JETZT mit LERN-VIDEOS

12. Klasse

FOS·BOS 2023
Fachabitur Bayern

Mathematik Nichttechnik

Zusätzlich mit
- *Miniskript,*
- *Musterprüfungen und*
- *Übungaufgaben*

Inkl. 2022
Original-Prüfungen mit Lösungen

FOS·BOS 12

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Fachabiturprüfung

FOS | BOS Bayern 2023

Mathematik Nichttechnik

12. Klasse

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Beruflichen Oberschule
nichttechnischer Zweig
in Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Band **Abiturprüfung FOS/BOS Bayern 2023 Mathematik Nichttechnik 12. Klasse** sind die letzten zentral gestellten Original-Prüfungen inkl. der **Original-Prüfung 2022 mit Lösungen** enthalten. Weiterhin haben wir die Musterprüfung nach LehrplanPLUS zu Übungszwecken auch in dieser Auflage mit abgedruckt. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die **Abschlussprüfung 2023** findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **Montag, 22.05.2023** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2022)
Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Fachabitur 2023 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag. lern.de und cleverlag sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StR Verena Reffler (Memmingen),
Simon Rümmler (TU Dresden), Sascha Jankovic und das Team der
lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

8. ergänzte Auflage © 2022 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0091-9
Artikelnummer:
EAN 9783743000919

Aktuelles Rund um die Prüfung 2023 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über Polynomdivision oder Vierfeldertafel und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**" Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2022/2023 - ISBN: 978-3-7430-0091-9

- Prüfung 2018 (vor LehrplanPLUS gültig) herausgenommen.
- Verbesserungsvorschläge wie z. B. NEW-Regel eingebaut.
- Gemeldete und selbst entdeckte Schreibfehler in Angaben beseitigt.
- **Original-Prüfung 2022 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2023**.

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis

MINISKRIPT - Stochastik

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
begründen Sie rechnerisch	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Rechnung Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2023

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2023 an der FOSBOS:
Kürzungen aus dem Vorjahr bleiben bestehen - Nicht prüfungsrelevant (Stand: 27.06.2022):

- Aus LB 3: Kurvendiskussion von Funktion der Form $x \mapsto f(x) \cdot e^{g(x)} + y_0$
- Aus LB 4: Stammfunktionen für Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot e^{c \cdot (x-d)} + y_0$

Bitte fragen Sie bzgl. aktuellen Änderungen immer auch noch einmal bei Ihrer Lehrkraft nach!

MINISKRIPT

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**“ zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

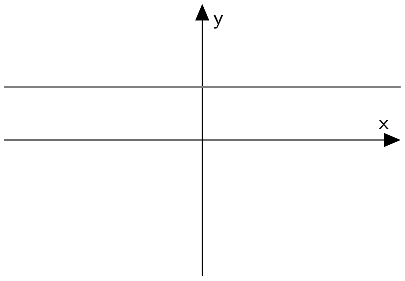
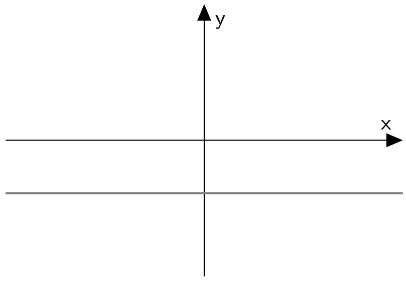
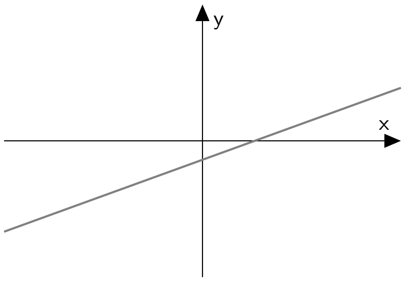
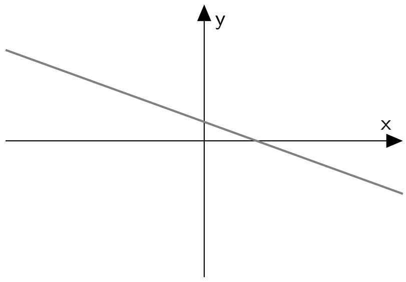
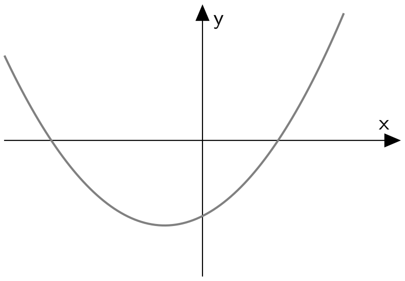
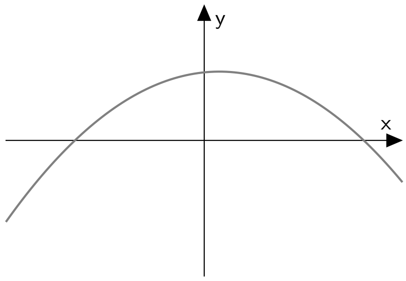
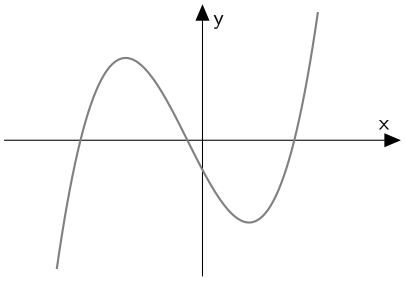
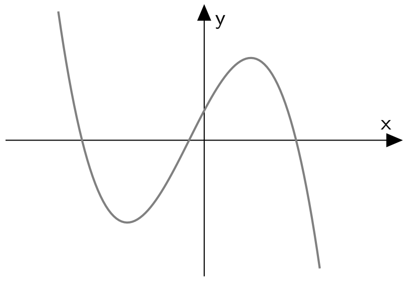
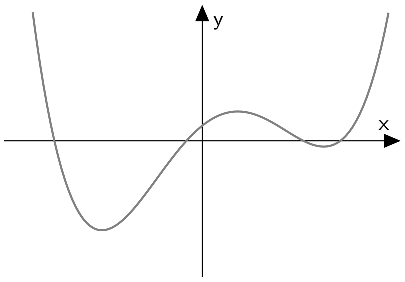
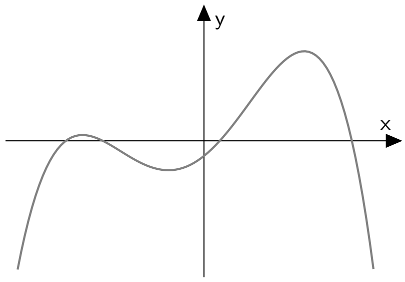
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan“ zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**“ der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
    - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte“, „Steigungswerte“ und „Krümmungswerte“ definiert bzw. berechnet.
    - Funktionen kann man ableiten.
    - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**“.
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, ...)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient“ a niemals null sein darf. Dies ist „logisch“, da ja der „namensgebende“ Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**“, die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich“ sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
    - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über“– bzw. „unterhalb der x-Achse“.
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**“.

