JETZT mit LERN-VIDEOS

13. Klasse

FOS·BOS 2023
Abitur Bayern

Mathematik Nichttechnik

Zusätzlich mit

- Miniskript,

- Musterprüfungen und

- Übungaufgaben

Inkl. 2022
Original-Prüfungen
mit Lösungen

FOS·BOS 13

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag
www.lern-verlag.de

Abiturprüfung
FOS | BOS Bayern 2023
Mathematik Nichttechnik
13. Klasse

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der
Beruflichen Oberschule
nichttechnischer Zweig
in Bayern

INKL. Original-Prüfungen 2022 mit Lösungen

lernverlag
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler, liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Band **Abiturprüfung FOS/BOS Bayern 2023 Mathematik Nichttechnik 13. Klasse** sind die letzten vier zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2019 bis **2022** und eine Musterprüfung nach LehrplanPLUS enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die **Abschlussprüfung 2023** findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **Montag, 22.05.2023** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2022)
Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Abitur 2023 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, cleverlag und lern.de sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Dr. Michael Fuchs (Berufliche Oberschule Memmingen), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

8. ergänzte Auflage © 2022 1.Druck
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0092-6
Artikelnummer:
EAN 9783743000926

Aktuelles Rund um die Prüfung 2023 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über zur gebrochen-rationalen Funktion oder Lagebeziehungen und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2022/2023 - ISBN: 978-3-7430-0092-6

- Original-Prüfung 2018 herausgenommen.

- Gemeldete und selbst entdeckte Schreibfehler in Angaben beseitigt.

- **Original-Prüfung 2022 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt.**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2023**.

Inhaltsverzeichnis

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2023

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2023 an der FOSBOS:
Kürzungen aus dem Vorjahr bleiben bestehen - Nicht prüfungsrelevant
(Stand: 27.06.2022):

- Aus LB 2: bestimmen anhand ausreichend vieler Informationen über eine gebrochen-rationale Funktion bzw. ihres Graphen einen geeigneten Funktionsterm, um damit weitere Eigenschaften des Graphen der betrachteten Funktion zu ermitteln
- Aus LB 2: berechnen uneigentliche Integrale 1. und 2.Art gebrochen-rationaler Funktionen, um damit Maßzahlen der Flächeninhalte von Flächen zu ermitteln, die in x-oder y-Richtung unbegrenzt sind, sofern diese existieren
- Aus LB 4: ermitteln Stammfunktionen von Funktionen, die sich auf die Form $x \mapsto e^{ax+b}$ oder $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ zurückführen lassen
- Aus LB 4: bestimmen mithilfe der partiellen Integration Stammfunktionen von Funktionen, deren Terme sich als Produkte darstellen lassen, insbesondere $x \mapsto x \cdot e^x$, $x \mapsto 1 \cdot \ln(x)$, $x \mapsto x \cdot \ln(x)$
- Aus LB 7: Abstände zwischen zwei Objekten in $\mathbb{R}^3$ berechnen

Bitte fragen Sie bzgl. aktuellen Änderungen immer auch noch einmal bei Ihrer Lehrkraft nach!

MINISKRIPT

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**" zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

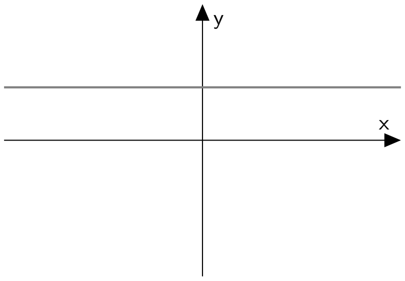
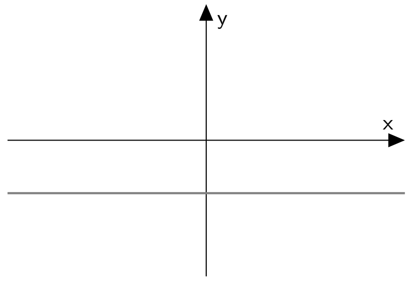
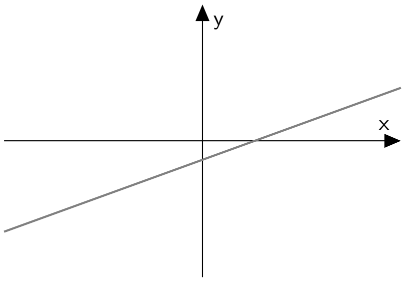
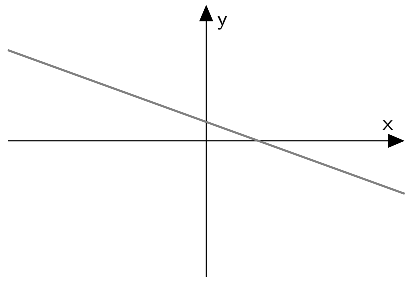
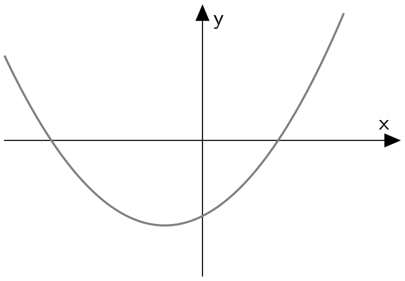
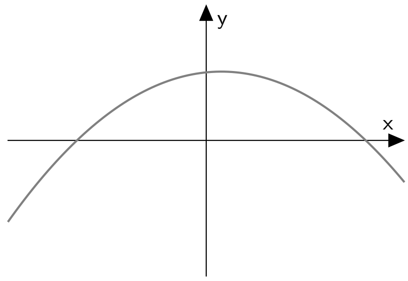
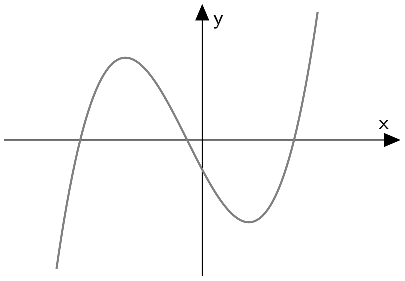
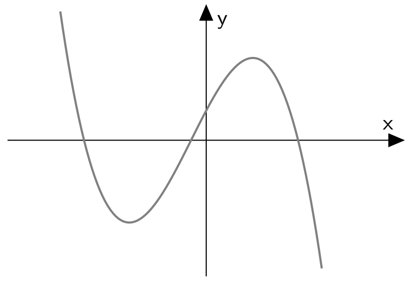
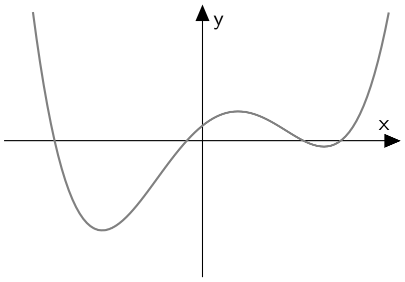
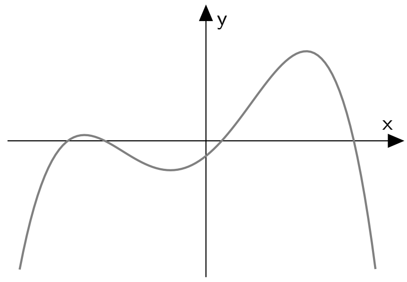
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan" zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**" der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
  - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte", „Steigungswerte" und „Krümmungswerte" definiert bzw. berechnet.
  - Funktionen kann man ableiten.
  - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**".
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, \ldots)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient" a niemals null sein darf. Dies ist „logisch", da ja der „namensgebende" Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**", die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich" sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
  - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über"– bzw. „unterhalb der x-Achse".
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**".

