}1^\circ \cdot 15\,\text{cm} && \\ \Longleftrightarrow && r_K &\approx 9\,\text{cm} && \end{aligned}$$

Der Radius r_H der Halbkugel beträgt laut Angabe zwei Drittel des Radius des Kegels. Somit hat die Halbkugel einen Radius von $r_H = \frac{2}{3} \cdot 9\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$. Im selben Dreieck wie oben beschrieben, kann die Höhe h_K des Kegels mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (in cm):

Skizze:



$$\begin{aligned} && s^2 &= r_K^2 + h_K^2 && |-r_K^2 \\ \Longleftrightarrow && h_K^2 &= s^2 - r_K^2 && |\sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow && h_K &= \sqrt{15^2 - 9^2} && \\ \Longleftrightarrow && h_K &= 12 && \end{aligned}$$

Das Volumen des Werkstücks entspricht nun dem Volumen V_K des Kegels, abzüglich des Volumens V_H der Halbkugel. Mit den ermittelten Längen können diese Volumina bestimmt werden:

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_K^2 \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (9\,\text{cm})^2 \cdot (12\,\text{cm}) \approx 1\,017{,}4\,\text{cm}^3$$
$$V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_H^3 = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6\,\text{cm})^3 \approx 452{,}2\,\text{cm}^3$$

Das Gesamtvolumen des Werkstücks beträgt also:

$$V = V_K - V_H = 1\,017{,}4\,\text{cm}^3 - 452{,}2\,\text{cm}^3 = 565{,}2\,\text{cm}^3$$

7. a) Es wird allgemein mit der folgenden Formel gerechnet:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Dabei ist $K_n = 210\,€$ der Wert nach n Jahren, $K_0 = 2\,800\,€$ der Startwert und $q = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$ der Prozentsatz, auf den der Wert nach jeweils einem Jahr sinkt. Es gilt also:

Gegeben: $K_n = 210\,€$; $K_0 = 2\,800\,€$; $q = 0{,}79$

Gesucht: n

Lösung:

$$\begin{aligned} && K_n &= K_0 \cdot q^n && \\ \Longleftrightarrow && 210\,€ &= 2\,800\,€ \cdot 0{,}79^n && |:(2\,800\,€) \\ \Longleftrightarrow && \frac{3}{40} &= 0{,}79^n && |\log_{0{,}79}(\,) \\ \Longleftrightarrow && n &= \log_{0{,}79}\left(\frac{3}{40}\right) && \\ \Longleftrightarrow && n &\approx 11 && \end{aligned}$$

Mittlerer Schulabschluss
an der Mittelschule
Mathematik
2018

1. a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $D\,(1\,|\,6)$ und $B\,(4\,|\,3)$. Berechnen Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.

   b) Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat die Funktionsgleichung $p_2: y = -x^2 + x + 3{,}75$. Geben Sie die Scheitelpunktform dieser Parabel an.

   c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 der Parabel p_2 mit der x-Achse und geben Sie diese Punkte an.

   d) Eine weitere nach unten geöffnete Normalparabel p_3 hat den Scheitelpunkt $S_3\,(4\,|\,7)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Parabel p_3 in der Normalform.

   e) Die Parabel p_4 hat die Funktionsgleichung $p_4: y = (x-2)^2 + 3$. Geben Sie die Koordinaten de Scheitelpunkts S_4 von p_4 an.

   f) Geben Sie die Koordinaten von zwei beliebigen Punkten G und H an, die auf der Parabel p_4 liegen.

   g) Zeichnen Sie die Graphen der Parabeln p_3 und p_4 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
   Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von –2 bis 8, y-Achse von –1 bis 10

(8 Pkt.)

2. Folgende Gleichungen sind Anwendungen von Binomischen Formeln.
   Ersetzen Sie jeweils den Platzhalter ■ durch die entsprechenden Terme und schreiben Sie die vollständigen Gleichungen auf Ihr Lösungsblatt.

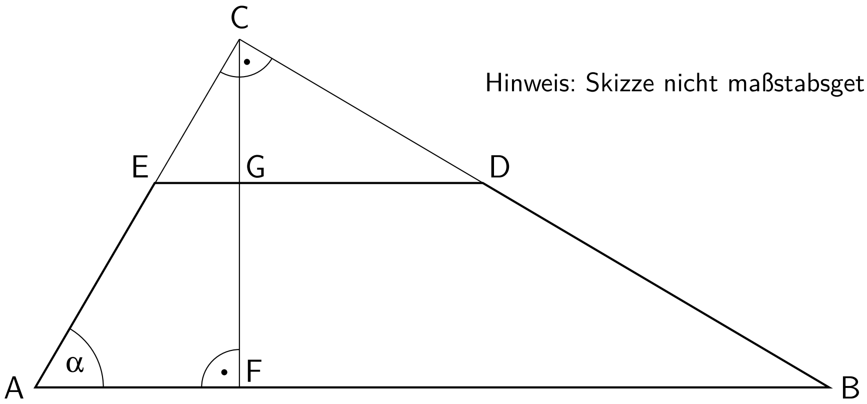
   a) $\blacksquare + \blacksquare + \frac{1}{4}c^8 = (3ab^3 + \blacksquare)^2$

   b) $6{,}25z^2 - 30yz + \blacksquare = (\blacksquare - \blacksquare)^2$

(3 Pkt.)

Fortsetzung nächste Seite

3. In einer Figur (siehe Skizze) ist [AB] parallel zu [ED].
Es gilt: $\overline{AC} = 2{,}5\,dm$, $\overline{AF} = 1{,}25\,dm$ und $\overline{FG} = 1{,}5\,dm$



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels α rechnerisch.

b) Berechnen Sie jeweils die Länge der Strecken [ED] und [AB].

c) Ermitteln Sie rechnerisch den Flächeninhalt des Trapezes ABDE.

(5 Pkt.)

