JETZT mit LERN-VIDEOS

12. Klasse

FOS·BOS 2023
Fachabitur Bayern

Mathematik Technik

Zusätzlich mit
- Miniskript,
- Musterprüfungen und
- Übungaufgaben

Inkl. 2022
Original-Prüfungen
mit Lösungen

FOS·BOS 12

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag
www.lern-verlag.de

Fachabiturprüfung
FOS | BOS Bayern 2023
Mathematik Technik
12. Klasse

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Beruflichen Oberschule
technischer Zweig
in Bayern

www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsbuch **Abiturprüfung FOS/BOS Bayern 2023 Mathematik Technik 12. Klasse** sind die passenden Prüfungsaufgaben nach LehrplanPLUS und **eigens erstellte Musterprüfungen** enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2023 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **Montag, 22.05.2023** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2022) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Fachabitur 2023 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden. Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, cleverlag und lern.de sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

8. ergänzte Auflage ©2021 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0087-2
Artikelnummer:
EAN 9783743000872

Aktuelles Rund um die Prüfung 2023 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über Polynomdivision oder Vektoren und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2022/2023 - ISBN: 978-3-7430-0087-2

- Den Übungsteil herausgenommen und online zum Üben per QR-Code bereitgestellt.

- Kleine Rechenfehler beseitigt.

- **Original-Prüfung 2022 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2023**.

Inhaltsverzeichnis

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2023

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2023 an der FOSBOS:
Kürzungen aus dem Vorjahr bleiben bestehen - Nicht prüfungsrelevant (Stand: 27.06.2022):

- Aus LB 3: Kurvendiskussion von Funktion der Form $x \mapsto f(x) \cdot e^{g(x)} + y_0$ aber: Produkt-/Ketten- und Quotientenregel sollen im Mathematik Additum behandelt werden

- Aus LB 4: Stammfunktionen für Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot e^{c\cdot(x-d)} + y_0$ und $x \mapsto h(e^x)$; h ist dabei eine ganzrationale Funktion vom Grad höchstens zwei

Bitte fragen Sie bzgl. aktuellen Änderungen immer auch noch einmal bei Ihrer Lehrkraft nach!

MINISKRIPT

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**" zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

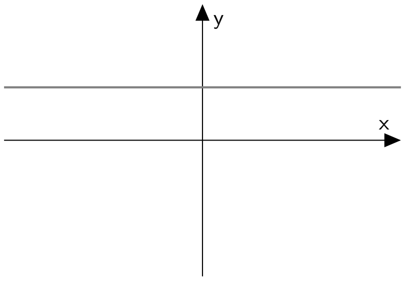
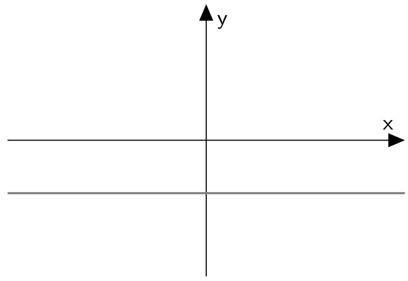
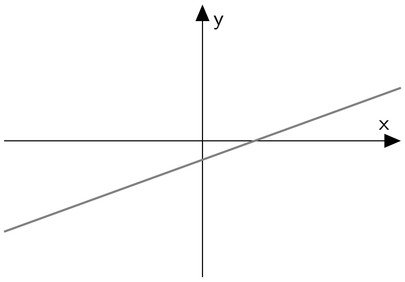
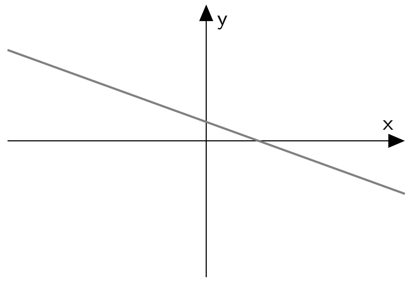
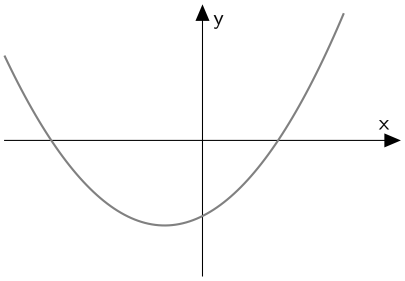
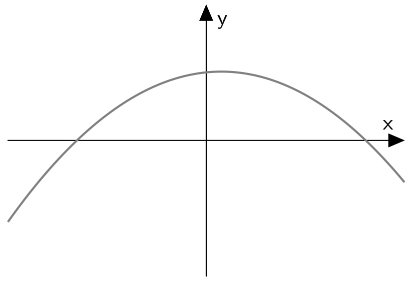
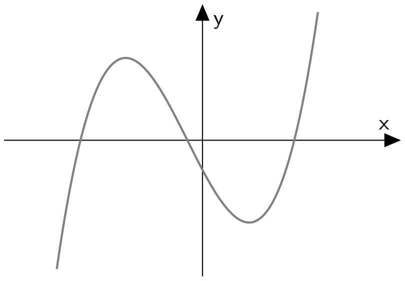
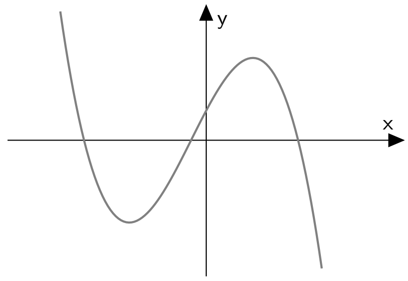
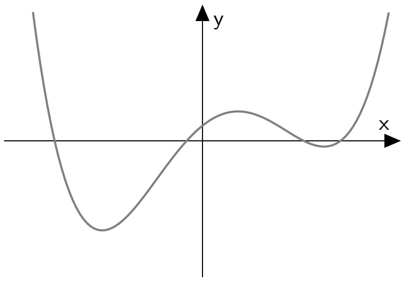
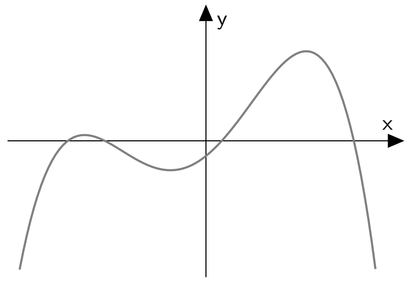
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan" zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**" der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
    - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte", „Steigungswerte" und „Krümmungswerte" definiert bzw. berechnet.
    - Funktionen kann man ableiten.
    - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**".
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, ...)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient" a niemals null sein darf. Dies ist „logisch", da ja der „namensgebende" Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**", die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich" sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
    - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über"– bzw. „unterhalb der x-Achse".
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**".

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**"!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)

mögliche Graphentypen für a > 0	**mögliche** Graphentypen für a < 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug“ alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug“ wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen“ zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug“ einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge“ kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge“ zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten“ werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Lösungen - Polynome

1 Vollständige Lösung:

Werkzeug	Gleichungstyp	Beispiel
Äquivalenzumformung	lineare Gleichung	$x+1=0$
Ausklammern	quadratische Gleichung ($c=0$) kubische Gleichung ($d=0$) Gleichung 4. Grades ($e=0$)	$4x^2-2x=0$ $3x^3-2x^2+x=0$ $x^4-x^3+3x^2+4x=0$
Mitternachtsformel	quadratische Gleichung (vollständige Gleichung)	$3x^2-4x+1=0$
Radizieren	quadratische Gleichung ($b=0$)	$4x^2-16=0$
Polynomdivision	kubische Gleichung (zum Vereinfachen) Gleichung 4. Grades (zum Vereinfachen)	$3x^3+x^2-7x+5=0$ $4x^4-3x^2+2x^2+x-1=0$
Substitution	Gleichung 4. Grades ($b=0 \ \wedge \ d=0$)	$4x^4+5x^2-7=0$

2 Für jede Teilaufgabe wird die Lösung einer Gleichung ausführlich angegeben und für die restlichen Gleichungen jeweils eine Kurzlösung.

a) Gleichung I): $2x-4=0$; Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 2x-4=0 && \mid +4 \\ \iff \quad & 2x=4 && \mid :2 \\ \iff \quad & \underline{\underline{x_1=2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1=-\frac{2}{7}}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1=3}}$