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**"!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)

mögliche Graphentypen für a $>$ 0	**mögliche** Graphentypen für a $<$ 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug“ alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug“ wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen“ zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug“ einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge“ kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge“ zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten“ werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Lösungen - Polynome

1 Vollständige Lösung:

Werkzeug	Gleichungstyp	Beispiel
Äquivalenzumformung	lineare Gleichung	$x + 1 = 0$
Ausklammern	quadratische Gleichung ($c = 0$) kubische Gleichung ($d = 0$) Gleichung 4. Grades ($e = 0$)	$4x^2 - 2x = 0$ $3x^3 - 2x^2 + x = 0$ $x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
Mitternachtsformel	quadratische Gleichung (vollständige Gleichung)	$3x^2 - 4x + 1 = 0$
Radizieren	quadratische Gleichung ($b = 0$)	$4x^2 - 16 = 0$
Polynomdivision	kubische Gleichung (zum Vereinfachen) Gleichung 4. Grades (zum Vereinfachen)	$3x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$ $4x^4 - 3x^2 + 2x^2 + x - 1 = 0$
Substitution	Gleichung 4. Grades ($b = 0 \wedge d = 0$)	$4x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

2 Für jede Teilaufgabe wird die Lösung einer Gleichung ausführlich angegeben und für die restlichen Gleichungen jeweils eine Kurzlösung.

a) Gleichung I): $2x - 4 = 0$; Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 2x - 4 = 0 && \mid +4 \\ \iff & 2x = 4 && \mid :2 \\ \iff & \underline{\underline{x_1 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{2}{7}}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 3}}$

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{5}}}$

b) Gleichung I): $x^2 - 4 = 0$; Radizieren:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4 = 0 && \mid +4 \\ \iff & x^2 = 4 && \mid \pm\sqrt{} \\ \iff & \underline{\underline{x_1 = -2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}}$

Gleichung III): keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\sqrt{3}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3}}}$

c) Gleichung I): $2x^2 - 4x - 6 = 0$; Mitternachtsformel:

$$x_{1;2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$\underline{\underline{x_1 = -1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = 3}}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_{1;2} = -2}}$ (Doppellösung)

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{3}}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = \frac{5}{6}}}$

Gleichung IV): keine Nullstellen

d) Gleichung I): $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ Substitution:

$$z = x^2 \quad \Rightarrow \quad 2z^2 - 10z + 8 = 0$$

Anwendung Mitternachtsformel:

$$z_{1;2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4}$$

$$z_1 = 1 \ \vee \ z_2 = 4$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm 1 \quad \underline{\underline{x_1 = -1}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = 1}}$$

$$z_2 = x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{3;4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 2 \quad \underline{\underline{x_3 = -2}} \ \vee \ \underline{\underline{x_4 = 2}}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_{1;2} = -2}}$ (Doppellösung) $\vee$ $\underline{\underline{x_{3;4} = 2}}$ (Doppellösung)

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = -1}} \ \vee \ \underline{\underline{x_2 = 1}} \ \vee \ \underline{\underline{x_3 = -1{,}3}} \ \vee \ \underline{\underline{x_4 = 1{,}3}}$

e) Gleichung I): $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$; da es keinen konstanten Summanden gibt, kann zunächst ausgeklammert werden:

$$2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = x(2x^3 + 2x^2 - 4{,}5x - 4{,}5) = 0$$

Es ergibt sich bereits die erste Nullstelle zu $\underline{\underline{x_1 = 0}}$. In der Klammer verbleibend ist ein Term dritten Grades, für welchen nun eine Nullstelle erraten werden muss. Wie bereits erwähnt sind beispielsweise $-2; -1; 1$ und 2 häufige Lösungen, sodass diese beim Erraten zuerst getestet werden können. Durch Einsetzen dieser Werte in den kubischen Term in Klammern zeigt sich, ob es sich um eine Nullstelle handelt:

$$\begin{aligned} x = -2 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 4{,}5 \cdot (-2) - 4{,}5 = -3{,}5 \neq 0 \\ x = -1 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 4{,}5 \cdot (-1) - 4{,}5 = 0 \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 4{,}5 \cdot 1 - 4{,}5 = -5 \neq 0 \\ x = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 4{,}5 \cdot 2 - 4{,}5 = 10{,}5 \neq 0 \end{aligned}$$

Eine weitere Nullstelle liegt also bei $\underline{\underline{x_2 = -1}}$. Der kubische Term kann nun mithilfe der gefundenen Nullstelle mittels Polynomdivision weiter vereinfacht werden.

$$\begin{array}{rllll} & (2x^3 & + 2x^2 & - 4{,}5x & - 4{,}5) \ : \ (x+1) = 2x^2 - 4{,}5 \\ - & (2x^3 & + 2x^2 & &) \\ \hline & & & - 4{,}5x & - 4{,}5 \\ - & & & (- 4{,}5x & - 4{,}5) \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Die gegebene Gleichung kann mithilfe der gefundenen Nullstellen also wie folgt vereinfacht werden:

$$2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = x(x+1)(2x^2 - 4{,}5) = 0$$

Schließlich müssen noch die Nullstellen des quadratischen Terms bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 4{,}5 = 0 & & \mid +4{,}5 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x^2 = 4{,}5 & & \mid :2 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 = 2{,}25 & & \mid \sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_3 = -1{,}5}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_4 = 1{,}5}} & & \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = 0}} \ \vee\ \underline{\underline{x_2 = -2}} \ \vee\ \underline{\underline{x_3 = 0{,}5}} \ \vee\ \underline{\underline{x_4 = 4}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 0}} \ \vee\ \underline{\underline{x_2 = -1}} \ \vee\ \underline{\underline{x_3 = -0{,}3}} \ \vee\ \underline{\underline{x_4 = 5}}$

Symmetrie

Symmetrie

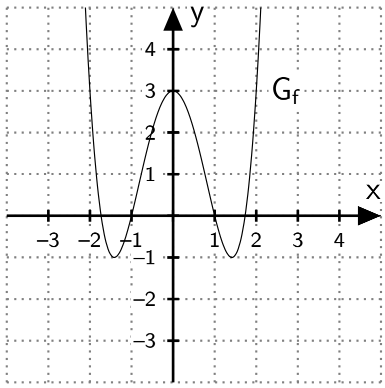
Für das Symmetrieverhalten eines Graphes einer ganzrationalen Funktion f gilt folgendes:

- *Achsensymmetrie zur y-Achse*: $f(-x) = f(x)$
  Das ist immer dann der Fall, wenn das Polynom **nur gerade Exponenten** hat.
- *Punktsymmetrie zum Ursprung*: $f(-x) = -f(x)$
  Das ist immer dann der Fall, wenn das Polynom **nur ungerade Exponenten** hat.