4. Folgende Wertepaare sind Punkte auf der Geraden g_1:

x	-10	-5	0	2,5
y	-4	-1	2	3,5

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_1 rechnerisch.

b) Die Gerade g_2 ist durch die Gleichung $-x + 5y = 20$ bestimmt.
Die Gerade g_3 steht senkrecht auf der Geraden g_2 und verläuft durch den Punkt $A(-3\,|\,0)$.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_3 rechnerisch.

c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Gerade $g_4 : y = -5x - 5$
die Gerade g_2 im Punkt $B(5\,|\,5)$ schneidet.

d) Überprüfen Sie folgende Aussagen und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(I) Die Gerade g_4 verläuft parallel zur Geraden g_5, die durch die Gleichung $-5x + y = -3$ bestimmt ist.

(II) Die Gerade g_4 steht senkrecht auf der Geraden $g_6 : y = 0{,}2x$.

e) Zeichnen Sie die Graphen der Geraden g_1 und g_6 in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.
Hinweis zum Platzsbedarf: x-Achse von –6 bis 6, y-Achse von –3 bis 6

(8 Pkt.)

Fortsetzung nächste Seite

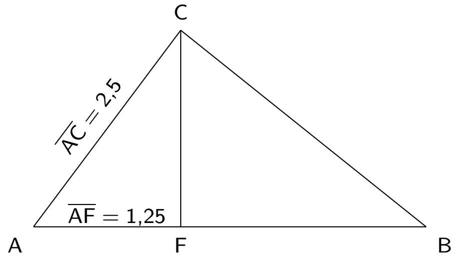
b) Im selben Teildreieck wie in Teilaufgabe a) kann zunächst mit dem Satz des Pythagoras gerechnet werden (in dm; Skizze siehe Teilaufgabe a)):

$$\begin{aligned} & \overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2 && \mid -\overline{AF}^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CF}^2 = 2{,}5^2 - 1{,}25^2 && \mid \sqrt{} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CF} \approx 2{,}2 \end{aligned}$$

Im Dreieck ABC kann nun mit dem Kathetensatz die Länge der Strecke [AB] ermittelt werden (in dm):

$$\begin{aligned} & \overline{AC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AB} && \mid : \overline{AF} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{AB} = \frac{2{,}5^2}{1{,}25} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{AB} = 5 \end{aligned}$$

Skizze (Maße in dm):



Um schließlich noch die Länge der Strecke [ED] zu ermitteln, wird für die Strecke [CF] und die beiden parallelen Stecken [ED] und [AB] der Vierstreckensatz verwendet.

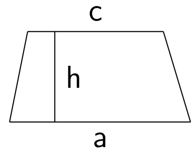
$$\begin{aligned} & \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CG}} \\ \Rightarrow\quad & \frac{5}{\overline{ED}} = \frac{2{,}2}{2{,}2 - 1{,}5} && \mid \cdot \overline{ED} \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{2{,}2 \cdot \overline{ED}}{0{,}7} = 5 && \mid \cdot \frac{0{,}7}{2{,}2} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{ED} = \frac{0{,}7}{2{,}2} \cdot 5 \approx 1{,}6 \end{aligned}$$

Die Strecke [ED] ist 1,6 dm lang.

c) Die Formel für den Flächeninhalt A des Trapezes lautet:

$$A_T = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

Skizze



Setzt man nun die Längen der entsprechenden Strecken des Trapezes ABDE ein, so erhält man den Flächeninhalt A_T des Trapezes (in dm):

$$A_T = \frac{\overline{AB} + \overline{ED}}{2} \cdot \overline{FG} = \frac{5 + 1{,}6}{2} \cdot 1{,}5 \approx 5{,}0$$

Der Flächeninhalt des Trapezes ist also ungefähr 5,0 dm².

4. a) Aus der Tabelle können zwei beliebige Punkte entnommen werden. Die Steigung m_1 ergibt sich aus den Koordinaten der Punkte.
Gegeben: z. Bsp.: $P(-10 \mid -4)$; $Q(-5 \mid -1)$

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - (-4)}{-5 - (-10)} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

2018

Der y-Achsenabschnitt kann durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes und der Steigung m ermittelt werden. Alternativ kann er in diesem Fall aus den Koordinaten des Punktes $(0\,|\,2)$ direkt zu $t_1 = 2$ abgelesen werden. Setzt man in die allgemeine Form $y = m_1 \cdot x + t_1$ ein, ergibt sich die Funktionsgleichung also zu $g_1 : y = 0{,}6x + 2$.

b) Gegeben ist die Gerade $g_2 : -x + 5y = 20$. Um die Steigung von g_2 zu erhalten, muss man nach y auflösen:

$$\begin{aligned} g_2 : 20 &= -x + 5y && \mid +x \\ 5y &= x + 20 && \mid :5 \\ \iff \quad y &= 0{,}2x + 4 \end{aligned}$$

Die Steigung von p_2 ist $m_2 = 0{,}2$. Da g_2 und g_3 senkrecht aufeinander stehen sollen, muss gelten $m_2 \cdot m_3 = -1$.

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot m_3 &= -1 && \mid :0{,}2 \\ \iff \quad m_3 &= -1 : 0{,}2 = -5 \end{aligned}$$

Aus den Koordinaten des Punktes $A(-3\,|\,0)$ wird außerdem der y-Achsenabschnitt t_3 bestimmt:

$$\begin{aligned} g_3 : y &= -5x + t_3 \\ 0 &= -5 \cdot (-3) + t_3 && \mid -15 \\ \iff \quad t_3 &= -15 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet somit: $g_3 : y = -5x - 15$.

c) Um zu überprüfen, ob sich die beiden Geraden schneiden setzt man die Funktionsterme von g_2 und g_4 gleich:

$$\begin{aligned} g_2 &= g_4 \\ 0{,}2x + 4 &= -5x - 5 && \mid +5x \\ \iff \quad 5{,}2x + 4 &= -5 && \mid -4 \\ \iff \quad 5{,}2x &= -9 && \mid :5{,}2 \\ \iff \quad x &= \frac{-9}{5{,}2} \approx -1{,}7 \end{aligned}$$