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1=-\frac{4}{5}}}$

b) Gleichung I): $x^2-4=0$; Radizieren:

$$\begin{aligned} & x^2-4=0 && \mid +4 \\ \iff \quad & x^2=4 && \mid \pm\sqrt{} \\ \iff \quad & \underline{\underline{x_1=-2}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2=2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1=-\frac{3}{2}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2=\frac{3}{2}}}$

Gleichung III): keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1=-\sqrt{3}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2=\sqrt{3}}}$

c) Gleichung I): $2x^2 - 4x - 6 = 0$; Mitternachtsformel:

$$x_{1;2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$\underline{\underline{x_1 = -1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = 3}}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_{1;2} = -2}}$ (Doppellösung)

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{3}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = \frac{5}{6}}}$

Gleichung IV): keine Nullstellen

d) Gleichung I): $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ Substitution:

$$z = x^2 \quad \Rightarrow \quad 2z^2 - 10z + 8 = 0$$

Anwendung Mitternachtsformel:

$$z_{1;2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4}$$

$$z_1 = 1 \ \vee \ z_2 = 4$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm 1 \quad \underline{\underline{x_1 = -1}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = 1}}$$

$$z_2 = x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{3;4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 2 \quad \underline{\underline{x_3 = -2}} \ \vee \ \underline{\underline{x_4 = 2}}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_{1;2} = -2}}$ (Doppellösung) $\vee$ $\underline{\underline{x_{3;4} = 2}}$ (Doppellösung)

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = -1}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = 1}} \ \vee \ \underline{\underline{x_3 = -1{,}3}} \ \vee \ \underline{\underline{x_4 = 1{,}3}}$

e) Gleichung I): $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$; da es keinen konstanten Summanden gibt, kann zunächst ausgeklammert werden:

$$2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = x(2x^3 + 2x^2 - 4{,}5x - 4{,}5) = 0$$

Es ergibt sich bereits die erste Nullstelle zu $\underline{\underline{x_1 = 0}}$. In der Klammer verbleibend ist ein Term dritten Grades, für welchen nun eine Nullstelle erraten werden muss. Wie bereits erwähnt sind beispielsweise $-2; -1; 1$ und 2 häufige Lösungen, sodass diese beim Erraten zuerst getestet werden können. Durch Einsetzen dieser Werte in den kubischen Term in Klammern zeigt sich, ob es sich um eine Nullstelle handelt:

$$\begin{aligned}
x = -2 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 4{,}5 \cdot (-2) - 4{,}5 = -3{,}5 \neq 0 \\
x = -1 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 4{,}5 \cdot (-1) - 4{,}5 = 0 \\
x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 4{,}5 \cdot 1 - 4{,}5 = -5 \neq 0 \\
x = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 4{,}5 \cdot 2 - 4{,}5 = 10{,}5 \neq 0
\end{aligned}$$

Eine weitere Nullstelle liegt also bei $\underline{\underline{x_2 = -1}}$. Der kubische Term kann nun mithilfe der gefundenen Nullstelle mittels Polynomdivision weiter vereinfacht werden.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 & +\,2x^2 & -\,4{,}5x & -\,4{,}5) & : \ (x+1) \ = 2x^2 - 4{,}5 \\
- & (2x^3 & +\,2x^2 & &) & \\
\hline
 & & & -\,4{,}5x & -\,4{,}5 & \\
 & & - & (-\,4{,}5x & -\,4{,}5) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Die gegebene Gleichung kann mithilfe der gefundenen Nullstellen also wie folgt vereinfacht werden:

$$2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = x(x+1)(2x^2 - 4{,}5) = 0$$

Schließlich müssen noch die Nullstellen des quadratischen Terms bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & & 2x^2 - 4{,}5 &= 0 & &\mid + 4{,}5 \\ &\Longleftrightarrow & 2x^2 &= 4{,}5 & &\mid :2 \\ &\Longleftrightarrow & x^2 &= 2{,}25 & &\mid \sqrt{} \\ &\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x_3 = -1{,}5}} &\quad \vee \quad \underline{\underline{x_4 = 1{,}5}} & & \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = 0}} \;\vee\; \underline{\underline{x_2 = -2}} \;\vee\; \underline{\underline{x_3 = 0{,}5}} \;\vee\; \underline{\underline{x_4 = 4}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 0}} \;\vee\; \underline{\underline{x_2 = -1}} \;\vee\; \underline{\underline{x_3 = -0{,}3}} \;\vee\; \underline{\underline{x_4 = 5}}$

Vektoren

Vektoren

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden als Spaltenvektoren dargestellt und durch ihre Koordinaten beschrieben. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein **Ortsvektor** entspricht dem Pfeil vom Koordinatenursprung zu einem bestimmten Punkt. Die Koordinaten des Ortsvektors ergeben sich aus den Koordinaten des Punktes. Beispiel:

$$\text{Punkt } P\,(\,3\,|\,2\,|\,6) \quad \Rightarrow \quad \text{Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet, repräsentiert einen Vektor zwischen diesen beiden Punkten. Die Koordinaten dieses Vektors ergeben sich aus den Koordinaten der beiden Punkte nach der Merkregel „Spitze minus Fuß". Beispiel:

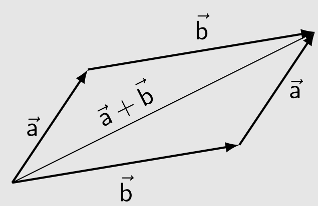
$$\text{Punkte } P\,(\,3\,|\,2\,|\,6) \text{ und } Q\,(\,4\,|\,-1\,|\,3) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einfache Vektoroperationen

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren und das Produkt eines Skalares (Zahl) mit einem Vektor wird jeweils komponentenweise berechnet:

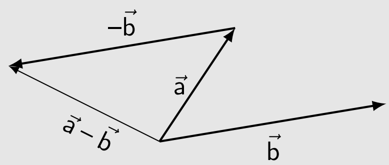
Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



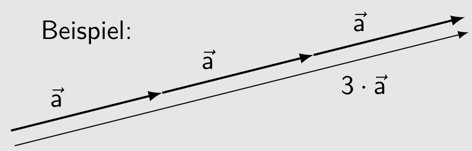
Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(1\,|-2\,|\,4)$, $B(3\,|\,2\,|\,5)$ und der Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$. Gesucht sind die Koordinaten der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$, außerdem die Koordinaten von $\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{e}=\vec{b}-\vec{c}$ und $\vec{f}=4\cdot\vec{c}$.

Die Koordinaten der Ortsvektoren ergeben sich aus den Koordinaten der Punkte und der Verbindungsvektor gemäß der Merkregel „Spitze minus Fuß“:

$$A(1\,|-2\,|\,4) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}=\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} \qquad\qquad B(3\,|\,2\,|\,5) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3-1\\2-(-2)\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

Die anderen Vektoren ergeben sich, indem die Operationen wie beschrieben immer komponentenweise ausgeführt werden:

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3\\-2+1\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

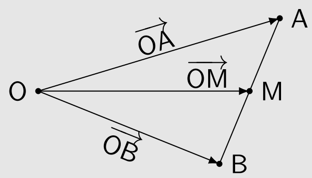
$$\vec{e}=\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-3)\\2-1\\5-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}=4\cdot\vec{c}=4\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-3)\\4\cdot 1\\4\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\4\\-8\end{pmatrix}$$

Besondere Ortsvektoren - Mittelpunkt einer Strecke

Für den Ortsvektor des Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$



Beispiel

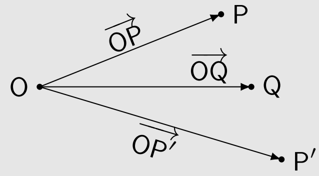
Gesucht sind die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke zwischen $A(1\,|-2\,|\,4)$ und $B(3\,|\,2\,|\,5)$.