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**“!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)

mögliche Graphentypen für a $>$ 0	**mögliche** Graphentypen für a $<$ 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug“ alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug“ wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen“ zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug“ einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge“ kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge“ zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten“ werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Lösungen - Polynome

1 Vollständige Lösung:

Werkzeug	Gleichungstyp	Beispiel
Äquivalenzumformung	lineare Gleichung	$x + 1 = 0$
Ausklammern	quadratische Gleichung ($c = 0$) kubische Gleichung ($d = 0$) Gleichung 4. Grades ($e = 0$)	$4x^2 - 2x = 0$ $3x^3 - 2x^2 + x = 0$ $x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
Mitternachtsformel	quadratische Gleichung (vollständige Gleichung)	$3x^2 - 4x + 1 = 0$
Radizieren	quadratische Gleichung ($b = 0$)	$4x^2 - 16 = 0$
Polynomdivision	kubische Gleichung (zum Vereinfachen) Gleichung 4. Grades (zum Vereinfachen)	$3x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$ $4x^4 - 3x^2 + 2x^2 + x - 1 = 0$
Substitution	Gleichung 4. Grades ($b = 0 \wedge d = 0$)	$4x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

2 Für jede Teilaufgabe wird die Lösung einer Gleichung ausführlich angegeben und für die restlichen Gleichungen jeweils eine Kurzlösung.

a) Gleichung I): $2x - 4 = 0$; Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 2x - 4 = 0 && \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x = 4 && \mid :2 \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{2}{7}}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 3}}$

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{5}}}$

b) Gleichung I): $x^2 - 4 = 0$; Radizieren:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4 = 0 && \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 = 4 && \mid \pm\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = -2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} \vee \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}}$

Gleichung III): keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\sqrt{3}}} \vee \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3}}}$

NEW-Regel

Die NEW-Regel

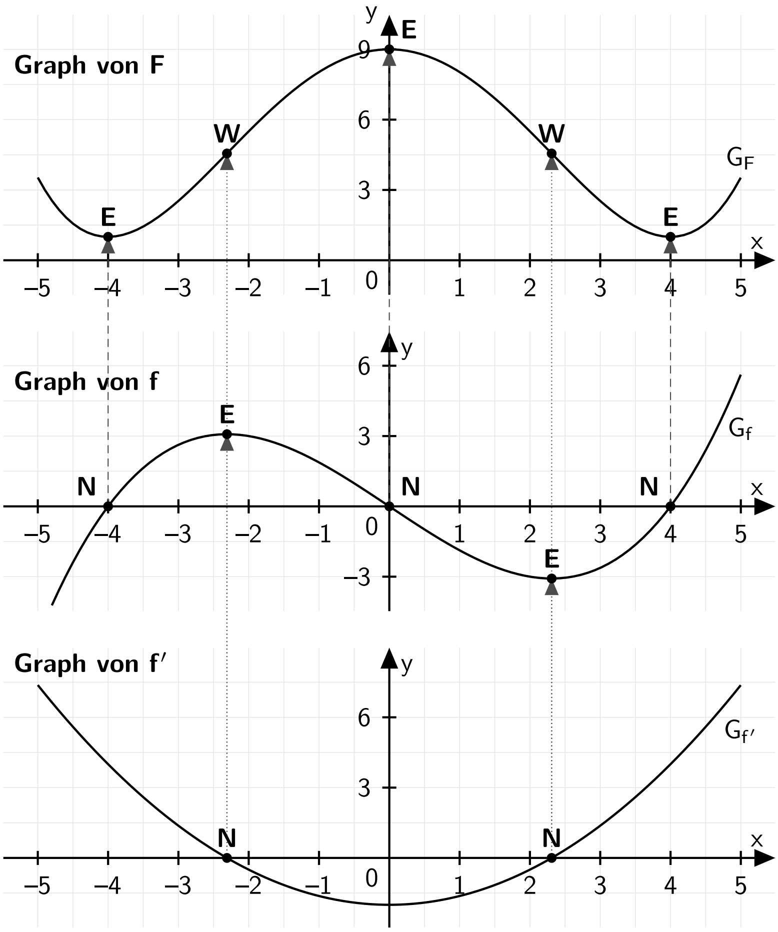
Die NEW-Regel stellt einen Zusammenhang zwischen den **N**ullstellen, **E**xtremstellen und **W**endestellen einer Funktion, einer zugehörigen Stammfunktion oder den Ableitungsfunktionen dar und kann für rechnerisches oder grafisches Bestimmen der Extrem- und Wendestellen verwendet werden.