Die Gerade g_4 schneidet die Gerade g_2 demnach nicht bei $x = 5$, sondern bei $x = -1{,}7$. Der Punkt $B(5\,|\,5)$ ist somit kein Schnittpunkt.

d) I) **falsch.** Verläuft die Gerade g_4 parallel zu g_5, so muss die Steigung der beiden Geraden gleich sein: $m_4 = m_5$.
Bringt man beide Gleichungen in dieselbe Form, so sieht man, dass die Steigungen nicht gleich sind:

$$\begin{aligned} g_4 &: y = -5x - 5 \\ g_5 &: y = 5x - 3 \\ m_4 &= -5 \neq 5 = m_5 \end{aligned}$$

Mittlerer Schulabschluss an der Mittelschule Mathematik 2022

1. a) Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der nach oben geöffneten Normalparabel p_1 mit dem Scheitelpunkt $S_1\,(-4\,|\,1)$ in der Normalform.

   b) Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 geht durch die Punkte $A\,(-4\,|\,1)$ und $B\,(0\,|\,1)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2 in der Scheitelpunktform und geben Sie den Scheitelpunkt S_2 an.

   c) Bestimmen Sie zeichnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte Q und R der beiden Normalparabeln p_1 und p_2 in einem Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. Geben Sie Q und R an.

   d) Die Normalparabeln $p_3\colon y = x^2 + 2x - 2$ sowie $p_4\colon y = -x^2 - 2x + 4$ schneiden sich in den Punkten M und N.
   Berechnen Sie die Koordinaten von M und N und geben Sie beide Punkte an.

(8 Pkt.)

2. Der Neupreis eines Autos beträgt 37 450 €.

   a) Berechnen Sie, in wie vielen Jahren sich der Wert dieses Autos auf 25 000 € verringert, wenn man von einem jährlich gleichbleibenden prozentualen Wertverlust von 12,7 % ausgeht.

   b) Der Neuwagen soll nach acht Jahren als Gebrauchtwagen für 9 000 € verkauft werden. Bestimmen Sie für diesen Fall den Wertverlust pro Jahr in Prozent, unter der Annahme, dass dieser über die Jahre hinweg gleich bleibt.

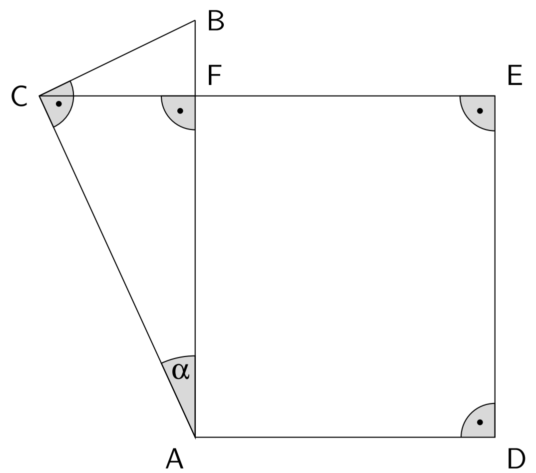
   c) Tatsächlich ist der Wertverlust aber nicht gleichbleibend.
   Im ersten Jahr beträgt er 25 %, im zweiten Jahr 18 % und in den darauffolgenden vier Jahren jeweils 9 %.
   Ermitteln Sie den Wert des Autos nach diesen 6 Jahren.

(4 Pkt.)

3. Die folgende Abbildung zeigt eine Figur, bei der gilt:

$\overline{AD} = 8\,\text{cm}$;
$\alpha = 25°$;
$A_{ADEF} = 72\,\text{cm}^2$
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Hinweis:
Skizze nicht maßstabsgetreu



Quelle: StMUK

(3 Pkt.)

Fortsetzung nächste Seite

4. Vereinfachen Sie den unten stehenden Term so weit wie möglich.
Es gilt: $x,y,z \neq 0$

$$\frac{21x^{-4} \cdot 9y^3 \cdot 6z^5 \cdot x^3 \cdot 8z^{-8}}{4y^2 \cdot 7x^{-6} \cdot 3y \cdot 18z^{-4}}$$

(2 Pkt.)

5. a) Die Gerade g_1 verläuft durch den Punkt $A\,(4\,|\,4{,}5)$ und hat die Steigung $m_1 = \frac{3}{4}$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_1.

b) Berechnen Sie die x-Koordinate der Nullstelle N der Gerade $g_2\colon\ y = -2{,}5x - 7{,}5$.

c) Der Punkt $P\,(-4\,|\,y)$ liegt auf g_2.
Berechnen Sie die fehlende y-Koordinate.

d) Die Gerade g_4 durch den Punkt $C\,(4{,}5\,|-2)$ steht senkrecht auf der Geraden $g_3\colon\ y = 0{,}25x + 4$.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_4.

e) Die Gerade g_5 mit der Funktionsgleichung $14 - 3y = 3{,}75x - 7$ schneidet die Gerade g_3 im Punkt D.
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunkts D.

f) Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_6, auf der die Punkte $E\,(4{,}5\,|-2)$ und $F\,(-1{,}5\,|\,6)$ liegen.

g) Zeichnen Sie die Geraden g_2, g_3 und g_6 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

(8 Pkt.)

6. Gegeben ist folgende Gleichung:

$$\frac{1{,}5x + 6}{x + 6{,}5} = \frac{x - 3}{2x - 3}$$

Geben Sie die Definitionsmenge an, lösen Sie die Gleichung nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge. (4 Pkt.)