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1+3\\-2+2\\4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 4\\\frac{1}{2}\cdot 0\\\frac{1}{2}\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\4{,}5\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad M(2\,|\,0\,|\,4{,}5)$$

Besondere Ortsvektoren - Spiegelpunkt bezüglich eines Punktes

Wird ein Punkt P an einem Punkt Q gespiegelt, so gilt für den Ortsvektor des Spiegelpunktes P′:

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$



Beispiel

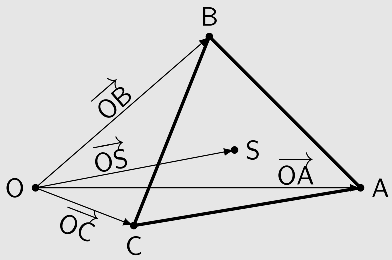
Wird der Punkt P (3 | − 4 | 1) am Punkt Q (0 | 3 | − 5) gespiegelt, erhält man den Punkt P′. Gesucht sind dessen Koordinaten.

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \\ 2 \cdot 3 - (-4) \\ 2 \cdot (-5) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(-3 \mid 10 \mid -11)$$

Besondere Ortsvektoren - Schwerpunkt eines Dreiecks

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S eines Dreiecks ABC gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks, welches durch die Punkte A (1 | − 2 | 4), B (3 | 2 | 5) und C (− 3 | 1 | − 2) gebildet wird.

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3 - 3 \\ -2 + 2 + 1 \\ 4 + 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{7}{3}\right)$$

Skalarprodukt

Bildet man das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich ein Skalar (Zahl). Das Skalarprodukt wird mit dem Zeichen $\circ$ angezeigt und kann im $\mathbb{R}^3$ wie folgt berechnet werden:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Assoziativgesetz (Skalar $s \in \mathbb{R}$): $(s \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (s \cdot \vec{b})$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Anwendungen des Skalarprodukts

Für den **Betrag** eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den **Winkel** φ zwischen zwei Vektoren gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (\text{für } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

Wegen $\cos(90^\circ) = 0$ folgt daraus insbesondere:
Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich **null**, so stehen diese **orthogonal** (senkrecht) zueinander.

Beispiele

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist das Resultat des Skalarprodukts $\vec{a} \circ \vec{b}$ und $\vec{a} \circ \vec{c}$, sowie der exakte Wert der Beträge $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 3 - 4 + 20 = 19$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3 - 2 - 8 = -13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \circ \vec{b}} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \circ \vec{c}} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Übungsteil

Unter folgendem QR-Code haben wir Ihnen auf unserer Verlagsseite einen Übungsteil zur Verfügung gestellt. Der Übungsteil ist aufgeteilt in einen Teil Analysis und einen weiteren Teil analytischen Geometrie, damit Sie sich noch gezielter auf die Abschlussprüfung vorbereiten können.

Download über unsere Verlagsseite https://www.lern-verlag.de

Sollte der Link auf unserer Verlagsseite einmal nicht funktionieren, so finden Sie alternativ alle Informationen rund um unsere FOS/BOS Bücher auch unter folgendem QR-Code.

Download über unsere Lernplattform unter https://lern.de

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
Musterprüfung	oHm AI	$f_k: x \longmapsto -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)$	**93**	NST
		$g: x \longmapsto \frac{1}{4}(2x^2-2x+3)\cdot e^{2x}$	**93**	NST; Monotonie; Grenzwert; Wertemenge
	oHm AII	$p(x) = -2\cdot(x-2)^2+3 \wedge k(x) = x-2$	**97**	Schnittpunkte; Integral
		$f_a(x) = (ax^2+2x-1)\cdot e^{ax}$	**97**	Grenzwert; NST; Integral
	mHm AI	$f_a: x \longmapsto -x^3+\frac{a}{4}x^2-3x+a$	**106**	Tangente; NST; Extrema; Integral
		$g(x) = \frac{1}{50}(-x^3+27x+46)$	**106**	Fkt. aufstellen; Krümmung
		$b(t) = 20(t+4)\cdot e^{-(t-12)^2}$	**107**	Def. Menge; Extrema
	mHm AII	$f_k(x) = x^3-3x^2+kx$	**118**	Fkt. aufstellen; NST; Tangente; Wendepunkte; Integral
		$G(t) = c\cdot(t-s)^2\cdot e^{-(t-1)}$	**118**	Fkt. aufstellen; Grenzwert; Extrema; Wendepunkte
2019	oHm A	$f_a': x \longmapsto (x-a)^2\cdot(x+3)$	**137**	NST
		$s: x \longmapsto e^{-x^2}$	**138**	Grenzwert
		$t: x \longmapsto e^{2x}-e^x$	**138**	Grenzwert
		$u: x \longmapsto e^{(2x)^2}$	**138**	Grenzwert
	mHm AI	$f: x \longmapsto ax^4+bx^3+c$	**145**	Fkt. aufstellen; Extrema; Fläche
		$h_k: x \longmapsto 2x^3+4kx^2+8x$	**145**	Symmetrie; NST
		$B(t) = 3+\left(\frac{-1}{20}t^2+\frac{1}{5}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}t+a}$	**145**	Fkt. aufstellen; Grenzwert; Monotonie
	mHm AII	$f_a: x \longmapsto (x-a)\left(x^2-\frac{1}{4}a\right)$	**154**	NST; Tangente
		$f_4(x) = (x-4)(x^2-1)$	**154**	Integral
		$h: t \longmapsto a\cdot t^2\cdot e^{b\cdot t}+1$	**155**	Fkt. aufstellen; Extrema
2020	oHm A	$f_a: x \longmapsto (ax^2-1)\cdot e^{1-2x}$	**173**	NST; Grenzwert; Extrema
	mHm AI	$f_k: x \longmapsto \frac{1}{10}(x+3)^2(x-3)(x-2k)$	**180**	NST; Extrema
		$w: x \longmapsto 2{,}2x+5{,}9$	**180**	Fläche
		$p: t \longmapsto 100\cdot t^2\cdot e^{a\cdot t}+1$	**181**	Fkt. aufstellen; Wendepunkt
	mHm AII	$h: x \longmapsto \frac{1}{8}\cdot(-x^3+3x^2+9x+5)$	**188**	Extrema; Fläche
		$f_a: x \longmapsto \frac{1}{2}x^3+4x\cdot x^2+1$ und $g_a: x \longmapsto 1-4a\cdot x$	**188**	NST
		$z(t) = 3+(0{,}2t^2-4t+20)\cdot e^{0{,}3t-3}$	**189**	Monotonie; Wendepunkt; Fläche

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2021	oHm A	$t\colon x \longmapsto e^x + 2$ und		
		$u\colon x \longmapsto -e^{-x} + 4$	**208**	Fkt. aufstellen
	mHm AI	$A(a) = 40a - \frac{2}{3}a^2$	**215**	Fkt. aufstellen; Extrema
		$g_a\colon x \longmapsto -\frac{1}{2}x^3 - (a-1)x^2 + (a-4)x$	**216**	Symmetrie; NST
		$g_4(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$	**216**	Monotonie; Fläche
		$c\colon t \longmapsto 60 \cdot e^{-kt} + 20$	**216**	Grenzwert; Fkt. aufstellen
	mHm AII	$f\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(x^3 + 4x^2 - 4x)$	**223**	Extrema; Fläche
		$f_k\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(x^3 - kx^2 + kx)$	**223**	Tangente; Krümmung
		$N(t) = N_0 \cdot e^t$	**224**	Fkt. aufstellen
2022	oHm A	$g(x) = -\frac{4}{3}x + 8$	**241**	Fkt. aufstellen
		$j(x) = a \cdot e^{x-2} + c$	**242**	NST; Fkt. aufstellen
		$h_k(x) = (x-2) \cdot (x^2 - k)$	**242**	NST; Extrema
	mHm AI	$\vartheta(t) = 0{,}04 \cdot (t^4 - 47t^3 + 528t^2 + 576t + 500)$	**251**	Monotonie; Extrema; Integral
		$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$	**252**	Fläche
		$A(k) = -\frac{5}{8}k^3 + \frac{3}{2}k^2 + 3k$	**252**	Extrema; Fläche
	mHm AII	$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (-x^2 + a \cdot x) + 3a)$	**259**	NST; Fläche
		$V(a) = \frac{25}{4}a^2 - 3a^3$	**259**	Fkt. aufstellen; Extrema
		$h(t) = 0{,}4 + 0{,}071 \cdot e^{c \cdot t}$	**260**	Fkt. aufstellen
		$m(t) = 10 \cdot 5^t$	**260**	Fkt. aufstellen
Lösungen:		StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau) und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