$F(x)$	N	E	W			
$f(x)$		N	E	W		
$f'(x)$			N	E	W	
$f''(x)$				N	E	W

Beispiel

Gegeben ist die Funktion F durch $F(x) = \frac{1}{32}(x^4 - 32x^2 + 288) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 9$ mit $D_F = \mathbb{R}$. Sie ist Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Gesucht sind die Extrem- und Wendestellen des Funktionsgraphen von F.

Nachfolgend wird auf der linken Seite die grafische Lösung anhand der Funktionsgraphen von $F(x)$, $F'(x) = f(x)$ und $F''(x) = f'(x)$ gezeigt. Auf der rechten Seite ist eine Zusammenfassung der rechnerischen Bestimmung gegeben.



Bestimmung der Extrema von G_F

- Bestimmen der 1. Ableitung:

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x$$

- Nullstellen der 1. Ableitung:

$$x_1 = -4; x_2 = 0; x_3 = 4$$

- Nachweis Extremstellen: Vorzeichentabelle/2. Ableitung/VFH der NST

Bestimmung der Wendest. von G_F

- Bestimmen der 2. Ableitung:

$$F''(x) = f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$$

- Nullstellen der 2. Ableitung:

$$x_4 = -\sqrt{\frac{16}{3}} \approx -2{,}31; x_5 = +\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}31$$

- Nachweis Wendestellen: Vorzeichentabelle/3. Ableitung/VFH der NST

Integrale

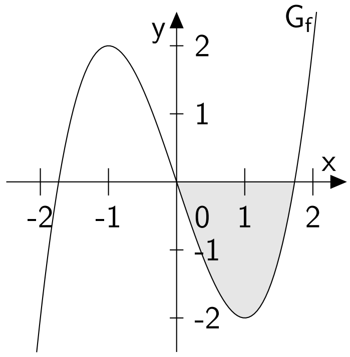
Integrale

Der **Flächeninhalt** A unter einem Graphen der Funktion f(x) wird durch das Integral bestimmt. Hierzu benötigt man eine Stammfunktion F(x), für sie gilt $F'(x) = f(x)$. Befindet sich das Flächenstück im Intervall $[a, b]$, dann gilt

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Der Flächeninhalt ist **positiv**. Befindet sich die Fläche unterhalb der x-Achse, setzt man die Flächenberechnung oder das Endergebnis in Betragsstriche.

Beispiel:
Gesucht ist die endliche Fläche, die die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ mit der x-Achse im IV. Quadranten einschließt. Die Fläche wird in der Grafik grau markiert.



1. Schritt: Bestimmen der Integrationsgrenzen a, b

- linke Grenze: Koordinatenursprung $\Rightarrow a = 0$
- rechte Grenze: Nullstellen berechnen: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \sqrt{3}$; laut Angabe ist $b > 0$, also ist $b = \sqrt{3}$

2. Schritt: Bestimmen der Stammfunktion
Es wird eine Stammfunktion F(x) ermittelt, so dass $F'(x) = f(x)$ erfüllt ist.

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\mathbf{4}}x^{\mathbf{4}} - 3\frac{1}{\mathbf{2}}x^{\mathbf{2}} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$$

3. Schritt: Berechnen der Fläche mit Hilfe des Integrals
Die Fläche liegt unter der x-Achse, sodass Betragsstriche nötig sind:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(\sqrt{3})^2 \right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{3}{2}(0)^2 \right) \right| = \left| \frac{1}{4}9 - \frac{3}{2}3 \right| = \left| -\frac{9}{4} \right[\text{FE}] \end{aligned}$$

Somit ist der Flächeninhalt des beschriebenen Flächenstücks 2,25 Flächeneinheiten groß.

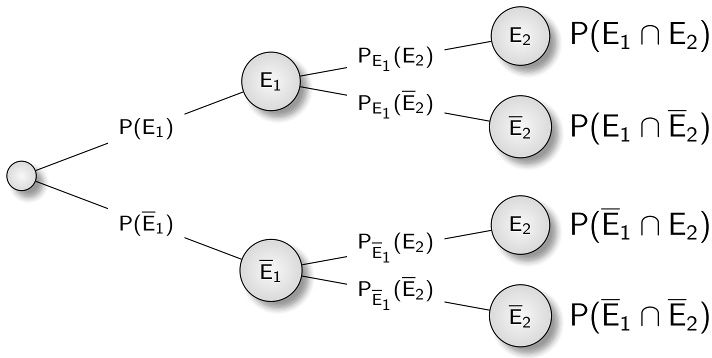
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Gibt es bei einem Zufallsexperiment zwei mögliche Ereignisse E_1 und E_2, so gibt der Term $P_{E_1}(E_2)$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von E_2 unter der Bedingung E_1 an. Dies beschreibt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_2, wenn bekannt ist, dass E_1 bereits eingetreten ist. Es gilt:

$$P_{E_1}(E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten finden sich im zweistufigen Baumdiagramm wie in nebenstehender Abbildung zu sehen als Wahrscheinlichkeiten an den Ästen von erster zu zweiter Stufe, da hier bereits bekannt ist, welches Resultat in der ersten Stufe eingetreten ist.



Hinweis:
In zugehörigen Aufgaben sind immer einige (bedingte) Wahrscheinlichkeitswerte vorgegeben und andere gesucht. Zur Ermittlung der gesuchten Wahrscheinlichkeit wird ein Baumdiagramm bzw. eine Vierfeldertafel verwendet und dann ggf. in die obige Formel eingesetzt.