In allen anderen Fällen besitzt der Graph keine Standardsymmetrie. Er kann immernoch punkt- bzw. achsensymmetrisch sein, aber eben nicht zum Urspung bzw. zur y-Achse.

Beispiel zur Achsensymmetrie:
$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

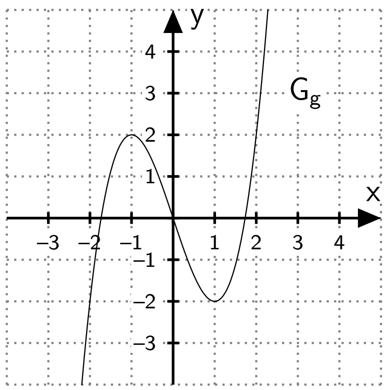
$$\begin{aligned} & \mathbf{f(-x) = f(x)} \\ \iff\quad & (-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \iff\quad & (-1)^4x^4 - 4(-1)^2x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \iff\quad & 1 \cdot x^4 - 4 \cdot 1 \cdot x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \iff\quad & x^4 - 4x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \end{aligned}$$



Somit ist der Graph G_f von f symmetrisch zur y-Achse.
Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man sich die Exponenten ansieht. Diese sind nur gerade (4;2;0).

Beispiel zur Punktsymmetrie:
$g(x) = x^3 - 3x$

$$\begin{aligned} & \mathbf{g(-x) = -g(x)} \\ \iff\quad & (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) \\ \iff\quad & (-1)^3x^3 - 3(-1)x = -(x^3 - 3x) \\ \iff\quad & (-1) \cdot x^3 - 3(-1)x = -(x^3 - 3x) \\ \iff\quad & -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) \\ \iff\quad & -(x^3 - 3x) = -(x^3 - 3x) \end{aligned}$$



Somit ist der Graph G_g von g punktsymmetrisch zum Ursprung.
Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man sich die Exponenten ansieht. Diese sind nur **un**gerade (3;1).

Vektoren

Vektoren

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden als Spaltenvektoren dargestellt und durch ihre Koordinaten beschrieben. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein **Ortsvektor** entspricht dem Pfeil vom Koordinatenursprung zu einem bestimmten Punkt. Die Koordinaten des Ortsvektors ergeben sich aus den Koordinaten des Punktes. Beispiel:

$$\text{Punkt } P\,(\,3\,|\,2\,|\,6) \quad \Rightarrow \quad \text{Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet, repräsentiert einen Vektor zwischen diesen beiden Punkten. Die Koordinaten dieses Vektors ergeben sich aus den Koordinaten der beiden Punkte nach der Merkregel „Spitze minus Fuß“. Beispiel:

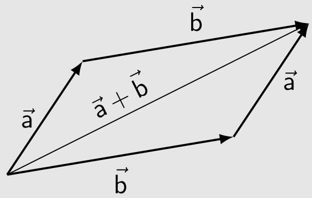
$$\text{Punkte } P\,(\,3\,|\,2\,|\,6) \text{ und } Q\,(\,4\,|\,-1\,|\,3) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einfache Vektoroperationen

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren und das Produkt eines Skalares (Zahl) mit einem Vektor wird jeweils komponentenweise berechnet:

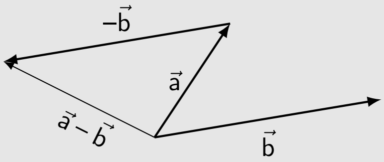
Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



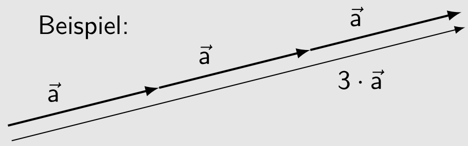
Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Beispiel

Gegeben sind die Punkte A (1 | − 2 | 4), B (3 | 2 | 5) und der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Koordinaten der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$, außerdem die Koordinaten von $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{f} = 4 \cdot \vec{c}$.
Die Koordinaten der Ortsvektoren ergeben sich aus den Koordinaten der Punkte und der Verbindungsvektor gemäß der Merkregel „Spitze minus Fuß“:

$$A\,(1\,|-2\,|\,4) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad B\,(3\,|\,2\,|\,5) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die anderen Vektoren ergeben sich, indem die Operationen wie beschrieben immer komponentenweise ausgeführt werden:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -2+1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

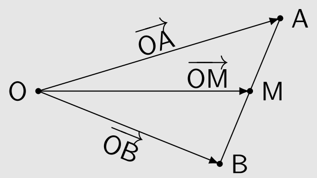
$$\vec{e} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 2-1 \\ 5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = 4 \cdot \vec{c} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Besondere Ortsvektoren - Mittelpunkt einer Strecke

Für den Ortsvektor des Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$



Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke zwischen A (1 | − 2 | 4) und B (3 | 2 | 5).