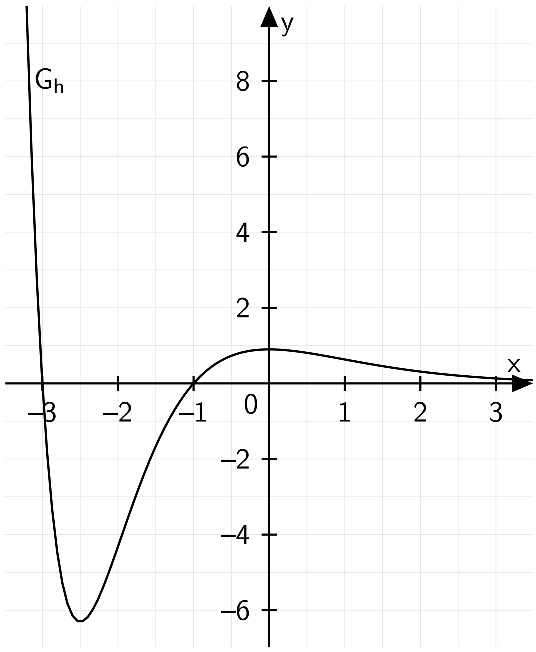
Musterprüfung nach LehrplanPLUS

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k: x \longmapsto -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_k. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(-2\,|\,2)$ auf dem Graphen der Funktion f_k liegt. **2 BE**

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion h(x) mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



2.1 Fügen Sie der gegebenen Abbildung eine Skizze des Graphs der ersten Ableitung $h'(x)$ im dargestellten Intervall hinzu. Achten Sie dabei besonders auf die Abszisse charakteristischer Punkte, wie beispielsweise Nullstellen. **3 BE**

2.2 Geben Sie außerdem die Bedeutung des Ausdrucks

$$\int_{-3}^{-1} h(x)dx$$

an und stellen Sie dies in der gegebenen Abbildung geeignet dar. **2 BE**

3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \longmapsto \frac{1}{4}(2x^2-2x+3)\cdot e^{2x}$ mit Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

3.1 Prüfen Sie die Funktion auf Nullstellen. **2 BE**

3.2 Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion und geben Sie damit ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten des Graphen von g an. **4 BE**

3.3 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie die Wertemenge der Funktion g an. **3 BE**

1.1 Die Nullstellen von f_k ermittelt man durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren, denn der ganze Term wird null, wenn ein Faktor null ist.

$$-\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)=0$$

$$\iff \quad -\frac{1}{3}x=0 \quad \text{oder} \quad (x-k)=0 \quad \text{oder} \quad (x+3)=0$$

$$\iff \quad x_1=0 \quad \text{oder} \quad x_2=k \quad \text{oder} \quad x_3=-3$$

Um die Vielfachheit der Nullstellen zu bestimmen, muss für $k \in \mathbb{R}$ eine Fallunterscheidung gemacht werden:
1. Überlegung: Für welche Werte von k fallen die Nullstellen zusammen?

1.Fall $k=0$, da $x_2=x_1$: 2 Nullstellen: eine doppelte Nullstelle bei $\underline{\underline{x_{1,2}=0}}$ und eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_3=-3}}$

2.Fall $k=-3$, da $x_2=x_3$: 2 Nullstellen: eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_1=0}}$ und eine doppelte Nullstelle bei $\underline{\underline{x_{2;3}=-3}}$

2. Überlegung: Für welche Werte von k fallen die Nullstellen nicht zusammen?

3.Fall $k \in \mathbb{R}\backslash\{0;-3\}$: 3 Nullstellen: drei einfache Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1=0}}$, $\underline{\underline{x_2=k}}$ und $\underline{\underline{x_3=-3}}$.

1.2 Um den entsprechenden Wert für k zu ermitteln, setzt man die Koordinaten des Punktes $P(-2\,|\,2)$ in die Funktionsschar f_k ein.

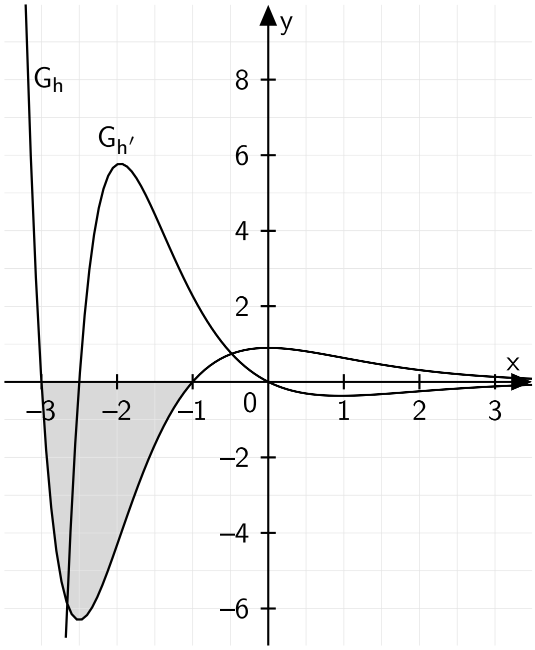
$$\begin{aligned}
& & f_k(-2) &= 2 & &\text{(Ansatz)}\\
&\iff & -\frac{1}{3}\cdot(-2)(-2-k)(-2+3) &= 2 & &\text{(Ausmultiplizieren)}\\
&\iff & \frac{2}{3}(-2-k)\cdot 1 &= 2 & &\Big|\cdot\frac{3}{2}\\
&\iff & -2-k &= \frac{2\cdot 3}{2} & &|+2\\
&\iff & -k &= 3+2 & &|\cdot(-1)\\
&\iff & k &= -5 & &
\end{aligned}$$

Für $\underline{\underline{k=-5}}$, verläuft die Funktion f_k durch den Punkt $(-2\,|\,2)$.

2.1 Für die Darstellung der ersten Ableitung müssen folgende Informationen berücksichtigt werden, die aus der Zeichnung abgelesen werden:

- Tiefpunkt des Graphen G_h bei $x \approx -2{,}5 \quad \Rightarrow \quad$ Nullstelle von $h'(x)$
- Hochpunkt des Graphen G_h bei $x \approx 0 \quad \Rightarrow \quad$ Nullstelle von $h'(x)$
- Graph von G_h fallend für $x \leq 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad h'(x) \leq 0$ für $x \leq 2{,}5$
- Graph von G_h steigend für $-2{,}5 \leq x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad h'(x) \geq 0$ für $-2{,}5 \leq x \leq 0$
- Graph von G_h fallend für $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h'(x) \leq 0$ für $x \geq 0$

Weiterhin wird beachtet, dass der Funktionswert der ersten Ableitung umso größer (bzw. kleiner) ist, je steiler der Graph von h steigt (bzw. fällt).



2.2 Bei dem gegebenen Ausdruck handelt es sich um ein Integral, dessen Betrag der Maßzahl des Flächenstückes entspricht, das der Graph von h(x) mit der x-Achse zwischen $x = -3$ und $x = -1$ einschließt.
Markierung des Flächenstücks in Teilaufgabe 2.1.

3.1 **Nullstellen**
Da die Exponentialfunktion nie null wird, gilt für eventuelle Nullstellen:

$$g(x) = 0$$
$$\iff \quad 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

Es kann nun die Diskriminante des quadratischen Terms berechnet werden:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$$

Da die Diskriminante negativ ist, besitzt die Funktion g(x) keine Nullstellen.