Beispiel:
In einer Einkaufspassage wird das Einkaufsverhalten von 1000 zufällig ausgewählten Kunden hinsichtlich des Besuchs von Geschäft A und B beobachtet. 700 Kunden besuchen Geschäft A. Die Hälfte der 1000 Kunden besucht Geschäft B. 450 Kunden besuchen Geschäft A und B. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der Geschäft A sicher nicht besucht, das Geschäft B besucht?
Aus den Angaben ergeben sich drei Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{700}{1000} = 0{,}7 \qquad P(B) = \frac{500}{1000} = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = \frac{450}{1000} = 0{,}45$$

Mit diesen Angaben kann eine Vierfeldertafel angelegt und vollständig ausgefüllt werden.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,45	0,05	0,5
$\overline{B}$	0,25	0,25	0,5
$\sum$	0,7	0,3	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die von B, unter der Voraussetzung dass A nicht eingetreten ist. Mit den Werten der Vierfeldertafel und obiger Formel gilt:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}05}{0{,}3} = \frac{1}{6}$$

Kombinatorik

k-Tupel

> Ein *k-Tupel* $(a_1; a_2; \ldots; a_k)$ ist eine Aufzählung von k nicht notwendigerweise verschiedenen Elementen unter Beachtung der Reihenfolge.

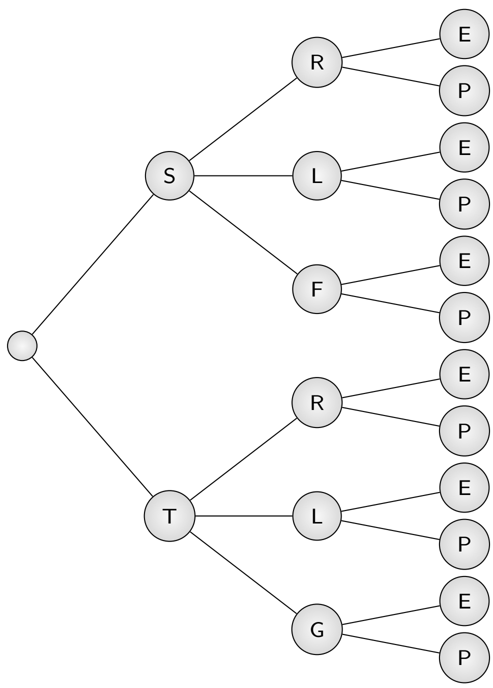
Beispiel:
Aus einem Kartenstapel mit Buben (B), Damen (D) und Königen (K) werden drei beliebige Karten gezogen.

Mögliche 3-Tupeln sind: (B; K; D), (D; D; B), (K; D; B), (B; K; B), usw. Von Interesse ist die Anzahl verschiedener Anordnungen in einem k-Tupel, ob Wiederholungen möglich sind und ob dabei die Reihenfolge berücksichtigt wird oder nicht.

Allgemeines Zählprinzip - Produktregel

> Die Anzahl der möglichen Ergebnisse eines k-stufigen Zufallsexperiments erhält man, indem man die Anzahl der Ergebnisse auf den einzelnen Stufen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ miteinander multipliziert:
>
> $$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \quad \text{mit } k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

Beispiel wie oben:
Wieviele Möglichkeiten es gibt, das Menü zusammenzustellen?



1. Abzählen der Elementarereignisse im Baumdiagramm.

2. Allgemeine Zählprinzip:
   Mögliche Ergebnisse in
   Stufe 1 (Vorspeise): 2
   Stufe 2 (Hauptspeise): 3
   Stufe 3 (Nachspeise): 2

   Somit gilt für die Anzahl der Möglichkeiten:

   $$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
Musterprüfung	oHm AI	$f: x \longmapsto \frac{3}{4}(x+2)(x-2)(x-\frac{1}{2})$	**83**	NST; waagrechte Tangente
		$h(x) = x \cdot e^x$	**83**	Integral
	oHm AII	$f(x) = 3 - e^x$	**87**	Grenzwert
		$g(x) = (x-2) \cdot e^x$	**87**	NST; Grenzwert; Wertemenge; Integral
	mHm AI	$f(x) = \frac{1}{4}(3x^3 - 9x + 6)$	**97**	Fkt. aufstellen; Integral
		$g: x \longmapsto (2x^2 - 8x + 8) \cdot e^{\frac{x}{2}}$	**97**	NST; Grenzwert; Extrema
	mHm AII	$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 2x^2 + x)$	**104**	NST; Extrema; Integral
		$b(x) = (5 + 3x) \cdot e^{-0{,}25x^2}$	**104**	NST; Maxima
2019	oHm A	$g: x \longmapsto e^{0{,}25x} - e^{-0{,}25x}$	**121**	Symmetrie; Integral; Tangente
	mHm AI	$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$	**129**	Wertemenge; Extrema; Wendepunkt; NST; Fläche
		$N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0{,}5t}$	**130**	Extrema; Grenzwert
	mHm AII	$w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$	**139**	Fkt. aufstellen; Extrema; Wendepunkt; Integral
		$f: x \longmapsto x^2 \cdot e^{-x}$	**139**	NST; Grenzwert; Monotonie; Extrema
		$k: t \longmapsto 50t \cdot e^{-at}$	**140**	Fkt. aufstellen
2020	oHm A	$h'(x) = x^2 + 1$	**159**	NST; Fkt. aufstellen
	mHm AI	$f: x \longmapsto (2x^2 - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - 1}$	**166**	Symmetrie; Grenzwert; Extrema; Wertemenge; NST; Fläche
		$g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$	**167**	Fkt. aufstellen; Extrema
		$p_a(x) = -ax^2 + 5x + 0{,}75$	**167**	Fkt. aufstellen
	mHm AII	$f: x \longmapsto 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$	**175**	Monotonie; Extrema
		$g: x \longmapsto 2 - 5e^{-0{,}1x^2}$	**176**	Symmetrie; Grenzwert; Asymptoten; NST; Extrema; Wertemenge; Tangente
2021	oHm A	$f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$	**193**	NST; Fkt. aufstellen; Fläche
	mHm AI	$f(x) = -1{,}5x^3 + 2x + 1$	**200**	Fkt. aufstellen; Extrema; NST; Tangente; Fläche
		$T(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 22$	**200**	Fkt. aufstellen
		$V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$	**201**	Fkt. aufstellen; Extrema
	mHm AII	$f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64)$	**208**	Symmetrie; NST; Extrema; Wertemenge; Fläche
		$V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$	**208**	Fkt. aufstellen; Extrema
		$M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$	**209**	Fkt. aufstellen