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+3 \\ -2+2 \\ 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M\,(2\,|\,0\,|\,4{,}5)$$

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2019	AI	$f\colon x \longmapsto \dfrac{0{,}5x^2-3x+0{,}5}{x^2+1}$	**87**	NST; Extrema; Fläche
		$h(x)=\ln(-x^2+2x)$	**87**	NST; Grenzwert; Monotonie; Extrema
		$L(t)=\dfrac{7500\cdot a}{a+e^{-k\cdot t}}+2000$	**88**	Fkt. aufstellen; Wendepunkt; Grenzwert
	AII	$h\colon x \longmapsto \dfrac{x^3+3x^2+3x}{x^2+2x}$	**97**	NST; Grenzwert
		$f\colon x \longmapsto \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$	**97**	Grenzwert; Monotonie; Extrema; Integral
		$A(T)=\dfrac{7200}{72+e^{0{,}0106T}}$	**98**	Monotonie; Wendepunkt
		$j(x)=80\ln\left(\dfrac{60x}{3-x}\right)$	**99**	Wertemenge; Wendepunkt
Muster	oHm AII	$f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$	**129**	Definitionsmenge; Grenzwert
	mHm AI	$f\colon x \longmapsto \ln(x^2+2x)$	**139**	Grenzwert; NST; Monotonie; Integral
		$L(t)=14{,}7\cdot e^{-0{,}03(t-7{,}5)^2}+13{,}4$	**139**	Extrema
	mHm AII	$s(x)=\dfrac{5}{1+e^{2x}}-2{,}5$	**147**	Symmetrie
		$a(x)=\dfrac{b}{1+e^{-2x+c}}+d$	**147**	Parameter; Integral
		$g(x)=e^{\ln((x-5)^2)+6x}$	**148**	alternativer Funktionsterm
		$f(x)=(x^2-10x+25)\cdot e^{6x}$	**148**	NST; Grenzwert; Integral
2020	oHm A	$a\colon x \longmapsto \frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$ und $b\colon x \longmapsto \frac{1}{2}x$	**165**	Symmetrie; Extrema; Tangente
		$f\colon x \longmapsto \ln(x)$; $g\colon x \longmapsto x\cdot\ln(x^2)$ und $h\colon x \longmapsto \frac{1}{x}\cdot\ln(x-1)$	**166**	Graph zuordnen; Definitionsmenge; Fläche
	mHm AI	$f\colon x \longmapsto \dfrac{x^2}{x-1}$	**174**	Asymptote; NST; Monotonie; Wertemenge
		$g\colon x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$	**174**	NST; Grenzwert; Asymptote; Extrema; Fläche
		$k\colon t \longmapsto 0{,}75t\cdot e^{-0{,}25t+2}$	**175**	Extrema; Integral
		$g(t)=c\cdot t\cdot e^{-0{,}25t+2}$	**175**	Parameter
	mHm AII	$h\colon x \longmapsto \dfrac{3x^2-2x}{-2x^3+4x}$	**182**	Definitionsmenge; NST; Definitionslücken; Asymptoten
		$f\colon x \longmapsto \dfrac{3x-2}{-2x^2+4}$	**182**	Definitionsmenge; Monotonie; Wendepunkt
		$V\colon t \longmapsto \dfrac{1263}{1+2{,}5\cdot e^{-a\cdot t}}$	**183**	Parameter; Monotonie

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2021	oHm A	$g\colon x \longmapsto \dfrac{(x+2)(x-2)}{-x(x-2)}$	**201**	Definitionslücken; NST; Asymptoten
		$k\colon x \longmapsto \dfrac{x+1}{e^x-1}$	**202**	Asymptote; Grenzwert
	mHm AI	$f\colon x \longmapsto \dfrac{6x+12}{x^2+4x+6}$	**209**	NST; Asymptote; Grenzwert; Extrema; Wendepunkte; Stammfunktion
		$S(t) = \dfrac{a}{1{,}56e^{bt}-1}$	**210**	Parameter; Grenzwert; Monotonie; Integral
	mHm AII	$f\colon x \longmapsto \dfrac{-x^2-x-1}{x}$	**217**	Grenzwert; Asymptote; NST; Monotonie; Extrema
		$g\colon x \longmapsto \ln(f(x))$	**217**	Definitionsmenge; NST; Extrema
		$B(t) = \dfrac{A}{2+98e^{ct}}$	**218**	Parameter; Grenzwert; Monotonie
2022	oHm A	$p(x) = \dfrac{x^2-1}{4-x^2}$	**237**	Symmetrie; Definitionslücken; Asymptoten
		$f(x) = 2x \cdot \ln(x+3)$	**237**	Grenzwert; NST
		$g(x) = -e^{-0{,}5x} + e$	**237**	Fläche
	mHm AI	$f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{-2x+4}$	**244**	NST; Grenzwert; Definitionslücke; Asymptoten; Monotonie; Extrema; Fläche
		$w(t) = \dfrac{e^{2t}+60e^t-60}{e^{2t}+10e^t+25}$	**245**	Grenzwert; alternativer Funktionsterm; Extrema
	mHm AII	$f(x) = -1 + (\ln(x))^2$	**252**	NST; Grenzwert; Asymptoten; Monotonie; Extrema; Wertemenge; Wendetangente; Fläche
		$K(x) = 2(e^{0{,}25x-1{,}25} + e^{-0{,}25x+1{,}25})$	**253**	Extrema
Lösungen:		StD Dr. Michael Fuchs (Berufliche Oberschule Memmingen) und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

Abiturprüfung 2019
zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \dfrac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen. **2 BE**

1.2 Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an und bestimmen Sie die Koordinaten möglicher gemeinsamer Punkte des Graphen G_f mit seiner Asymptote. **4 BE**

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$] **7 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptote im Bereich $-4 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. **5 BE**

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F\colon x \longmapsto 0{,}5x - 1{,}5 \cdot \ln(x^2+1)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. **2 BE**

1.6 Der Graph der Funktion f, seine Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung der Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts. **4 BE**

1.7 Es gilt $\int\limits_{-3}^{3}(0{,}5 - f(x))\,dx = 0$ (Nachweis nicht nötig!). Deuten Sie dieses Ergebnis geometrisch.

2 BE

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion h mit $h(x) = \ln(-x^2+2x)$ und der maximalen Definitionsmenge $D_h =]0;\,2[$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie die Nullstelle von h. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h an den Rändern der Definitionsmenge. **5 BE**

2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle und bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_h. **5 BE**

3.0 Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Gesamtlänge aller Autobahnen in der Bundesrepublik Deutschland ab dem Jahresende 1950 bis 1990 an
(Quelle: Statistisches Bundesamt):

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822

Ausgehend von den Tabellenwerten kann die Gesamtlänge aller Autobahnen ab 1950 modelliert werden durch die reelle Funktion L mit der Gleichung $L(t) = \dfrac{7500 \cdot a}{a + e^{-k \cdot t}} + 2000$, wobei $t \geq 0$.
Dabei gibt t die Zeit in Jahren ab dem Jahresende 1950 und L(t) die Länge ds Autobahnnetzes in Kilometern an.
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

3.1 Bestimmen Sie mithilfe der Werte aus den Jahren 1950 und 1990 die Werte der Parameter a und k.

[Ergebnisse: $a \approx 0{,}017$; $k \approx 0{,}16$] **4 BE**

3.2 Das Modell wird als aussagekräftig und realitätsnah eingestuft, wenn die berechneten Werte von den tatsächlichen um weniger als 5 % abweichen. Zur Überprüfung werden in der folgenden Tabelle die beiden Hilfsfunktionen U und O mit $U(t) = 0{,}95 \cdot L(t)$ bzw. $O(t) = 1{,}05 \cdot L(t)$ herangezogen.