7. In einer Firma werden vier gleich große Pralinenkugeln, die vollständig mit Marzipan gefüllt sind, mit einem Durchmesser von jeweils 3 cm übereinander in eine Schachtel verpackt.

a) Die zylinderförmige Verpackung hat eine Höhe von 12,2 cm und einen Innendurchmesser von 3,2 cm.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Luft in der Schachtel am Innenvolumen der Schachtel nach dem Verpacken der vier Pralinen.

b) Jede Pralinenkugel soll mit einer dünnen Blattgoldschicht überzogen werden.
Berechnen Sie, wie viele cm^2 Blattgold für eine Pralinenkugel mindestens benötigt werden.

c) Bestimmen Sie die Masse einer massiven Kugel aus Gold mit einem Volumen von $753\,mm^3$.
Dabei wiegt ein $1\,cm^3$ Gold 19,3 g.

(5 Pkt.)

Fortsetzung nächste Seite

1. a) Aus den Koordinaten des Scheitelpunktes $S_1\left(\begin{array}{c|c} x_s & y_s \\ -4 & 1\end{array}\right)$ kann die Scheitelpunktform aufgestellt und zur Normalform umgeformt werden. Das Vorzeichen ist positiv, da die Parabel nach oben geöffnet ist:

$$\begin{aligned} & y = (x - x_s)^2 + y_s \\ & y = (x-(-4))^2 + 1 \\ & y = (x+4)^2 + 1 \iff y = (x^2 + 8x + 16) + 1 \\ \iff & y = x^2 + 8x + 17 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{p_1: y = x^2 + 8x + 17}}$.

b) Es gibt zwei Möglichkeiten die Scheitelpunktform der Parabel zu ermitteln:

Variante 1: Ermitteln der Normalform, Umformen zur Scheitelpunktform

Die Koordinaten beider Punkte werden in die Normalform $y = -x^2 + px + q$ eingesetzt (negatives Vorzeichen, da nach unten geöffnet). Dabei ergeben sich zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{A einsetzen: (I)} \quad & 1 = -(-4)^2 + p\cdot(-4) + q \\ \iff \quad & 1 = -16 - 4p + q \\ \text{B einsetzen: (II)} \quad & 1 = -0^2 + p \cdot 0 + q \\ \iff \quad & q = 1 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (II) ergibt sich direkt der Wert von q, der nun in Gleichung (I) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} q = 1 \text{ in (I)}: \quad & 1 = -16 - 4p + 1 \quad && |+15 \\ \iff \quad & 16 = -4p && |:(-4) \\ \iff \quad & p = -4 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet $p_2\colon y = -x^2 - 4x + 1$. Um daraus nun die Koordinaten des Scheitelpunktes zu ermitteln, wird die Gleichung entweder mittels quadratischer Ergänzung in Scheitelpunktform gebracht, oder die Formel für die Scheitelpunktkoordinaten verwendet.

quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} & y = -x^2 - 4x + 1 \\ \iff & y = -(x^2 + 4x) + 1 \\ \iff & y = -(x^2 + 2\cdot 2x + 2^2 - 2^2) + 1 \\ \iff & y = -(x^2 + 2\cdot 2x + 2^2) + 4 + 1 \\ \iff & y = -(x+2)^2 + 5 \end{aligned}$$

Alternativ durch Formel:

$a = -1;\ b = -4;\ c = 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}\left(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} \,\middle|\, \mathbf{c} - \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4a}}\right) \\ \iff & S\left(-\frac{-4}{2\cdot(-1)} \,\middle|\, 1 - \frac{(-4)^2}{4\cdot(-1)}\right) \\ \iff & S(-2\,|\,5) \\ \iff & y = -(x+2)^2 + 5 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten $\underline{\underline{S_2(-2\,|\,5)}}$. Die Gleichung lautet $\underline{\underline{p_2: y = -(x+2)^2 + 5}}$.

Variante 2: Verwenden der Symmetrie der Parabel

Da beide der gegebenen Punkte den gleichen Funktionswerte haben, liegt der x-Wert des Scheitelpunkts aufgrund der Symmetrie einer Parabel mittig zwischen den zwei gegebenen

Punkten, also bei $x_s = -2$. Die Scheitelpunktform lautet demnach (Vorzeichen negativ, da nach unten geöffnet):

$$y = -(x - x_s)^2 + y_s = -(x - (-2))^2 + y_s = -(x + 2)^2 + y_s$$

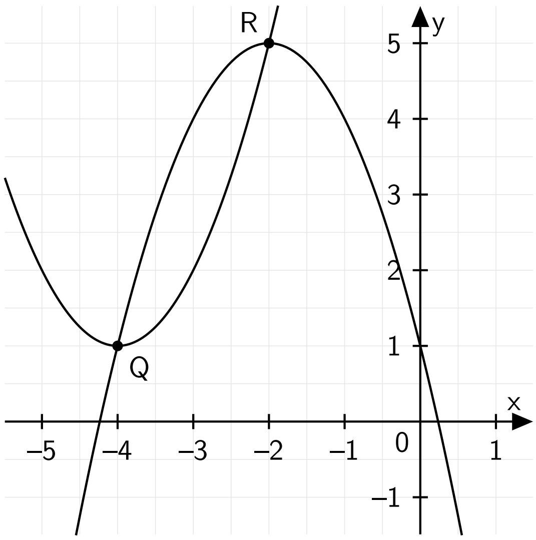
Der Wert von y_s kann ermittelt werden, indem die Koordinaten des Punktes B für x und y eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & y = -(x+2)^2 + y_s \\ \Rightarrow\quad & 1 = -(0+2)^2 + y_s \\ \Longleftrightarrow\quad & 1 = -4 + y_s \qquad \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 5 = y_s \end{aligned}$$

Die Gleichung lautet $\underline{\underline{p_2: y = -(x+2)^2 + 5}}$. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $\underline{\underline{S_2(-2 \mid 5)}}$.

c) Für die grafische Darstellung können bereits ermittelte Punkte der letzten Teilaufgaben oder weitere berechnete Punkte verwendet werden.

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da sie für den Buchdruck skaliert wurde.)