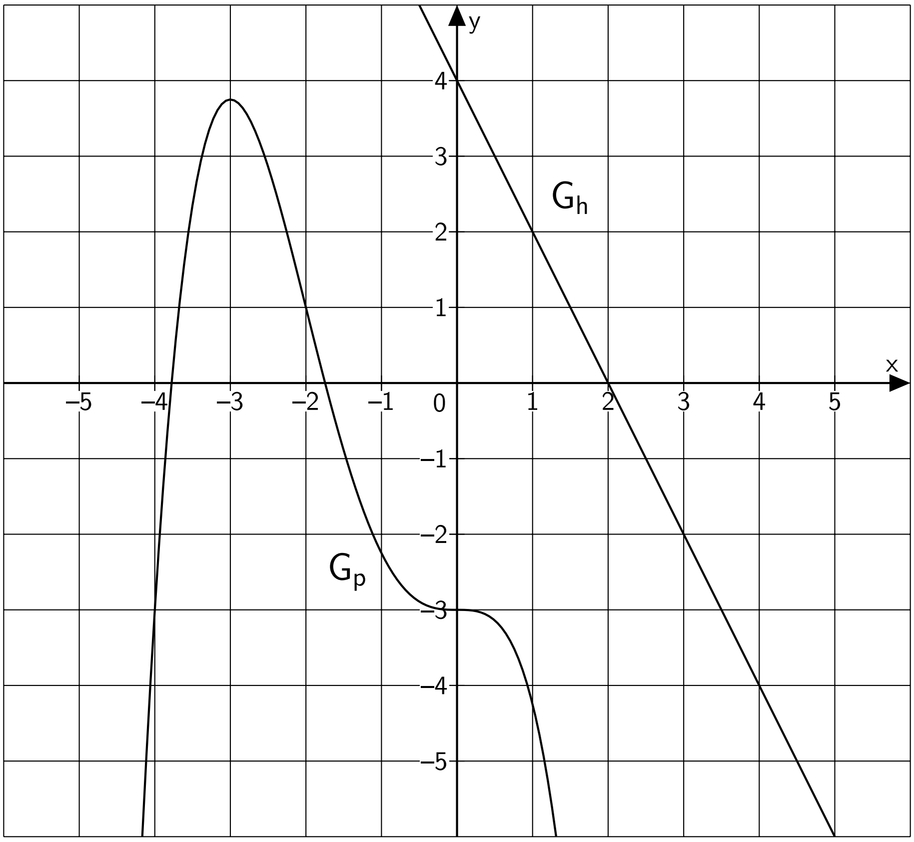
3.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Mithilfe von Produkt- und Kettenregel wird die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 3) \cdot e^{2x} \\ g'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left[(2x^2 - 2x + 3)' \cdot e^{2x} + (2x^2 - 2x + 3) \cdot (e^{2x})'\right] && \text{(Ansatz)} \\ &= \frac{1}{4}\left((2 \cdot 2x - 2) \cdot e^{2x} + (2x^2 - 2x + 3) \cdot e^{2x} \cdot 2\right) && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{1}{4}\left((4x - 2) \cdot e^{2x} + (4x^2 - 4x + 6) \cdot e^{2x}\right) && (e^{2x} \text{ ausklammern}) \end{aligned}$$

Fachabiturprüfung 2019
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und
Berufsoberschulen
in Bayern

1 Die Funktion $f'_a\colon x \longmapsto (x-a)^2 \cdot (x+3)$ mit der Definitionsmenge $D_{f'_a} = \mathbb{R}$ ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_a mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie sämtliche Werte für a, sodass der Graph der zugehörigen Funktion f_a mehr als einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Begründen Sie, von welcher Art diese Punkte dann jeweils sind. **5 BE**

2.0 Die ganzrationale Funktion 4. Grades p und die lineare Funktion h sind auf $D_p = D_h = \mathbb{R}$ definiert.
In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von p und h dargestellt.
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



2.1 Geben Sie $p(h(3))$ an. **1 BE**

2.2 Begründen Sie ohne Rechnung, wie viele reelle Lösungen die Gleichung $h(p(x)) = 0$ besitzt. **2 BE**

3 Ein Becher, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit 60 °C heißer Trinkschokolade gefüllt ist, steht in einem Raum, in dem eine konstante Umgebungstemperatur von 20°C herrscht. Alle 27 Minuten halbiert sich die Temperaturdifferenz zwischen der Trinkschokolade und der Umgebungstemperatur. Die Funktion T beschreibt die Temperatur der Trinkschokolade in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten.
Geben Sie für die Funktion T einen möglichen Funktionsterm T(t) an. Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden. **2 BE**

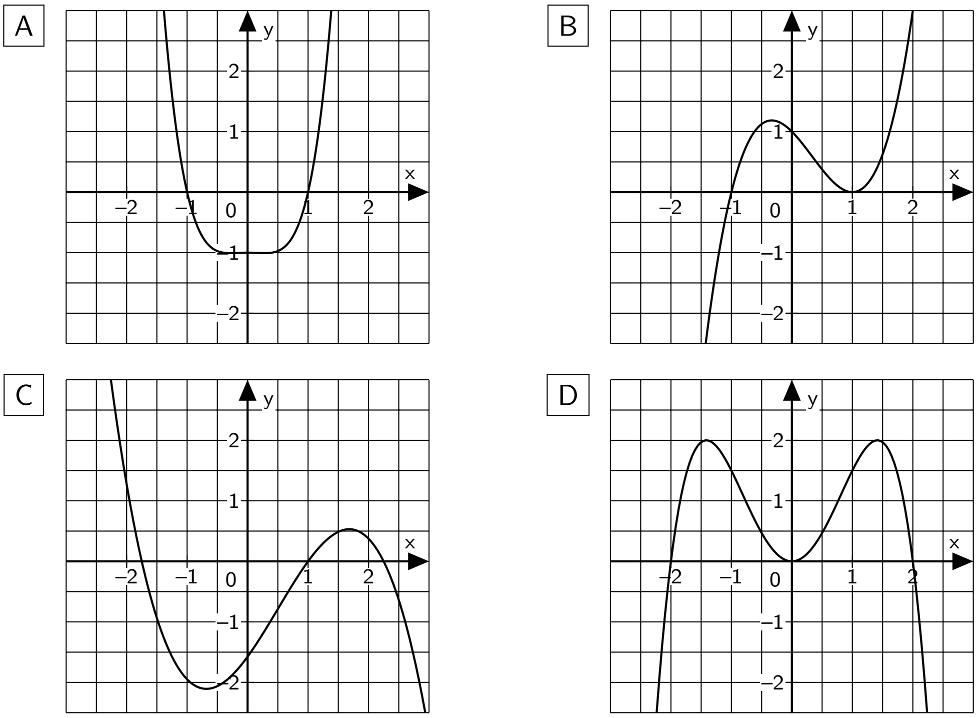
2019

4.1 Nennen Sie jeweils eine mögliche Bedeutung der folgenden Aussagen für den Verlauf des Graphen einer beliebigen ganzrationalen Funktion $k\colon x \longmapsto k(x)$ mit $D_k = \mathbb{R}$.

$$\text{(a) } k'(-1) < 0 \qquad \text{(b) } k''(-1) > 0 \qquad \text{(c) } \int_{-1}^{1} k(x)\,dx < 0$$

3 BE

4.2 Die nachfolgend dargestellten Schaubilder (A) bis (D) zeigen Ausschnitte der Graphen von ganzrationalen Funktionen vom Grad $n \geq 3$.



Geben Sie für alle Aussagen (a), (b) und (c) aus 4.1 an, welche der dargestellten Graphen (A) bis (D) die jeweilige Aussage erfüllen. **3 BE**

5.0 Gegeben sind folgende Funktionen mit ihrer jeweiligen Definitionsmenge:

$s\colon x \longmapsto e^{-x^2}$ $\qquad D_s = \mathbb{R}$

$t\colon x \longmapsto e^{2x} - e^{x}$ $\qquad D_t = \mathbb{R}$

$u\colon x \longmapsto e^{(2x)^2}$ $\qquad D_u = \mathbb{R}$

5.1 Nennen Sie diejenigen Funktionen, für welche folgende Aussage zutrifft:
„Für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte jeweils gegen Null.“
Begründen Sie für alle anderen Funktionen, warum diese für sie nicht zutrifft. **3 BE**

5.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes P der Graphen von s und u. **3 BE**

1 Punkte mit waagrechter Tangente entsprechen den Nullstellen der ersten Ableitung. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} & f_a'(x) = 0 \\ \iff \quad & (x-a)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x+3=0 \\ \iff \quad & x_{1;2} = a \quad \text{oder} \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Sind alle Nullstellen der ersten Ableitung gleich, so liegt nur ein Punkt mit waagrechter Tangente (Steigung gleich null) vor. Da alle Werte für a gesucht sind, sodass mehrere Punkte mit waagrechter Tangente vorliegen, muss also $\underline{\underline{a \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}}}$ sein.

In diesem Fall liegt bei $x = -3$ eine einfache Nullstelle der ersten Ableitung vor, bei der auch das Vorzeichen der Ableitung von „–" zu „+" wechselt. Der Graph besitzt dort also einen relativen Tiefpunkt.
Bei $x = a$ liegt eine doppelte Nullstelle der ersten Ableitung und kein Wechsel des Vorzeichens vor. Der Graph G_{f_a} besitzt hier einen Terassenpunkt.