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2022	oHm A	$g(x) = 3x - 1$	**229**	NST; Integral
		$f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$	**230**	Wertemenge
	mHm AI	$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$	**238**	Monotonie; Extrema; Wendestellen; Tangente
		$N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$	**238**	Fkt. aufstellen
	mHm AII	$f(x) = -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$	**246**	NST; Extrema; Fläche
		$E(t) = 56{,}3 \cdot e^{c \cdot t} + a$	**247**	Fkt. aufstellen; Grenzwert
Lösungen:		StR Verena Reffler (Berufliche Oberschule Memmingen), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

Musterprüfung nach LehrplanPLUS

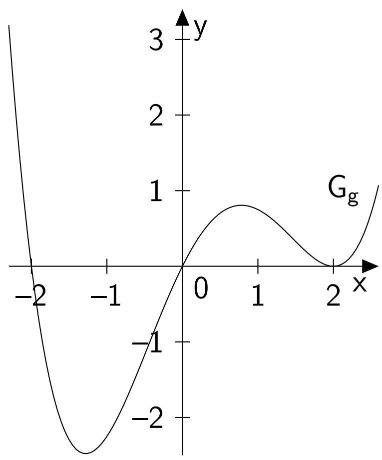
1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \frac{3}{4}(x+2)(x-2)(x-\frac{1}{2})$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f sowie ohne weitere Rechnung die Wertemenge der Funktion f an. **2 BE**

1.2 Zeigen Sie, das die Funktion f(x) in der Form $f(x) = \frac{3}{8}(2x^3 - x^2 - 8x + 4)$ dargestellt werden kann. **3 BE**

1.3 Bestimmen Sie Art und Abszisse der Punkte mit waagrechter Tangente. **6 BE**

2 Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades g, der in nebenstehender Zeichnung dargestellt ist. Entscheiden Sie, welche der Aussagen über den Graphen G_g falsch sind. Begründen Sie dies.



a) Es liegen vier einfache Nullstellen vor.

b) Es gilt $x \to \pm\infty\colon g(x) \to +\infty$

c) Es liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

d) Es liegen drei Wendepunkte vor.

e) Das Vorzeichen des Integralwertes $\int\limits_{-2}^{2} g(x)dx$ ist negativ.

5 BE

3 Gegeben ist die Funktion $h(x) = x \cdot e^x$. Zeigen Sie, dass $H(x) = (x-1)\cdot e^x$ eine Stammfunktion von h(x) ist und geben sie dann den exakten Wert des Integrals $\int\limits_{-1}^{1} h(x)dx$ an. **4 BE**

Muster

1.0 Untersucht wird die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}(x+2)(x-2)(x-\frac{1}{2})$ mit $D_f = \mathbb{R}$

1.1 **Nullstellen**

Die ganze Funktion wird null, wenn einer der Faktoren null wird. Demzufolge gilt:

$$x_1 = -2 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2 \quad \text{oder} \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

Die Nullstellen der Funktion sind $\underline{\underline{x_1 = -2}}$, $\underline{\underline{x_2 = 2}}$ und $\underline{\underline{x_3 = \frac{1}{2}}}$.

Wertemenge

Es liegt eine Funktion dritten Grades vor. Da außerdem $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist der Wertebereich für eine Funktion dritten Grades stets $\underline{\underline{W_f = \mathbb{R}}}$.

1.2 Die Funktionsgleichung wird ausmultipliziert:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{4}(x+2)(x-2)(x-\frac{1}{2}) && \text{[erste beide Klammern ausmultiplizieren]}\\
&= \frac{3}{4}(x^2+2x-2x-4)(x-\frac{1}{2})\\
&= \frac{3}{4}(x^2-4)(x-\frac{1}{2}) && \text{[zweite Klammer ausmultiplizieren]}\\
&= \frac{3}{4}(x^3-4x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot 4)\\
&= \frac{3}{4}(x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2)\\
&= \frac{3}{4}(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{=1}x^3-\frac{1}{2}x^2-\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{=1}\cdot 4x+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{=1}\cdot 2) && [\,\frac{1}{2}\text{ ausklammern}]\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}(2x^3-x^2-8x+4)\\
&= \frac{3}{8}(2x^3-x^2-8x+4) && \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}$$

1.3 Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt. Dafür wird die ausmulitplizierte Form aus Aufgabe 1.2 verwendet:

Ermitteln der ersten Ableitung

$$f(x) = \frac{3}{8}(2x^3-x^2-8x+4)$$
$$f'(x) = \frac{3}{8}(3\cdot 2x^2-2\cdot x-8) = \frac{3}{8}(6x^2-2x-8)$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen nun den Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f'(x) = 0$$