Die Schnittpunkte ergeben sich aus der Abbildung zu $\underline{\underline{Q(-4 \mid 1)}}$ und $\underline{\underline{R(-2 \mid 5)}}$.

d) Für die Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte M und N werden zunächst die beiden Gleichungen gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - 2 = -x^2 - 2x + 4 \qquad \mid -(-x^2 - 2x + 4) \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x^2 + 4x - 6 = 0 \qquad \mid :2 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 + 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Lösungsformel:
$a = 1; b = 2; c = -3$

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$

p-q-Formel:
$p = 2; q = -3$

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} \end{aligned}$$

$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$

Beide Werte können nun in eine der Gleichungen eingesetzt werden um die zugehörigen y-Werte zu ermitteln:

$$p_3: y = x^2 + 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 2 = 1$$
$$p_3: y = x^2 + 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 1$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte lauten $\underline{\underline{M(-3|1)}}$ und $\underline{\underline{N(1|1)}}$.

2. a) Es handelt sich hier um eine exponentielle Abnahme. Gesucht ist der Zeitraum, indem sich der Wert des Wagens auf 25000 € reduziert.
Gegeben: $W_0 = 37450$ €; $W_n = 25000$ €; $q = 1 - 0{,}127 = 0{,}873$
Gesucht: n

$$\begin{aligned}
& W_n = W_0 \cdot q^n \\
\Longleftrightarrow \quad & 25000 = 37450 \cdot 0{,}873^n && |:37450 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{25000}{37450} = 0{,}873^n && |\log_{0,873}() \\
\Longleftrightarrow \quad & n = \log_{0,873}\left(\frac{25000}{37450}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & n \approx 3
\end{aligned}$$

Nach $\underline{\underline{3}}$ Jahren ist der Wert des Autos auf 25000 € gefallen.

b) Es muss nun nach der Rate q auflöst werden, um den jährlichen Wertverlust p zu erhalten:
Gegeben: $W_0 = 37450$ €; $W_8 = 9000$ €
Gesucht: q und p

$$\begin{aligned}
& W_8 = W_0 \cdot q^8 \\
& 9000 = 37450 \cdot q^8 && |:37450 \\
\Longleftrightarrow \quad & q^8 = \frac{9000}{37450} \\
\Longleftrightarrow \quad & q = \sqrt[8]{\frac{9000}{37450}} \approx 0{,}837 = 83{,}7\,\% \\
& \Rightarrow p = 100\,\% - 83{,}7\,\% = 16{,}3\,\%
\end{aligned}$$

Die jährliche Wertverlust beträgt $\underline{\underline{p = 16{,}3\,\%}}$.

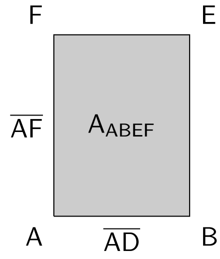
c) Der Wertverlust nach 6 Jahren ergibt sich, indem der Startwert jeweils mit der jährlichen Rate $q = 1 - p$ multipliziert wird:

$$\begin{aligned}
W_6 &= 37450\,€ \cdot (1 - 0{,}25) \cdot (1 - 0{,}18) \cdot (1 - 0{,}09)^4 \\
&= 37450\,€ \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}91^4 \\
&\approx 15794\,€
\end{aligned}$$

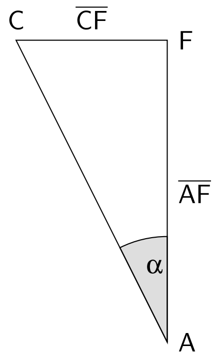
Der Wert des Wagens nach 6 Jahren beträgt noch $\underline{\underline{15794\,€}}$.

3. Aus der gegebenen Fläche des Rechtecks ADEF und der Länge $\overline{AD}$ kann zunächst die Länge $\overline{AF}$ berechnet werden (Maße in cm):

$$\begin{aligned} & \overline{AF} \cdot \overline{AD} = A_{ADEF} && \mid : \overline{AD} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{AF} = \frac{A_{ADEF}}{\overline{AD}} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{AF} = \frac{72}{8} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{AF} = 9 \end{aligned}$$



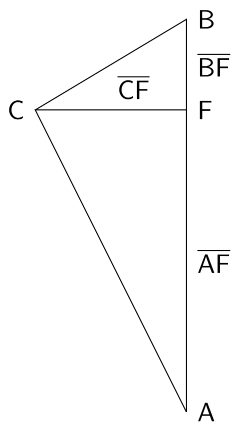
Da nun der Winkel α und $\overline{AF}$ bekannt sind, gilt im Dreieck CAF:



$$\begin{aligned} & \tan\alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} && \mid \cdot \overline{AF} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CF} = \tan\alpha \cdot \overline{AF} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CF} = \tan(25^\circ) \cdot 9\,\text{cm} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CF} \approx 4{,}2\,\text{cm} \end{aligned}$$

Gemäß dem Höhensatz gilt dann im Dreieck ABC (Maße in cm):

$$\begin{aligned} & \overline{AF} \cdot \overline{BF} = \overline{CF}^2 && \mid : \overline{AF} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{BF} = \frac{\overline{CF}^2}{\overline{AF}} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{BF} = \frac{4{,}2^2}{9} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{BF} \approx 2 \end{aligned}$$



Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AF} + \overline{BF}) \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot (9\,\text{cm} + 2\,\text{cm}) \cdot 4{,}2\,\text{cm} \\ &= \underline{\underline{23{,}1\,\text{cm}^2}} \end{aligned}$$

4. Zunächst wird der Term nach Koeffizienten/Variablen sortiert:

$$\begin{aligned} \frac{21 \cdot x^{-4} \cdot 9 \cdot y^3 \cdot 6 \cdot z^5 \cdot x^3 \cdot 8 \cdot z^{-8}}{4 \cdot y^2 \cdot 7 \cdot x^{-6} \cdot 3 \cdot y \cdot 18 \cdot z^{-4}} &= \frac{21 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 8}{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 18} \cdot \frac{x^{-4} \cdot x^3}{x^{-6}} \cdot \frac{y^3}{y^2 \cdot y} \cdot \frac{z^5 \cdot z^{-8}}{z^{-4}} \\ &= \frac{9072}{1512} \cdot \frac{x^{-4} \cdot x^3}{x^{-6}} \cdot \frac{y^3}{y^2 \cdot y} \cdot \frac{z^5 \cdot z^{-8}}{z^{-4}} \\ &= 6 \cdot \frac{x^{-4} \cdot x^3}{x^{-6}} \cdot \frac{y^3}{y^2 \cdot y} \cdot \frac{z^5 \cdot z^{-8}}{z^{-4}} \end{aligned}$$