2.1 Zunächst wird aus der Graphik der Funktionswert h(3) abgelesen. Dafür wird der y-Wert des Graphen von h bei $x = 3$ abgelesen, was zu $h(3) = -2$ führt.
Gesucht ist also $p(h(3)) = p(-2)$, wobei nun der y-Wert des Graphen von p bei $x = -2$ abgelesen wird, welcher 1 beträgt. Damit gilt:

$$\underline{\underline{p(h(3)) = 1}}$$

2.2 Die Gleichung $h(p(x)) = 0$ beschreibt die Nullstelle von $h(x)$, welche abgelesen aus dem Graph bei $x = 2$ liegt. Mit $h(2) = 0$ sind also die Lösungen der Gleichung gesucht, für die $p(x) = 2$ gilt. Am Graphen von p kann abgelesen werden, dass dieser genau zweimal den Funktionswert 2 annimmt. Die Gleichung $h(p(x)) = 0$ besitzt also genau zwei reelle Lösungen.

3 Die Raumtemperatur beträgt 20 °C, alle weiteren Temperaturänderungen werden zu dieser dazu addiert, für den Funktionsterm bedeutet dies:

$$T(t) = 20 + \ldots$$

Zu Beginn der Betrachtung liegt die Temperatur bei 60 °C, sodass zur Raumtemperatur ein Wert von 40 addiert werden muss, der allerdings veränderlich ist und somit noch mit einem weiteren Faktor multipliziert wird:

$$T(t) = 20 + 40 \cdot \ldots$$

Der variable Teil der Temperatur halbiert sich alle 27 Minuten, deshalb wird als Faktor der Faktor $\frac{1}{2}$ gewählt und ein Exponent, der für Halbierung aller 27 Minuten sorgt. Insgesamt gilt also:

$$\underline{\underline{T(t) = 20 + 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{27}}}}$$

4.1 **Bedeutung der Aussagen**

(a) Die erste Ableitung gibt den Wert der Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen an einer bestimmten Stelle an. Konkret bedeutet diese Aussage also, das die Steigung der Tangente an den Graphen von k an der Stelle $x = -1$ negativ ist, der Graph fällt also.

(b) Die zweite Ableitung gibt allgemein die Krümmung des Funktionsgraphen an. Konkret bedeutet diese Aussage, dass der Graph von k in der Umgebung von $x = -1$ linksgekrümmt ist.

(c) Zwischen den Integrationsgrenzen $x = -1$ und $x = 1$ wird ein Flächenstück zwischen dem Graph von k und der x-Achse eingeschlossen, die (zum größeren Teil) unterhalb der x-Achse liegt.

4.2 **Graphen, die die Aussagen erfüllen**

(a) Eine negative Steigung bei $x = -1$ weisen die Graphen bei A, C und D auf.

(b) Linkskrümmung in der Umgebung von $x = -1$ liegt bei den Graphen A und C vor.

c) Die eingeschlossene Fläche zwischen G_k und der x-Achse zwischen $x = -1$ und $x = 1$ liegt bei A und C vollständig unterhalb und bei B und D vollständig oberhalb der x-Achse, sodass dieses Kriterium von den Graphen in A und C erfüllt wird.

5.1 Für die Funktion s(x) ist die Aussage zutreffend.
Für die Funktion t(x) trifft die Aussage nicht zu, denn es gilt:

$$x \to \infty:\ t(x) = (e^{2x} - e^{x}) = \underbrace{e^{x}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(e^{x} - 1)}_{\to\infty} \to \infty$$

Für die Funktion u(x) trifft die Aussage ebenfalls nicht zu, denn es gilt:

$$x \to \pm\infty:\ u(x) = e^{\overbrace{(2x)^2}^{\to\infty}} \to \infty$$

5.2 Um die Koordinaten des gemeinsamen Punktes zu bestimmen werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{aligned}
& & s(x) &= u(x) & \\
&\iff & e^{-x^2} &= e^{(2x)^2} & \\
&\iff & e^{-x^2} &= e^{4x^2} & &|\ln(\ ) \\
&\iff & -x^2 &= 4x^2 & &|+x^2 \\
&\iff & 5x^2 &= 0 & \\
&\iff & x &= 0 &
\end{aligned}$$

Eingesetzt in eine der Funktionsgleichungen gilt:

$$s(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$$

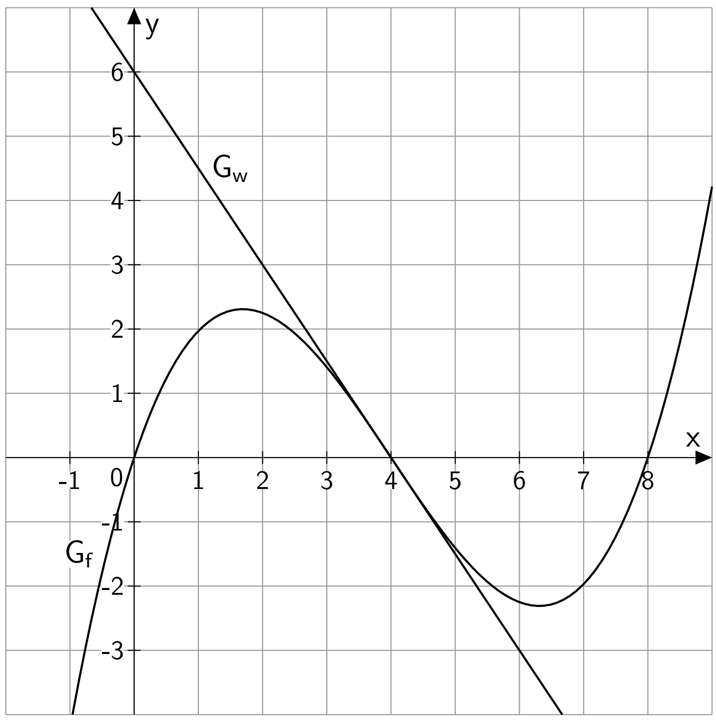
Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes lauten $P\,(0\,|\,1)$.

Fachabiturprüfung 2022 zum Erwerb der Fachhochschulreife an Fachoberschulen und Berufsoberschulen in Bayern

1 Gegeben sind die lineare Funktion $g\colon x \longmapsto -\frac{4}{3}x + 8$ und eine quadratische Funktion p mit den Definitionsmengen $D_g = D_p = \mathbb{R}$. Die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Achsen des Koordinatensystems liegen auf der Parabel G_p. Einer dieser Punkte ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel G_p.

Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung der quadratischen Funktion p. **4 BE**

2.0 Die ganzrationale Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ hat den Grad drei.
Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f von f. Zusätzlich ist die Wendetangente G_W von G_f dargestellt.
Ganzzahlige Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.
Es gilt: $\int_0^4 f(x)dx = 6$
Die erste Ableitungsfunktion von f wird mit f' bezeichnet.
F ist eine Stammfunktion von f in der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$.



2.1 Entscheiden Sie jeweils mit kurzer Begründung, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) f' besitzt die Wertemenge $W_{f'} = [-3; \infty[$.

b) Der Graph von F besitzt genau zwei Wendepunkte.

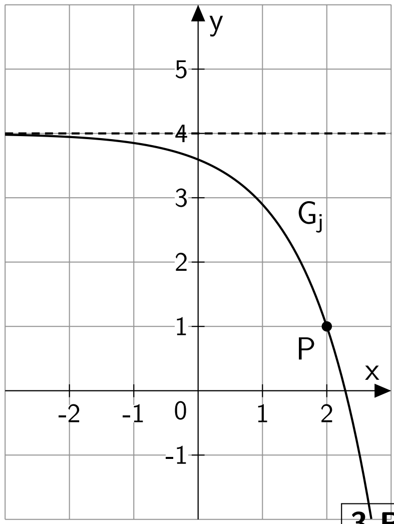
2 BE

2.2 Der Graph der Funktion f, die Wendetangente G_W und die y-Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Markieren Sie dieses Flächenstück in der Abbildung aus 2.0 und ermitteln Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **3 BE**

3.0 Gegeben ist die Funktion $j\colon x \longmapsto a \cdot e^{x-2} + c$ mit der Definitionsmenge $D_j = \mathbb{R}$, wobei $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$.