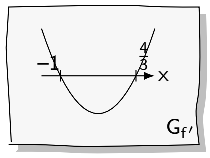
$$
\begin{aligned}
&& 0 &= \frac{3}{8}(6x^2 - 2x - 8) \\
\Longleftrightarrow && 6x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
\Longleftrightarrow && x_{1;2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-8)}}{2 \cdot 6} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{12} = \frac{2 \pm 14}{12} \\
\Longleftrightarrow && x_1 &= -1 \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Art der Punkte mit waagrechter Tangente

Um die Art der Punkte zu bestimmen wird eine Monotonietabelle erstellt. Dabei wird erwähnt, dass es sich bei der ersten Ableitung um eine nach oben geöffnete Parabel handelt:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{4}{3}$	$x = \frac{4}{3}$	$x < \frac{4}{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

Skizze



Demnach liegt bei $x_1 = -1$ ein Hochpunkt und bei $x_2 = \frac{4}{3}$ ein Tiefpunkt vor.

2 Die Antworten können jeweils mithilfe der gegebenen Zeichnung gefunden werden:

a) Die Aussage ist falsch. Der Abbildung kann entnommen werden, dass bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle vorliegt.

b) Die Aussage ist korrekt.

c) Die Aussage ist falsch. Der Verlauf auf beiden Seiten der y-Achse weicht deutlich von der jeweils anderen ab. (Weitere Begründung, nicht gefordert: Ein konkretes Beispiel zum Widerlegen der Aussage ist die doppelte Nullstelle bei $x = 2$. Für Achsensymmetrie zur y-Achse müsste also auch bei $x = -2$ eine doppelte Nullstelle liegen, was jedoch nicht der Fall ist.)

d) Die Aussage ist falsch. Eine mögliche Argumentation ist direkt anhand der Abbildung möglich. Ausgehend von links ist der Graph zunächst linksgekrümmt, wechselt dann zu Rechtskrümmung und ist dann wieder linksgekrümmt. Ein weiterer Krümmungswechsel liegt nicht vor, es gibt als zwei und nicht drei Wendepunkte.
Alternativ kann argumentiert werden, dass die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades nur noch höchstens zweiten Grades ist und somit höchstens zwei Nullstellen hat. Demnach kann die Funktion vierten Grades maximal zwei Wendepunkte aufweisen.

e) Die Aussage ist korrekt. (Begründung, nicht gefordert: Der Integralwert entspricht der Summe der Flächenmaßzahl der beiden Flächen, die der Graph G_g zwischen -2 und 2 mit der x-Achse einschließt. Die Fläche zwischen -2 und 0 ist dabei deutlich größer. Da sie zudem unterhalb der x-Achse liegt, geht die Maßzahl mit negativem Vorzeichen ein, sodass der Integralwert negativ wird.)

3 **Nachweis der Stammfunktion**

Um zu zeigen, dass es sich bei $H(x)$ um eine Stammfunktion von $h(x)$ handelt, muss gezeigt werden, dass $H'(x) = h(x)$ gilt:

$$H(x) = (x - 1) \cdot e^x$$

Fachabiturprüfung 2019
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und
Berufsoberschulen
in Bayern

1.0 Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$.

1.1 Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ an. **3 BE**

1.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f', die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an. **4 BE**

2 Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$

b) $e^{x^2} = e^{2x-1}$

6 BE

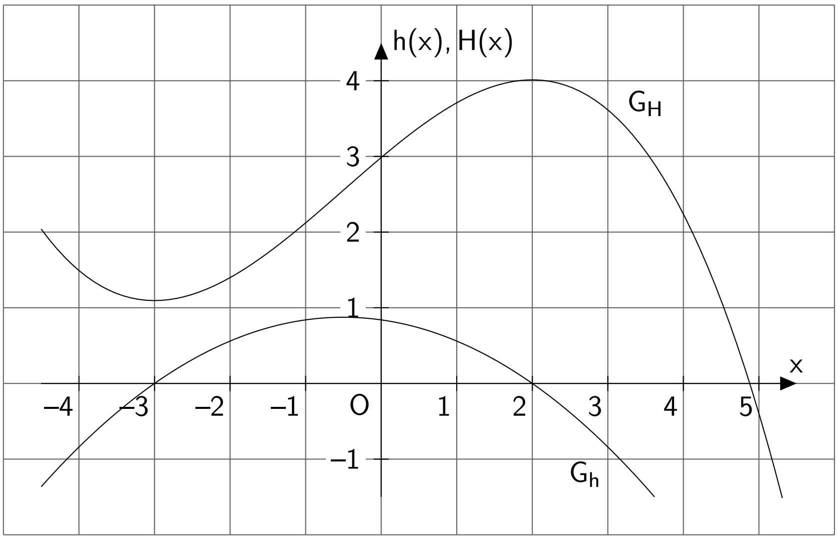
3.0 Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

3.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int_{-2}^{2} g(x)dx$ an. **3 BE**

3.2 Ermitteln Sie die Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$. **3 BE**

4 In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt.

Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch.