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
U(t)	2019	2160							
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822
O(t)			2712						

Übertragen Sie die Tabelle auf Ihr Bearbeitungsblatt und berechnen Sie die fehlenden Werte. Beurteilen Sie, ob das Modell somit die genannten Kriterien erfüllt. **4 BE**

3.3 Bestimmen Sie das Jahr, in dem nach diesem Modell die Gesamtlänge von 7500 km überschritten wurde. **3 BE**

3.4 Berechnen Sie die Wendestelle t_W der Funktion L und geben Sie das zugehörige Jahr an.

Verwenden Sie hierzu ohne Nachweis $\ddot{L}(t) = \dfrac{-3{,}264e^{-0{,}16t}(0{,}017 - e^{-0{,}16t})}{(0{,}017 + e^{-0{,}16t})^3}$.

Berechnen Sie außerdem $\dot{L}(t_W)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. **6 BE**

3.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion L für $0 \leq t \leq 40$ in ein geeignetes Koordinatensystem. **3 BE**

3.6 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t \to \infty} L(t)$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang. Tatsächlich ist die Gesamtlänge aller Autobahnen nach 1990 stärker angewachsen, als nach dem Modell zu erwarten gewesen wäre. Nennen Sie einen möglichen Grund hierfür. **4 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1}$ mit maximaler Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Nullstellen**

Um die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion zu finden, werden die Nullstellen des Zählerterms bestimmt.

$$\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\iff \quad & 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5 = 0 \\
\iff \quad & x_{1;2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}{2 \cdot 0{,}5} \\
\iff \quad & x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{8}}{1} \\
\iff \quad & \underline{\underline{x_1 = 3 - \sqrt{8}}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = 3 + \sqrt{8}}}
\end{aligned}$$

1.2 **Art und Gleichung der Asymptote**

Da es keine Definitionslücke gibt, liegt auch keine senkrechte Asymptote vor. Da außerdem Zähler- und Nennergrad jeweils gleich sind, liegt eine waagrechte Asymptote vor. Deren Gleichung kann anhand der Leitkoeffizienten vor x^2 im Zähler- und im Nennerterm abgeleitet werden:

$$f(x) = \frac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1} = \frac{\mathbf{0{,}5}x^2 - 3x + 0{,}5}{\mathbf{1}x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

Die Gleichung der waagrechten Asymptote lautet $\underline{\underline{y = 0{,}5}}$.

Gemeinsame Punkte von G_f mit seiner Asymptote

Um die Koordinaten möglicher gemeinsamer Punkte zu finden werden die Funktionsgleichungen von f(x) und der Asymptote gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
& \frac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1} = 0{,}5 && | \cdot (x^2+1) \\
\iff \quad & 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5 = 0{,}5x^2 + 0{,}5 && | - (0{,}5x^2 + 0{,}5) \\
\iff \quad & -3x = 0 && | : (-3) \\
\iff \quad & x_3 = 0
\end{aligned}$$

Der gemeinsame Punkt liegt bei $x = 0$. Da die Asymptote den konstanten Funktionswert $y = 0{,}5$ besitzt, lauten die Koordinaten des gemeinsamen Punktes $\underline{\underline{S\,(0\,|\,0{,}5)}}$.

1.3 Für die Bestimmung der Extrempunkte der Funktion wird zunächst mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung ermittelt:

Ermitteln der ersten Ableitung

$$f(x) = \frac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left[\frac{(0{,}5x^2-3x+0{,}5)'\cdot(x^2+1)-(0{,}5x^2-3x+0{,}5)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right] \qquad \text{(Ansatz Quot.regel)}$$
$$= \frac{(0{,}5\cdot 2x-3)\cdot(x^2+1)-(0{,}5x^2-3x+0{,}5)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} \qquad \text{(Anwendung)}$$
$$= \frac{x^3+x-3x^2-3-x^3+6x^2-x}{(x^2+1)^2} \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$
$$= \frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2} \qquad \text{(Zur Kontrolle angeg.)}$$

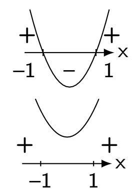
Ermitteln der Punkte mit waagrechter Tangente
Um diese zu finden werden die Nullstellen der ersten Ableitung gesucht.

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 & \\ \iff\quad & 3x^2-3 = 0 & \mid +3 \\ \iff\quad & 3x^2 = 3 & \mid :3 \\ \iff\quad & x^2 = 1 & \mid\sqrt{\ } \\ \iff\quad & x_{4;5} = \pm 1 & \end{aligned}$$

Außerdem werden die Funktionswerte an diesen Stellen bestimmt:

$$f(-1) = \frac{0{,}5\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+0{,}5}{(-1)^2+1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad f(1) = \frac{0{,}5\cdot 1^2-3\cdot 1+0{,}5}{1^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Art und Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente
Für die weitere Betrachtung wird eine Monotonietabelle erstellt:

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x$	Skizzen
$3x^2-3$	+	0	–	0	+	
$(x^2+1)^2$	+	+	+	+	+	
$f'(x)$	+	0	–	0	+	
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	

Somit gibt es einen lokalen Hochpunkt $\underline{\underline{HOP(-1\mid 2)}}$ und einen lokalen Tiefpunkt $\underline{\underline{TIP(1\mid -1)}}$.

1.4 Die Zeichnung soll folgende Elemente enthalten:

- Graph G_f mit $f(x) = \dfrac{0{,}5x^2-3x+0{,}5}{x^2+1}$
- Asymptote: $y = 0{,}5$

Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	–4	–2	–1	0	1	2	4	5,83	7
$f(x)$	1,21	1,7	2	0,5	–1	–0,7	–0,21	0	0,08