Weiterhin werden die Potenzen zunächst umgeschrieben. Wegen $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ können alle Terme unter dem Bruchstrich über den Bruchstrich geschrieben werden, wenn man das Vorzeichen des Exponenten ändert.

$$6 \cdot \frac{x^{-4} \cdot x^3}{x^{-6}} \cdot \frac{y^3}{y^2 \cdot y} \cdot \frac{z^5 \cdot z^{-8}}{z^{-4}} = 6 \cdot (x^{-4} \cdot x^3 \cdot x^6) \cdot (y^3 \cdot y^{-2} \cdot y^{-1}) \cdot (z^5 \cdot z^{-8} \cdot z^4)$$

Musterprüfungen nach LehrplanPLUS 2022

1. $(3x^4)^2 = 3x^8$

Bei der Termumformung ist ein Fehler unterlaufen.
Beschreiben Sie diesen und berichtigen Sie ihn.

(Themenbereich: Lösen von Termen) (1 Pkt.)

2. Zum Mieten eines Leihwagens gibt es zwei Angebote.

Angebot A	Angebot B
0,40 € pro Kilometer	0,20 € pro Kilometer
kein Grundpreis	10 € Grundpreis

a) Die Abhängigkeit der Kosten in Euro von der Fahrstrecke in Kilometer lässt sich für Angebot A mit der Funktionsgleichung $y = 0{,}4x$ darstellen.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für das Angebot B.

b) Berechnen Sie für das Angebot A die Kosten für eine Wegstrecke von 80 Kilometern.

(Themenbereich: Lineare Funktionen - Geradengleichungen) (1 Pkt.)

3. Kreuzen Sie den Sachverhalt an, bei dem es sich um ein exponentielles Wachstum handelt.

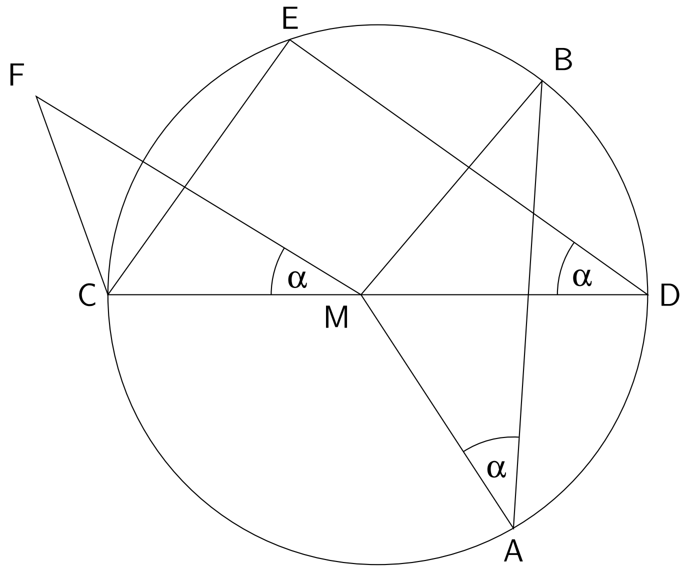
- ☐ Die Anzahl einer bestimmten Bakterienart verdoppelt sich im Labor alle 20 Minuten.
- ☐ Für mobile Daten am Smartphone müssen pro Gigabyte 5,00 € bezahlt werden.
- ☐ Für die Anlage eines festen Betrages erhält man bei einer Bank jährlich 0,5 % Zinsen, die dem Kunden am Ende des Jahres in bar ausgezahlt werden.

(Themenbereich: Exponentialfunktionen) (0,5 Pkt.)

4. In der folgenden Skizze ist M der Mittelpunkt des Kreises.
Für eines der drei beschrifteten Dreiecke gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Benennen Sie dieses Dreieck und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Quelle: StMUK

(Themenbereich: Geometrie der Ebene) (1 Pkt.)

1. a) Die fehlende Koordinate des Punktes A kann durch Einsetzen in p_1 und Berechnen des Funktionswertes für $x = -3$ ermittelt werden:

$$y_A = (-3)^2 + 2 \cdot -3 + 5 = 9 - 6 + 5 = 8$$

Die beiden Punkte B und C haben die gleiche y-Koordinate. Um die zugehörigen x-Koordinaten zu bestimmen werden die Werte für y eingesetzt:

$$\begin{aligned} 13 &= x^2 + 2x + 5 \qquad &&|-13 \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$

Mithilfe der quadratischen Lösungsformel oder der p-q-Formel können dann die Werte für x_B und x_C bestimmt werden:

Lösungsformel:
$a = 1;\ b = 2;\ c = -8$

$$\begin{aligned} x_{B;C} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$x_B = 2 \quad \text{und} \quad x_C = -4$$

p-q-Formel:
$p = 2;\ q = -8$

$$\begin{aligned} x_{B;C} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} \end{aligned}$$

$$x_B = 2 \quad \text{und} \quad x_C = -4$$

Die Koordinaten der Punkte lauten $\underline{\underline{A\,(-3\,|\,8)}}$, $\underline{\underline{B\,(2\,|\,13)}}$ und $\underline{\underline{C\,(-4\,|\,13)}}$.

b) Die gegebene Gleichung wird mittels quadratischer Ergänzung in Scheitelpunktform gebracht, oder die Formel für die Scheitelpunktkoordinaten verwendet.