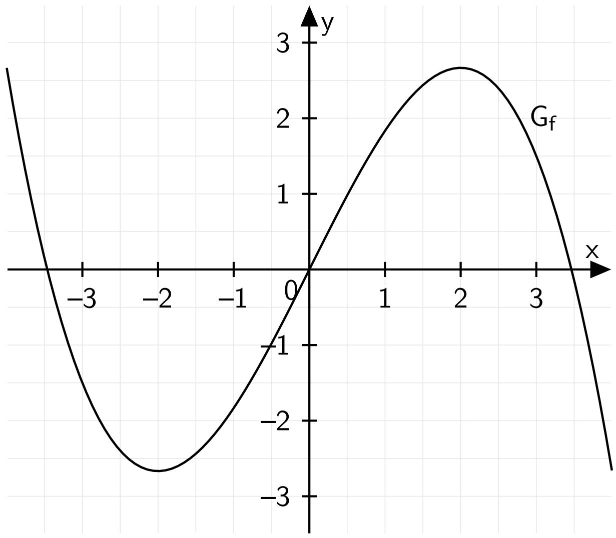
3 BE

1.1 **Graphische Darstellung**

Aus den Angaben ergeben sich folgende Kriterien, die bei der Darstellung des Funktionsgraphen beachtet werden müssen:

- ganzrationale Funktion dritten Grades
- punktsymmetrisch zum Ursprung (Graph verläuft demnach durch den Ursprung)
- lokaler Tiefpunkt bei $x = -2$

Aus der Punktsymmetrie zum Ursprung und dem lokalen Tiefpunkt bei $x = -2$ ergibt sich zudem ein lokaler Hochpunkt bei $x = 2$. Genaue Funktionswerte sind jedoch nicht gegeben, sodass nur die genannten Kriterien bei der Darstellung berücksichtigt werden müssen.



Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \pm\infty$

Da es sich um eine Funktion dritten Grades handelt, liegen neben den beiden bekannten Extrempunkten keine weiteren Punkte vor, in denen sich das Vorzeichen der Steigung ändert. Demnach gilt, wie auch aus dem Verlauf des Graphen abgelesen werden kann:

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$$
$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$$

1.2 Die Ableitung eines Polynoms ist wieder ein Polynom, dessen Grad sich um eins verringert hat. $\Rightarrow$ Beim Graphen $G_{f'}$ handelt es sich um eine Parabel (Polynom zweiten Grades).

$\Rightarrow$ Die Funktion $f'(x)$ hat für $x < -2$ und $x > 2$ negative und für $-2 < x < 2$ positive Funktionswerte. Bei $x = -2$ und $x = 2$ liegt jeweils eine einfache Nullstelle von f'. Es handelt sich demnach um eine nach unten geöffnete Parabel.

$\Rightarrow$ Aus den Nullstellen von f', oder der Punktsymmetrie von G_f zum Ursprung folgt, dass $G_{f'}$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

$\Rightarrow$ Aus der Symmetrie und der Tatsache, dass $f'(x)$ für $-2 < x < 2$ positive Funktionswerte annimmt folgt zudem, dass der Scheitelpunkt (Hochpunkt) von $G_{f'}$ bei $x = 0$ (auf der y-Achse) liegt und eine positive y-Koordinate hat.

2 **Lösung der Gleichungen**

a) Zunächst kann ausgeklammert werden:

$$\begin{aligned} 3x^4 - 12x^2 &= 0 \\ \iff \quad x^2(3x^2 - 12) &= 0 \end{aligned}$$

Gemäß dem Satz vom Nullprodukt ist die Gleichung erfüllt, wenn einer der Faktoren null wird. Aus $x^2 = 0$ ergibt sich eine doppelte Lösung zu $\underline{\underline{x_{1;2} = 0}}$. Der zweite Faktor wird separat untersucht:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 && \mid +12 \\ \iff \quad 3x^2 &= 12 && \mid :3 \\ \iff \quad x^2 &= 4 && \mid \sqrt{\ } \\ \iff \quad \underline{\underline{x_{3;4}}} &\underline{\underline{= \pm 2}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e^{2x-1} && \mid \ln(\ ) \\ \iff \quad x^2 &= 2x - 1 && \mid -(2x-1) \\ \iff \quad x^2 - 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Für die Lösung der quadratischen Gleichung bieten sich zwei verschiedene Methoden an.
Alternative 1: Quadratische Lösungsformel

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ \iff \quad x_{1;2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ \iff \quad x_{1;2} &= \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \\ \iff \quad \underline{\underline{x_{1;2}}} &\underline{\underline{= 1}} \end{aligned}$$

Alternative 2: 2. Binomische Formel

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ \iff \quad (x-1)^2 &= 0 \\ \iff \quad \underline{\underline{x_{1;2}}} &\underline{\underline{= 1}} \end{aligned}$$

3.1 **Symmetrieverhalten**

Um das Symmetrieverhalten zu untersuchen wird $g(-x)$ untersucht:

$$g(-x) = e^{0,25\cdot(-x)} - e^{-0,25\cdot(-x)} = e^{-0,25x} - e^{0,25x} = -e^{0,25x} + e^{-0,25x} = -(e^{0,25x} - e^{-0,25x}) = -g(x)$$

Da $g(-x) = -g(x)$ gilt, ist der Graph der Funktion g punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

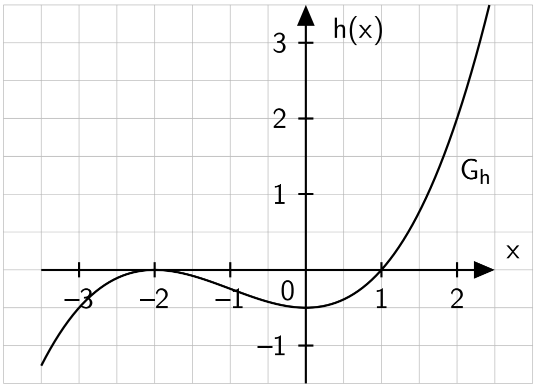
Fachabiturprüfung 2022
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und
Berufsoberschulen
in Bayern

1.0 Gegeben ist die lineare Funktion $g\colon x \longmapsto 3x-1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem. **2 BE**

1.2 Berechnen Sie $\int_0^2 g(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich G_g. **3 BE**

2 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2; 1[$

b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.

c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

3 BE

3 Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S\,(2\,|\,2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k\colon x \longmapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Bestimmen Sie alle Werte für k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet. **2 BE**

4 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$.