3.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von j in Abhängigkeit von a und c. Geben Sie auch eine Bedingung für a und c an, damit diese Nullstelle existiert. **3 BE**

3.2 Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_j der Funktion j, welcher durch den Punkt $P\,(2\,|\,1)$ verläuft. Zudem ist die Asymptote von G_j gestrichelt dargestellt.
Ermitteln Sie die für die nebenstehende Zeichnung verwendeten Werte von a und c.



3 BE

4.0 Gegeben ist die reelle Funktion $h_k\colon x \longmapsto (x-2)\cdot(x^2-k)$ mit der Definitionsmenge $D_{h_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

4.1 Geben Sie zwei verschiedene Werte für k an, sodass die Funktion h_k eine mehrfache Nullstelle besitzt. **2 BE**

4.2 Ermitteln Sie sämtliche Werte für k, für die der Graph von h_k keinen Extrempunkt besitzt. **5 BE**

1 **Funktionsgleichung der quadratischen Funktion p**

Zunächst werden die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Achsen des Koordinatensystems bestimmt. Schnittpunkt x-Achse (Nullstelle):

$$\begin{aligned} && g(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && -\frac{4}{3}x + 8 &= 0 \qquad |-8 \\ \Longleftrightarrow && -\frac{4}{3}x &= -8 \qquad |\cdot\left(\frac{3}{4}\right) \\ \Longleftrightarrow && x &= 6 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten $\underline{\underline{S_x\,(6\,|\,0)}}$. Schnittpunkt y-Achse:

$$g(0) = -\frac{4}{3}\cdot 0 + 8 = 8$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $\underline{\underline{S_y\,(0\,|\,8)}}$. Beide Schnittpunkte liegen auf G_p, wobei einer von ihnen der Scheitelpunkt ist. Es gibt daher zwei Varianten für die Lösung:

Variante 1: S_y als Scheitelpunkt

In diesem Fall ist $S_y\,(0\,|\,8)$ der Scheitelpunkt und als Ansatz für die Scheitelpunktform ergibt sich

$$p(x) = a(x-0)^2 + 8 = a\cdot x^2 + 8$$

Weiterhin muss der Punkt $S_x\,(6\,|\,0)$ auf der Parabel liegen, weshalb die Gleichung $p(6) = 0$ erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} && p(6) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && a\cdot 6^2 + 8 &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 36a + 8 &= 0 \qquad |-8 \\ \Longleftrightarrow && 36a &= -8 \qquad |:36 \\ \Longleftrightarrow && a &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{p(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 8}}$.

Variante 2: S_x als Scheitelpunkt

In diesem Fall ist $S_x\,(6\,|\,0)$ der Scheitelpunkt und als Ansatz für die Scheitelpunktform ergibt sich

$$p(x) = a\cdot(x-6)^2 + 0 = a\cdot(x-6)^2$$

Weiterhin muss der Punkt $S_y\,(0\,|\,8)$ auf der Parabel liegen, weshalb die Gleichung $p(0) = 8$ erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} && p(0) &= 8 \\ \Longleftrightarrow && a\cdot(0-6)^2 &= 8 \end{aligned}$$

1.0 Das Brennen von Keramik erfolgt oft bei Temperaturen über 800 °C. Die Temperatur im Ofen im Laufe des Brennvorgangs wird durch die sogenannte „Brennkurve“ beschrieben.
Die folgende Funktionsgleichung beschreibt in guter Näherung eine solche „Brennkurve“ für einen Brennvorgang, der insgesamt 23 Stunden dauert:

$$\vartheta(t) = 0{,}04 \cdot (t^4 - 47t^3 + 528t^2 + 576t + 500) \quad \text{mit} \quad D_\vartheta = [0; 23]$$

Die verstrichene Brenndauer t wird dabei in Stunden ab Beginn des Brennvorgangs zum Zeitpunkt $t = 0$ angeben, die Temperatur im Ofen $\vartheta(t)$ in Grad Celsius (°C).
Auf das Mitführen von Einheiten während der Berechnungen kann verzichtet werden. Endergebnisse sind samt Einheit zu notieren. Zeitpunkte sind in Stunden auf zwei Nachkommastellen und Temperaturwerte in Grad Celsius ganzzahlig zu runden.

1.1 Dem Datenblatt des Brennofens ist zu entnehmen, dass bei der ausgewählten Brennkurve die momentane Änderungsrate der Temperatur im Ofen in Abhängigkeit von t durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden kann.

$$\dot{\vartheta}(t) = 0{,}04 \cdot (4t^2 - 45t - 24) \cdot (t - 24)$$

Weisen Sie nach, dass diese Angabe im Datenblatt korrekt ist. **3 BE**

1.2 Bei Temperaturen im Brennofen von 1400 °C und mehr müssen besonders hitzebeständige Tragegestelle für die Keramikteile verwendet werden. Bestimmen Sie den Zeitraum der Aufheizphase, in der die Temperatur im Brennofen ansteigt. Entscheiden Sie mithilfe einer Rechnung, ob ein besonders hitzebeständiges Tragegestell verwendet werden muss. **9 BE**

1.3 Damit das Brenngut keinen Schaden nimmt, darf während der Aufheizphase die momentane Änderungsrate der Temperatur höchstens 115 °C pro Stunde betragen.
Untersuchen Sie, ob diese Bedingung erfüllt wird. **7 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von ϑ für $0 \leq t \leq 23$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: t-Achse: 2 Stunden $\hat{=}$ 1 cm und $\vartheta(t)$-Achse : 100 °C $\hat{=}$ 1 cm **4 BE**

1.5 Für besonders gute Brennergebnisse soll ab dem Zeitpunkt $t = 10$ für vier Stunden die durchschnittliche Temperatur im Ofen mindestens 900 °C betragen. Berechnen Sie den tatsächlichen Wert für die betrachtete Brennkurve. **4 BE**

2.0 Am Graphen G_h der natürlichen Exponentialfunktion $h\colon x \longmapsto e^x$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ werden folgende Veränderungen im kartesischen Koordinatensystem nacheinander durchgeführt:

1. Der Graph von h wird zunächst um eine Längeneinheit entlang der y-Achse nach unten verschoben, ...
2. ... dann um eine Längeneinheit entlang der x-Achse nach rechts verschoben ...
3. ... und schließlich an der x-Achse gespiegelt.

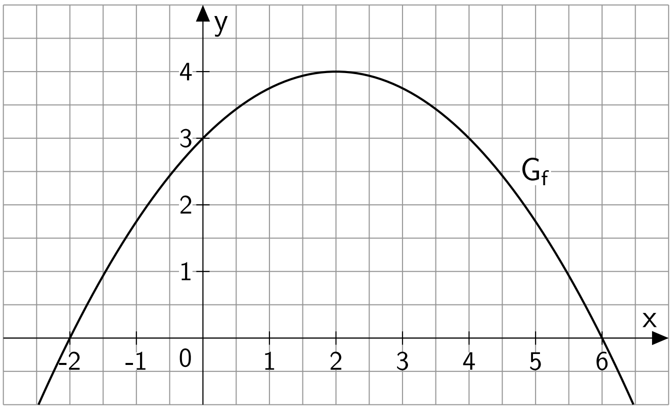
2.1 Der sich nach Schritt 3 ergebende Graph wird mit $G_{\tilde{h}}$ bezeichnet. Die ihm zugrunde liegende Funktion heißt $\tilde{h}$. Notieren Sie eine passende Funktionsgleichung von $\tilde{h}$. **3 BE**

2.2 Nehmen Sie Stellung zum Wahrheitsgehalt folgender Aussage:

„Ein beliebiges Vertauschen der Reihenfolge der Schritte aus 2.0 bewirkt stets einen im Vergleich zu $\tilde{h}$ aus 2.1 veränderten Funktionsterm.“

2 BE

3.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f der Funktion $f :\mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Die Gerade mit der Gleichung $x = k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $0 < k < 3$ schneidet G_f im Punkt P und die x-Achse im Punkt Q. Die Gerade mit der Gleichung $x = 2k$ schneidet G_f im Punkt D und die x-Achse im Punkt C. Dadurch wird ein Viereck PQCD festgelegt. Die Maßzahl des Flächeninhalts des Vierecks PQCD in Abhängigkeit von k wird mit A(k) bezeichnet.