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad y &= x^2 + 2x + 5 \\ \Longleftrightarrow \quad y &= (x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2 - 1^2) + 5 \\ \Longleftrightarrow \quad y &= (x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2) - 1^2 + 5 \\ \Longleftrightarrow \quad y &= (x + 1)^2 - 1 + 5 \\ \Longleftrightarrow \quad y &= (x + 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung von p_1 in Scheitelpunktform lautet $\underline{\underline{p_1: y = (x+1)^2 + 4}}$. Davon abgelesen werden können die Koordinaten des Scheitelpunktes zu $\underline{\underline{S_1\,(-1\,|\,4)}}$.

c) Die Koordinaten beider Punkte können in die Normalform $y = -x^2 + px + q$ eingesetzt werden. Dabei ergeben sich zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{D einsetzen: (I)} \quad -12 &= -(-1)^2 + p \cdot (-1) + q \\ \Longleftrightarrow \quad -12 &= -1 - p + q \qquad &&|+1 \\ \Longleftrightarrow \quad -11 &= -p + q \qquad &&|+p \\ \Longleftrightarrow \quad q &= -11 + p \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $E\,(2\,|-9)$ ergibt sich eine zweite Gleichung (II). In diese kann dann $q = -11 + p$ aus Gleichung (I) eingesetzt werden:

$$\text{E einsetzen: (II)} \qquad -9 = -2^2 + p \cdot 2 + q$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad && -9 &= -4 + 2p + q && (q = -11 + p \text{ einsetzen}) \\
\Longleftrightarrow \quad && -9 &= -4 + 2p - 11 + p && |-3p \\
\Longleftrightarrow \quad && -9 - 3p &= -15 && |+9 \\
\Longleftrightarrow \quad && -3p &= -6 && |:(-3) \\
\Longleftrightarrow \quad && p &= 2 &&
\end{aligned}$$

Einsetzen in $q = -11 + p$: $\quad q = -11 + 2$

$$\Longleftrightarrow \quad q = -9$$

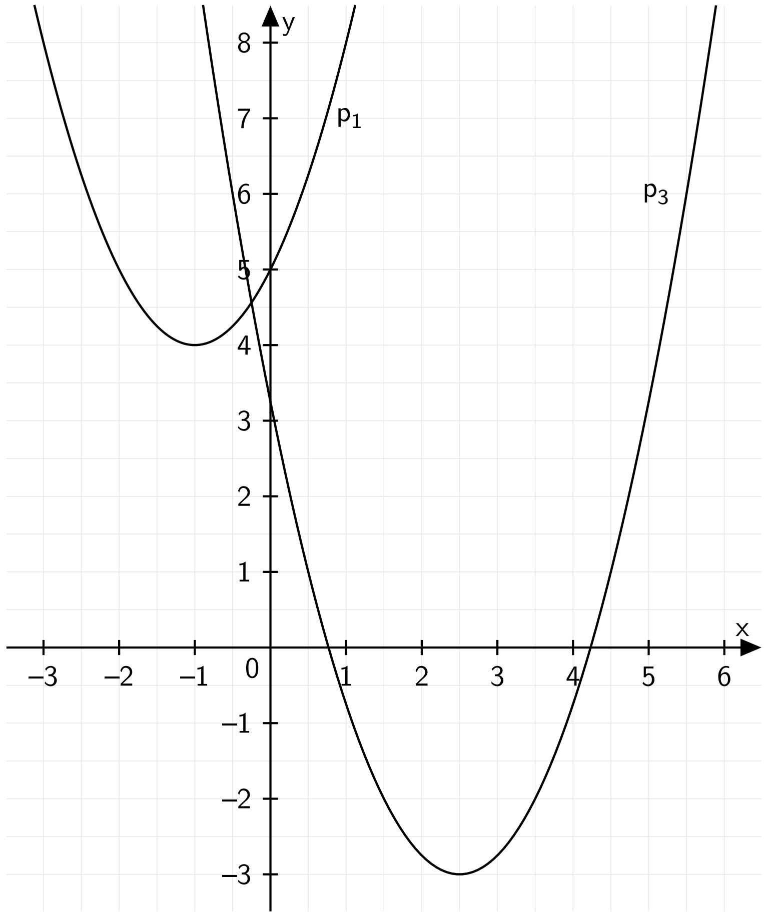
Die Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{p_2: y = -x^2 + 2x - 9}}$.

d) Der Scheitelpunkt der Parabel p_3 ist gegeben zu $S_3\,(2{,}5\,|-3)$. Damit wird die Scheitelpunktform aufgestellt und zur Normalform umgeformt:

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad && y &= (x - x_s)^2 + y_s \\
\Longleftrightarrow \quad && y &= (x - 2{,}5)^2 - 3 \\
\Longleftrightarrow \quad && y &= (x - 2{,}5)(x - 2{,}5) - 3 \\
\Longleftrightarrow \quad && y &= (x^2 - 2{,}5x - 2{,}5x + 2{,}5^2) - 3 \\
\Longleftrightarrow \quad && y &= x^2 - 5x + 6{,}25 - 3 \\
\Longleftrightarrow \quad && &\underline{\underline{p_3: y = x^2 - 5x + 3{,}25}}
\end{aligned}$$

e) Für die graphische Darstellung von $p_1: y = x^2 + 2x + 5$ und $p_3: y = x^2 - 5x + 3{,}25$ können die bereits bekannten Punkte verwendet oder ggf. weitere Punkte berechnet werden.

(**Hinweis:** Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu, da sie für den Buchdruck skaliert wurde.)



f) Wenn sich durch Spiegelung an der y-Achse die Funktionsgleichung nicht ändert, so muss der Verlauf des Funktionsgraphen auf beiden Seiten der y-Achse gleich sein. Dies ist für eine Parabel wie p_4 der Fall, wenn der Scheitelpunkt S_4 auf der y-Achse liegt.