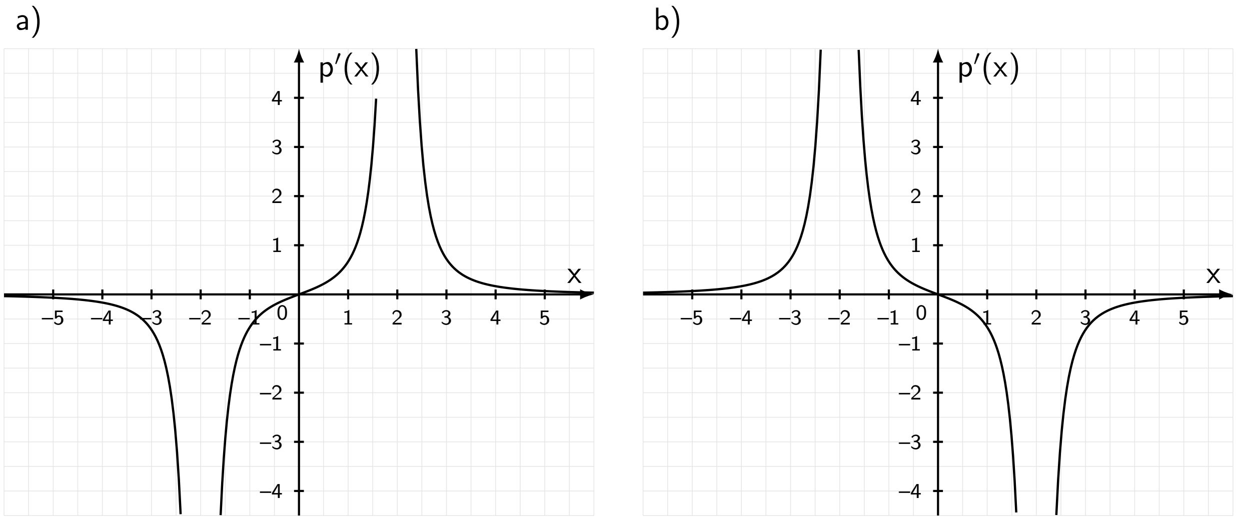
Abiturprüfung 2022
zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

1.0 Gegeben ist die Funktion p durch $p(x) = \frac{x^2-1}{4-x^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$. Der Graph der Funktion p wird mit G_p bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie, ob G_p eine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an. **2 BE**

1.2 Bestimmen Sie die Art der Definitionslücken von p sowie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_p mit den Koordinatenachsen. Geben Sie auch für jede Asymptote des Graphen G_p die Art und die Gleichung an. **7 BE**

1.3 Eine der folgenden zwei Abbildungen zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion p′ der Funktion p. Nennen Sie den Buchstaben des richtigen Graphen und begründen Sie Ihre Wahl durch ein Argument.



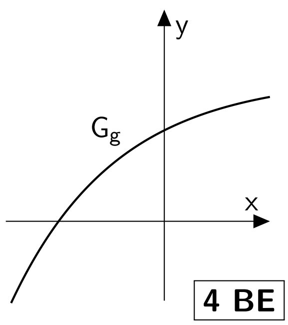
3 BE

2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \longmapsto 2x \cdot \ln(x+3)$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f =]-3; \infty[$.

2.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern der Definitionsmenge D_f. **3 BE**

2.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f. **3 BE**

3 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $g: x \longmapsto -e^{-0{,}5x} + e$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Die Funktion $G: x \longmapsto 2e^{-0{,}5x} + ex$ mit der Definitionsmenge $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit den Koordinatenachsen im zweiten Quadranten einschließt.



4 BE

1.0 Gegeben ist die Funktion p durch $p(x) = \frac{x^2-1}{4-x^2}$ mit $D_p = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$.

1.1 **Symmetrie**

Im Funktionsterm sind alle Exponenten der Variablen x gerade, was bedeutet, dass eine Achsensymmetrie zur y-Achse vorliegt.

Rechnerisch erfolgt der Nachweis, indem gezeigt wird, dass $p(-x) = p(x)$ gilt:

$$p(-x) = \frac{(-x)^2-1}{4-(-x)^2} = \frac{x^2-1}{4-x^2} = p(x)$$

Demnach ist G_p achsensymmetrisch zur y-Achse.

1.2 **Art der Definitionslücken**

Zunächst werden die Nullstellen des Zählerterms ermittelt:

$$\begin{aligned} & x^2-1=0 && |+1 \\ \iff \quad & x^2=1 && |\pm\sqrt{} \\ \iff \quad & x_1=-1 \quad \text{oder} \quad x_2=1 \end{aligned}$$

Die Definitionslücken $x=-2$ und $x=2$ sind einfache Nullstellen des Nennerterms und stimmen nicht mit den Nullstellen des Zählerterms überein. Demnach handelt es sich um Unendlichkeitsstellen (Polstellen) mit Vorzeichenwechsel.

Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Die Schnittpunkte mit der x-Achse entsprechen den Nullstellen der Funktion. Diese entsprechen den Nullstellen des Zählerterms und wurden bereits zu $x_1=-1$ und $x_2=1$ bestimmt, woraus sich zwei Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben zu $\underline{\underline{S_{x_1}(-1\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{S_{x_2}(1\,|\,0)}}$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $x=0$, den zugehörigen Funktionswert erhält man durch Einsetzen:

$$p(0) = \frac{0^2-1}{4-0^2} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $\underline{\underline{S_y\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{4}\right)}}$.

Gleichung und Art aller Asymptoten

Entsprechend der zwei Unendlichkeitsstellen ergeben sich zwei senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen $\underline{\underline{x=-2}}$ und $\underline{\underline{x=2}}$. Für waagrechte Asymptoten wird das Verhalten für $x\to\pm\infty$ untersucht. Aufgrund der Achsensymmetrie genügt die Betrachtung von $x\to\infty$:

$$x\to\infty: \quad p(x) = \frac{x^2-1}{4-x^2} = \frac{x^2-1}{-x^2+4} = \frac{\mathbf{1}x^2-1}{-\mathbf{1}x^2+4} \to \frac{1}{-1} = -1$$

Da Zähler- und Nennergrad gleich sind (Grad 2), geben die Leitkoeffizienten beider Terme den Grenzwert vor. Daraus ergibt sich die Gleichung einer waagrechten Asymptote mit $\underline{\underline{y=-1}}$.

1.3 **Auswahl des korrekten Graphen**

Eine Möglichkeit zur Auswahl des Graphen ist es, die erste Ableitung zu ermitteln und dann einen Wert von dieser zu berechnen. Im Vergleich mit der Abbildung kann dann entschieden werden, welcher Graph der richtige ist. Die erste Ableitung wird mithilfe der Quotientenregel ermittelt:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x^2-1}{4-x^2} \\ p'(x) &= \left[\frac{(x^2-1)'\cdot(4-x^2)-(x^2-1)\cdot(4-x^2)'}{(4-x^2)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{(2x)\cdot(4-x^2)-(x^2-1)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{8x-2x^3-(-2x^3+2x)}{(4-x^2)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{6x}{(4-x^2)^2} \end{aligned}$$

Es kann nun der Wert der ersten Ableitung bei z.B. $x = 1$ bestimmt werden:

$$p'(1) = \frac{6\cdot 1}{(4-1^2)^2} = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}$$

Vergleicht man nun mit den abgebildeten Graphen bei $x = 1$, so muss es sich bei Graph a) um den richtigen Graphen handeln.