3.1 Im Folgenden stehen drei Ansätze zur Berechnung der Maßzahl des Flächeninhalts des Vierecks PQCD zur Auswahl. Nur ein Ansatz ist richtig.

Ansatz 1	Ansatz 2	Ansatz 3
$A(k) = (2k - k) \cdot f(2k)$	$A(k) = \int_k^{2k} f(x)dx$	$A(k) = \frac{f(k) + f(2k)}{2} \cdot k$

Geben Sie den korrekten Ansatz an und erläutern Sie kurz mathematisch, warum Sie sich für diesen Ansatz entschieden haben. **2 BE**

3.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $A(k) = -\frac{5}{8}k^3 + \frac{3}{2}k^2 + 3k$

3.2.1 Bestimmen Sie den Wert für k so, dass der Flächeninhalt des Vierecks PQCD maximal wird. Berechnen Sie zudem die Maßzahl des maximalen Flächeninhalts. Ergebnisse sind auf eine Nachkommastelle zu runden. **7 BE**

3.2.2 Markieren Sie in der Abbildung aus 3.0 ein Flächenstück, dessen Flächenmaßzahl sich über den folgenden Ansatz berechnen lässt: $\int_2^4 f(x)dx - A(2)$. **2 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion ϑ mit $\vartheta(t) = 0{,}04 \cdot (t^4 - 47t^3 + 528t^2 + 576t + 500)$, die die Temperatur des Ofens in °C in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit t in Stunden angibt.

1.1 **Nachweis der Angabe im Datenblatt**

Zunächst wird die erste Ableitung der gegebenen Funktion bestimmt:

$$\vartheta(t) = 0{,}04 \cdot (t^4 - 47t^3 + 528t^2 + 576t + 500)$$
$$\dot{\vartheta}(t) = 0{,}04 \cdot (4t^3 - 47 \cdot 3t^2 + 528 \cdot 2t + 576) = 0{,}04 \cdot (4t^3 - 141t^2 + 1056t + 576)$$

Um die Terme zu vergleichen, wird die Funktion in der Angabe umgeformt:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t) &= 0{,}04 \cdot (4t^2 - 45t - 24) \cdot (t - 24)\\ &= 0{,}04 \cdot (4t^2 \cdot t - 45t \cdot t - 24 \cdot t + 4t^2 \cdot (-24) - 45t \cdot (-24) - 24 \cdot (-24))\\ &= 0{,}04 \cdot (4t^3 - 45t^2 - 24t - 96t^2 + 1080t + 576)\\ &= 0{,}04 \cdot (4t^3 - 141t^2 + 1056t + 576)\end{aligned}$$

Die Terme stimmen überein, demnach ist die Angabe im Datenblatt korrekt.

1.2 **Bestimmen des Zeitraums der Aufheizphase**

Es werden die Nullstellen der ersten Ableitung ermittelt. Dafür wird der gegebene Term aus Teilaufgabe 1.1 verwendet:

$$\dot{\vartheta}(t) = 0{,}04 \cdot (4t^2 - 45t - 24) \cdot (t - 24) = 0$$

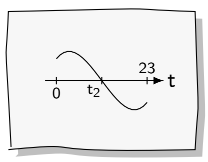
Entsprechend des Satzes vom Nullprodukt ist die Gleichung erfüllt, wenn der Term $(4t^2 - 4t - 24)$ oder der Term $(t - 24)$ gleich null wird. Für den ersten Term wird die quadratische Lösungsformel verwendet:

$$t_{1;2} = \frac{-(-45) \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-24)}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm \sqrt{2409}}{8}$$
$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{45 - \sqrt{2409}}{8} \approx -0{,}51 \quad \text{oder} \quad t_2 = \frac{45 + \sqrt{2409}}{8} \approx 11{,}76$$

Die Nullstelle des zweiten Termes $(t - 24)$ kann direkt zu $t_3 = 24$ abgelesen werden. Wegen der Definitionsmenge $D_\vartheta = [0;\, 23]$ ist allerdings nur die Lösung $t_2 \approx 11{,}76$ relevant. Mithilfe einer Skizze der ersten Ableitung, welche eine Funktion dritten Grades mit positivem Leitkoeffizient ist, wird eine Monotonietabelle erstellt:

t	$t = 0$	$0 < t_2 < t_2$	$t = t_2$	$t_2 < t < 23$	$t = 23$
$\dot{\vartheta}(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
G_ϑ	TIP (Rand)	↗	HOP	↘	TIP (Rand)

Skizze $G_{\dot{\vartheta}}$



Aus der Tabelle kann entnommen werden, dass die Aufheizphase zu Beginn startet und nach etwa $\underline{\underline{11{,}76\,\text{h}}}$ endet.

Maximale Temperatur

Bei $t_2 \approx 11{,}76$ liegt ein relatives Maximum der Funktion. Da die erste Ableitung innerhalb des Definitionsbereichs keinen weiteren Vorzeichenwechsel vorweißt, handelt es sich dabei auch um das absolute Maximum der Funktion. Es wird der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt:

$$\vartheta(11{,}76) = 0{,}04 \cdot ((11{,}76)^4 - 47 \cdot (11{,}76)^3 + 528 \cdot (11{,}76)^2 + 576 \cdot 11{,}76 + 500) \approx 919$$

Die absolute Maximaltemperatur beträgt 919 °C. Es muss demnach also kein besonders hitzebeständiges Tragegestell verwendet werden.

1.3 Maximale Änderungsrate der Temperatur

Zunächst wird die zweite Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta}(t) &= 0{,}04 \cdot (4t^3 - 141t^2 + 1056t + 576)\\
\ddot{\vartheta}(t) &= 0{,}04 \cdot (4 \cdot 3t^2 - 141 \cdot 2t + 1056) = 0{,}04 \cdot (12t^2 - 282t + 1056)
\end{aligned}$$

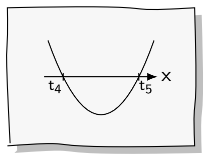
Weiterhin werden die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
& & \ddot{\vartheta} &= 0 \\
\iff & & 0{,}04 \cdot (12t^2 - 282t + 1056) &= 0 \qquad |:0{,}04\\
\iff & & 12t^2 - 282t + 1056 &= 0\\
\Rightarrow & & t_{4;5} &= \frac{-(-282) \pm \sqrt{(-282)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1056}}{2 \cdot 12}\\
& & &= \frac{282 \pm \sqrt{28836}}{24}\\
\Rightarrow & & t_4 = \frac{282 - \sqrt{28836}}{24} \approx 4{,}67 \quad &\text{oder} \quad t_5 = \frac{282 + \sqrt{28836}}{24} \approx 18{,}83
\end{aligned}$$

Es wird eine Vorzeichentabelle der zweiten Ableitung erstellt:

t	$0 \le t < t_4$	$t = t_4$	$t_4 < t < t_5$	$t = t_5$	$t_5 < t$
$\ddot{\vartheta}(t)$	+	0	–	0	+
$G_{\dot{\vartheta}}$	↗	HOP	↘	TIP	↗

Skizze $G_{\ddot{\vartheta}}$



Die erste Ableitung, welche die momentane Änderungsrate angibt hat somit ein Maximum nach etwa $t_4 \approx 4{,}67$ h. Es wird der Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle berechnet:

$$\dot{\vartheta}(4{,}67) = 0{,}04 \cdot (4 \cdot (4{,}67)^3 - 141 \cdot (4{,}67)^2 + 1056 \cdot 4{,}67 + 576) \approx 113{,}59$$

Die maximale Änderungsrate beträgt 113,59 °C pro Stunde. Demnach nimmt das Brenngut keinen Schaden.

1.4 Graphische Darstellung

Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

K

M

N

S

W

Analytische Geometrie

A

B

E

F

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 12 Bayern 2023

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- Original-Prüfungen mit Lösungen **2019 - 2022**
- Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- Inkl. Anpassungen und der Original-Prüfung 2022 mit Lösungen

Abi-Trainer für FOS · BOS 12 MT 2023

DIGITALES COACHING

- Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. : EAN 9783743000872

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0087-2
9 783743 000872 >
€ 13,90

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de