2. Bei der vorliegenden Gleichung handelt es sich um die zweite binomische Formel

$$X^2 - 2XY + Y^2 = (X - Y)^2.$$

Das gemischte Glied $24a^6b^2$ entspricht also in der binomischen Formel dem Term 2XY:

$$\begin{aligned} & & 24a^6b^2 &= 2XY \qquad \mid :2 \\ &\Longleftrightarrow & 12a^6b^2 &= XY \end{aligned}$$

Der nach dieser Umformung verbleibende Term muss entsprechend in X und Y aufgeteilt werden. Dafür sind mehrere Lösungen möglich. Es ist zweckmäßig die Variablen a und b auf X und Y aufzuteilen, sodass beispielsweise gilt:

$$XY = 12a^6b^2 \quad \Rightarrow \quad X = 12a^6; Y = b^2$$

Die so gefundenen Terme können nun in die obige Gleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & & X^2 - 2XY + Y^2 &= (X - Y)^2 \\ &\Longleftrightarrow & (12a^6)^2 - 2 \cdot (12a^6) \cdot (b^2) + (b^2)^2 &= (12a^6 - b^2)^2 \\ &\Longleftrightarrow & \underline{\underline{144a^{12} - 24a^6b^2 + b^4 = (12a^6 - b^2)^2}} \end{aligned}$$

3. a) Der Anstieg der Geraden kann durch die Koordinaten der beiden Punkte $P(-1\,|\,5)$ und $Q(2\,|\,-4)$ ermittelt werden:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - 5}{2 - (-1)} = \frac{-9}{3} = -3$$

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (es wird P gewählt) und der ermittelten Steigung $m = -3$ in die allgemeine Form $y = mx + t$ folgt:

$$\begin{aligned} & & y &= m_1 \cdot x + t_1 \\ &\Longleftrightarrow & 5 &= -3 \cdot (-1) + t_1 \\ &\Longleftrightarrow & 5 &= 3 + t_1 \qquad \mid -3 \\ &\Longleftrightarrow & t_1 &= 2 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Geraden lautet $\underline{\underline{g_1: y = -3x + 2}}$.

b) Zunächst wird die gegeben Gleichung von g_3 umgeformt:

$$\begin{aligned} & & 2y &= -1x + 10 \qquad \mid :2 \\ &\Longleftrightarrow & y &= -0{,}5x + 5 \end{aligned}$$

Wenn g_2 und g_3 keinen gemeinsamen Punkt haben, so verlaufen sie parallel. Das heißt, dass die Steigung der beiden Funktionen übereinstimmen muss, also $m_2 = m_3 = -0{,}5$ sein muss. Damit die Funktionen nun nicht identisch, sondern wirklich parallel verlaufen, muss der y-Achsenabschnitt von g_2 anders als der von g_3 gewählt werden, also $t_2 \neq t_3$. Mit $t_3 = 5$ wäre eine mögliche Gleichung also $\underline{\underline{g_2: y = -0{,}5x + 4}}$.

c) Der Schnittpunkt N entspricht der Nullstelle der Gerade g_3. Die in b) umgeformte Funktionsgleichung wird $y = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned} & 0 = -0{,}5x + 5 && \mid +0{,}5x \\ \Longleftrightarrow\quad & 0{,}5x = 5 && \mid :0{,}5 \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 10 && \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts mit der x-Achse lauten $\underline{\underline{N\,(10\,|\,0)}}$.

d) Der Schnittpunkt S der Gerade g_3 mit der Gerade g_4 wird durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen ermittelt:

$$\begin{aligned} & -0{,}5x + 5 = 2{,}5x - 4 && \mid -2{,}5x \\ \Longleftrightarrow\quad & -3x + 5 = -4 && \mid -5 \\ \Longleftrightarrow\quad & -3x = -9 && \mid :(-3) \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 3 && \end{aligned}$$

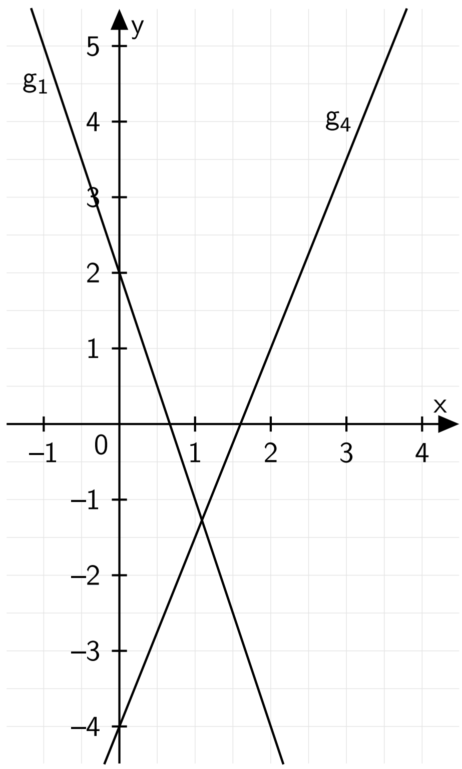
Dieser Wert wird nun in eine der Funktionsgleichungen eingesetzt um den zugehörigen Funktionswert y zu bestimmen. Es wird g_4 gewählt:

$$y = 2{,}5 \cdot 3 - 4 = 7{,}5 - 4 = 3{,}5$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $\underline{\underline{S\,(3\,|\,3{,}5)}}$.

e) Die grafische Darstellung kann anhand bereits bestimmter Punkte, möglicher weiterer Punkte oder mithilfe eines Steigungsdreiecks erfolgen:

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da sie für den Buchdruck skaliert wurde.)



PERFEKT VORBEREITET AUF DEN MSA 10. Klasse Bayern 2023

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen 2016 - 2022
- Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- Ideal zur Vorbereitung auf einzelne Arbeiten während des Schuljahres
- Digitalisierte Original-Prüfungen, Schritt für Schritt vorgerechnet
- Inklusive Musterprüfungen nach **LehrplanPLUS**

Mathe M10 - Trainer für den MSA 2023

DIGITALES COACHING

- Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. :
EAN 9783743001022

Mittelschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

€ 13,90

ISBN 978-3-7430-0102-2
9 783743 001022 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de