2.0 Gegeben ist nun die Funktion f mit $f(x) = 2x \cdot \ln(x+3)$ mit $D_f =]-3; \infty[$.

2.1 **Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge**

$$x \to -3^+: \quad f(x) = \overbrace{2x}^{\to -6} \cdot \overbrace{\ln(\underbrace{x+3}_{\to 0^+})}^{\to -\infty} \to \infty$$

$$x \to \infty: \quad f(x) = \overbrace{2x}^{\to \infty} \cdot \overbrace{\ln(\underbrace{x+3}_{\to \infty})}^{\to \infty} \to \infty$$

2.2 **Nullstellen der Funktion**

Die Nullstellen ergeben sich aus dem Ansatz

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot \ln(x+3) = 0.$$

Gemäß dem Satz vom Nullprodukt ist die Gleichung erfüllt, wenn einer der beiden Faktoren gleich null ist.

$$\begin{aligned} & 2x \cdot \ln(x+3) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2x = 0 \quad \text{oder} \quad \ln(x+3) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x_1 = 0 \end{aligned}$$

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{-2x + 4}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei links- und rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke. Geben Sie die Art der Definitionslücke an. **5 BE**

1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Gleichung aller Asymptoten von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{4}{-2x + 4}$] **4 BE**

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 8x}{(-2x + 4)^2}$] **8 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten für $-6 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Geben Sie die Wertemenge der Funktion f an.

Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$ **6 BE**

1.5.0 Gegeben ist die Funktion $F\colon x \longmapsto -\dfrac{1}{4}x^2 + x - 2\ln(-2x + 4)$ mit der Definitionsmenge $D_F =]-\infty; 2[$.

1.5.1 Zeigen Sie, dass F in D_F eine Stammfunktion von f ist. **3 BE**

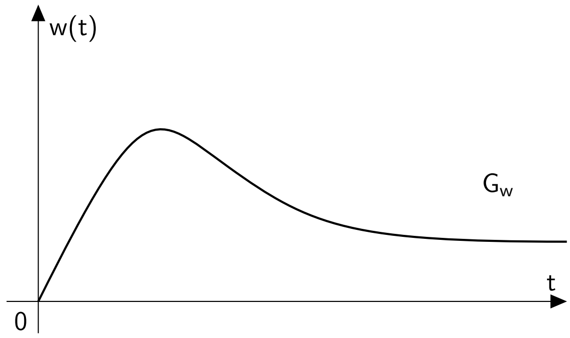
1.5.2 Der Graph G_f, die Gerade mit der Gleichung $x = -6$ und die beiden Koordinatenachsen schließen im zweiten Quadranten ein endliches Flächenstück ein.

Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet. **3 BE**

2.0 Nach Öffnung einer Schleuse gibt für $t \geq 0$ die Funktion w mit

$$w(t) = \frac{e^{2t} + 60e^t - 60}{e^{2t} + 10e^t + 25}$$

die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses in einem Kanal an einer Messstelle an. Der Wasserdurchfluss ist das Volumen des Wassers in m^3, das an dieser Stelle pro Sekunde vorbeifließt. Die Zeit t wird ab Öffnung der Schleuse zum Zeitpunkt $t = 0$ in Sekunden gemessen. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_w der Funktion w.
Bei allen Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



2.1 Geben Sie den Wasserdurchfluss eine Sekunde nach Öffnung der Schleuse und für $t \to \infty$ an. **2 BE**

2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserdurchfluss erstmals seit Beginn der Beobachtung den Wert von $1{,}0 \frac{m^3}{s}$ überschreitet. **4 BE**

2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion w auch durch die Gleichung $w(t) = \frac{e^{2t} + 60e^t - 60}{(e^t + 5)^2}$ dargestellt werden kann. **1 BE**

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von G_w und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. Hinweis: Der Nachweis, dass ein Hochpunkt vorliegt, muss nicht erbracht werden.
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{w}(t) = \frac{-50e^{2t} + 420e^t}{(e^t + 5)^3}$] **7 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{-2x + 4}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

1.1 **Nullstellen**

Die Nullstellen der Funktion würden den Nullstellen des Zählerterms entsprechen.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 4x + 8 = 0 \\ \Rightarrow \quad & D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0 \end{aligned}$$

Die Diskriminante ist negativ, entsprechend existiert keine Nullstelle des Zählerterms und damit keine Nullstelle der Funktion f.

Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücke

$$x \to 2^-: \quad f(x) = \frac{\overbrace{x^2 - 4x + 8}^{\to 4}}{\underbrace{-2x + 4}_{\to 0^+}} \to \infty$$

$$x \to 2^+: \quad f(x) = \frac{\overbrace{x^2 - 4x + 8}^{\to 4}}{\underbrace{-2x + 4}_{\to 0^-}} \to -\infty$$

Art der Definitionslücke

Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to 2$ ergibt sich, dass es sich dabei um eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) mit Vorzeichenwechsel handelt.

1.2 **Art und Gleichung aller Asymptoten**

Um die Gleichungen der Asymptoten zu bestimmen, wird zunächst eine Polynomdivision ausgeführt:

$$\begin{array}{rrrl} & (x^2 & -4x & +8) \;:\; (-2x+4) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{-2x+4} \\ - & (x^2 & -2x & \;\;) \\ \hline & & (-2x & +8) \\ & - & (-2x & +4) \\ \hline & & & \;\;4 \end{array}$$

Aus dem ganzrationalen Teil ergibt sich die Gleichung einer schiefen Asymptote mit $\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x + 1}}$.

Aus dem gebrochen-rationalen Anteil, bzw. aus der Art der Definitionslücke ergibt sich zudem die Gleichung einer senkrechten Asymptote bei $\underline{\underline{x = 2}}$.

1.3 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Quotientenregel wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

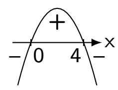
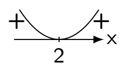
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - 4x + 8}{-2x + 4} \\
f'(x) &= \left[\frac{(x^2 - 4x + 8)' \cdot (-2x + 4) - (x^2 - 4x + 8) \cdot (-2x + 4)'}{(-2x + 4)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{(2x - 4) \cdot (-2x + 4) - (x^2 - 4x + 8) \cdot (-2)}{(-2x + 4)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{-4x^2 + 8x + 8x - 16 - (-2x^2 + 8x - 16)}{(-2x + 4)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{-2x^2 + 8x}{(-2x + 4)^2} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Maximale Monotonieintervalle und Art und Koordinaten der Extrempunkte

Es werden nun die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt, welche den Nullstellen des Zählerterms entsprechen:

$$\begin{aligned}
& & f'(x) &= 0 \\
&\Rightarrow & -2x^2 + 8x &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & x(-2x + 8) &= 0 \\
&\Rightarrow & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad -2x + 8 &= 0 && \mid -8 \\
&\Longleftrightarrow & -2x &= -8 && \mid : (-2) \\
&\Longleftrightarrow & x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Es wird nun eine Monotonietabelle erstellt:

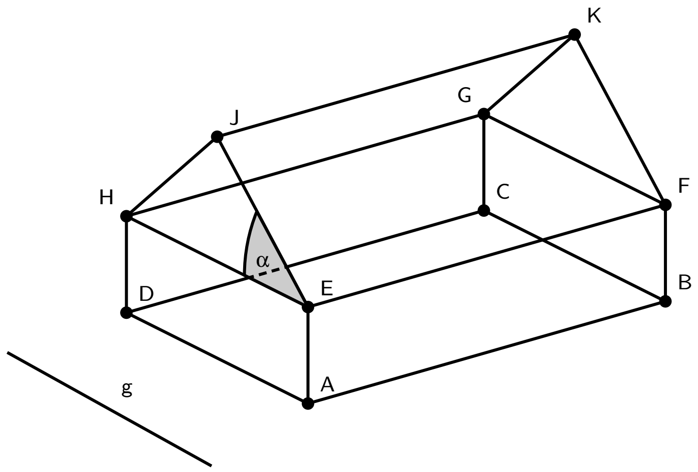
x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$	Skizzen
$f'(x)$-Zähler: $-2x^2 + 8x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$-Nenner: $(-2x + 4)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	n.def.	$+$	0	$-$	
G_f	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	n.def.	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	

Aus der Tabelle ergibt sich, dass der Graph G_f in den Intervallen $]-\infty; 0]$ und $[4; \infty[$ streng monoton fallend und in den Intervallen $[0; 2[$ und $]2; 4]$ streng monoton steigend ist. Zudem ergibt sich ein Tiefpunkt bei $x = 0$ und ein Hochpunkt bei $x = 4$. Es werden die Funktionswerte an diesen Stellen ermittelt:

$$f(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 8}{-2 \cdot 0 + 4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad f(4) = \frac{4^2 - 4 \cdot 4 + 8}{-2 \cdot 4 + 4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Die Koordinaten der Extrempunkte sind $\underline{\underline{\text{TIP}\,(0\,|\,2)}}$ und $\underline{\underline{\text{HOP}\,(4\,|-2)}}$.

2022



1.0 Eine Architektin plant den Bau eines einstöckigen Hauses. Dazu stellt sie das Haus modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ dar. Im Modell wird das Haus aus einem Quader und einem dreiseitigen, geraden Prisma zusammengesetzt. Gegeben sind die Punkte $A(2|2|0)$, $B(10|10|0)$, $C(4|16|0)$ und $J(-1|5|7)$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Die Deckenhöhe im Erdgeschoss beträgt 3 m. Bei den Rechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

1.1 Zeigen Sie, dass der Punkt D die Koordinaten $(-4|8|0)$ besitzt. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Grundfläche ABCD des geplanten Hauses im Punkt B rechtwinklig ist. **4 BE**

1.2 Eine Grundstücksgrenze des Baugrundstückes verläuft entlang der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Die Punkte A und D liegen auf der Geraden h. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. **3 BE**

1.3 Ermitteln Sie die Maßzahl des Gesamtvolumens des Hauses. **4 BE**

1.4 Für den Dachneigungswinkel α (siehe 1.0) gilt gemäß der örtlichen Bauvorschrift $30° \leq \alpha \leq 45°$. Zeigen Sie, dass der Dachneigungswinkel die Bauvorschrift erfüllt. **3 BE**

1.5 Im Dachgeschoss soll eine Zwischendecke eingezogen werden, die parallel zur Grundfläche und einen Meter tiefer als der First $\overline{JK}$ ist. Diese Zwischendecke liegt in der Ebene Z. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene Z mit der durch EFKJ gegebenen Ebene. **5 BE**

1.6 Zur Bewässerung der Gartens soll Regenwasser, das auf das Hausdach trifft, in einer Zisterne gesammelt werden. Gemäß statistischer Daten der letzten Jahrzehnte ist die durchschnittliche gesamte Niederschlagsmenge im sonnenreichen Juli $101\,\frac{\ell}{m^2}$. Zur Bewässerung des $113\,m^2$ großen Gartens sind zusätzlich täglich $2{,}5\,\frac{\ell}{m^2}$ notwendig.

Entscheiden Sie mithilfe einer Rechnung, ob die Bewässerung im Monat Juli gemäß der statistischen Daten durchgeführt werden kann. Vereinfachend wird von störenden Einflüssen wie etwa Wind abgesehen und angenommen, dass der Regen parallel zur x_3-Achse fällt. **4 BE**

1.1 Koordinaten des Punktes D

Da der untere Teil des Hauses ein Quader ist, ist die Grundfläche ein Rechteck, sodass die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleichlang sind. Daher ist auch $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, womit folgt:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4-10 \\ 16-10 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(\,-4\,|\,8\,|\,0)}}$$

Rechnerischer Nachweis der Rechtwinkligkeit

Um zu zeigen, dass die Grundfläche bei B rechtwinklig ist, muss gezeigt werden, dass $\overrightarrow{BA}$ senkrecht zu $\overrightarrow{BC}$ ist. Zwei Vektoren stehen senkrecht, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich null ist:

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-10 \\ 2-10 \\ 0-0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 \cdot (-6) + (-8 \cdot 6) + 0 = 0$$

Die Grundfläche ist demnach rechtwinklig im Punkt B.

1.2 Gegenseitige Lage der Geraden

Es ist zunächst hilfreich, eine Gleichung der Geraden h aufzustellen:

$$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4-2 \\ 8-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Im Vergleich der Geradengleichungen fällt auf, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, was rechnerisch gezeigt wird, indem

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den beiden Richtungsvektoren angesetzt wird. Zeilenweise ergeben sich drei Gleichungen, welche alle von $a = 6$ gelöst werden, sodass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Das bedeutet, dass die Geraden parallel zueinander verlaufen. Es bleibt zu prüfen ob sie identisch oder echt parallel sind, was mit einer Punktprobe überprüft wird. Es wird beispielsweise geprüft, ob der Punkt A auf der Gerade g liegt, indem die Gleichung der Gerade g mit dem Ortsvektor von A gleichgesetzt wird.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

M

N

P

S

T

W

Analytische Geometrie

A

B

E

F

G

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 13 Bayern 2023

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- An den LehrplanPLUS angepasste Original-Prüfungen
- Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Abiturprüfung
- Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- Inkl. Anpassungen und der Original-Prüfung 2022 mit Lösungen

Abi-Trainer für FOS · BOS 13 MNT 2023

DIGITALES COACHING

- Neue Lernplattform mit geschütztem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. : EAN 9783743000926

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0092-6

€ 13,90

9 783743 000926 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de