Bestimmen Sie die Wertemenge von f. **4 BE**

5 Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

b) $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$

6 BE

6 Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B\colon t \longmapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und B(t) für die Bakterienanzahl in einer Petrischale.

Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0{,}4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf. **2 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an. **9 BE**

1.2 Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht. **6 BE**

1.3 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \longmapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist. **2 BE**

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm **4 BE**

2.0 Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u. a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$ mit $t, N_0, c \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $N_0 > 0$, $c > 0$ darstellen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die seit Ende des Jahres 2008 ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60.

2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter N_0 und c der Funktion N. Runden Sie N_0 ganzzahlig und c auf drei Nachkommastellen. **4 BE**

2.2.0 Im Folgenden gilt $N(t) = 4 \cdot e^{0{,}301 \cdot t}$.

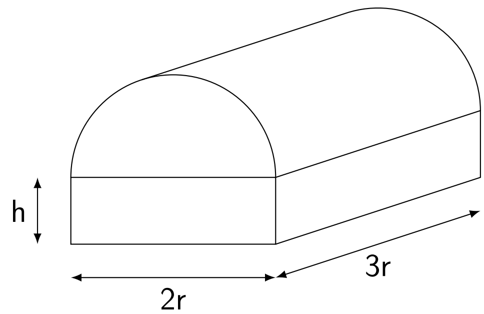
2.2.1 Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 2.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht. **3 BE**

2.2.2 Geben Sie Funktionsgleichung der Funktion N in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t (b > 0)$ an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie b auf drei Nachkommastellen. **2 BE**

3.0 Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eins Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet. Der Quader hat die Breite 2r, die Länge 3r und die Höhe h (siehe Skizze).

Um möglichst ideale klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind 1000m^2 Glas vorgesehen. Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit vom Radius r des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion $V\colon r \longmapsto V(r)$ beschreiben. Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius r des Halbzylinders maximal 8,5 m betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens 4 m.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Stellen Sie eine Gleichung der in 3.0 eingeführten Funktion V auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl A des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders.

[Mögliche Ergebnisse: $A(r,h) = 10rh + 4\pi r^2$ und $V(r) = 600r - 0{,}9\pi r^3$] **6 BE**

3.2 Um den Pflanzen und Tieren möglichst viel Lebensraum zur Verfügung zu stellen, soll das Tropenhaus maximalen Rauminhalt besitzen.

Bestimmen Sie den Radius r so, dass die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses den absolut größten Wert annimmt und geben Sie diesen maximalen Wert an. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **7 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Maximale Monotonieintervalle**

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion ermittelt:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$$
$$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot 4x^3 + 2 \cdot 2x = -\frac{1}{2}x^3 + 4x$$

Es werden nun die Nullstellen der ersten Ableitung ermittelt:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff \quad & -\frac{1}{2}x^3 + 4x = 0 \\ \iff \quad & -\frac{1}{2}x(x^2 - 8) = 0 \end{aligned}$$

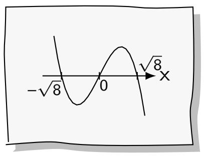
Gemäß des Satzes vom Nullprodukt ist die Gleichung erfüllt, wenn einer der beiden Faktoren gleich null ist:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}x = 0 & \\ \Rightarrow \quad & x_1 = 0 & \\ \text{oder} \quad & x^2 - 8 = 0 & \quad |+8 \\ \iff \quad & x^2 = 8 & \quad |\sqrt{} \\ \iff \quad & x_{2;3} = \pm\sqrt{8} & \end{aligned}$$

Mithilfe einer Skizze der ersten Ableitung kann nun eine Monotonietabelle erstellt werden:

x	$x < -\sqrt{8}$	$x = -\sqrt{8}$	$-\sqrt{8} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{8}$	$x = \sqrt{8}$	$\sqrt{8} < x$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

Skizze $G_{f'}$



Aus der Tabelle können die maximalen Monotonieintervalle abgelesen werden. Die Funktion f ist streng monoton zunehmend in den Intervallen $\left]-\infty; -\sqrt{8}\right]$ und $\left[0; \sqrt{8}\right]$ und streng monoton abnehmend in den Intervallen $\left[-\sqrt{8}; 0\right]$ und $\left[\sqrt{8}; \infty\right[$.

Koordinaten der relativen Extrempunkte

Aus der Monotonietabelle kann entnommen werden, dass bei $x = -\sqrt{8}$ und $x = \sqrt{8}$ ein Hochpunkt und bei $x = 0$ ein Tiefpunkt vorliegt. Durch Einsetzen werden die Funktionswerte bestimmt:

$$f(-\sqrt{8}) = -\frac{1}{8} \cdot (-\sqrt{8})^4 + 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = -\frac{1}{8} \cdot 64 + 2 \cdot 8 = 8$$
$$f(0) = -\frac{1}{8} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 = 0 + 0 = 0$$
$$f(\sqrt{8}) = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{8})^4 + 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = -\frac{1}{8} \cdot 64 + 2 \cdot 8 = 8$$

Die Koordinaten der relativen Extrempunkte lauten also $\underline{\underline{HOP_1\left(-\sqrt{8}\,\middle|\,8\right)}}$, $\underline{\underline{TIP\,(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{HOP_2\left(\sqrt{8}\,\middle|\,8\right)}}$.

Wertemenge

Aus dem Monotonieverhalten ergibt sich, dass die Funktion nach unten unbeschränkt ist und dass die beiden Hochpunkte, welche den selben Funktionswert besitzen das obere Limit der Wertemenge bilden. Daher gilt $\underline{\underline{W_f =]-\infty; 8]}}$.

1.2 **Wendestellen**

Zunächst wird die zweite Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{8}\cdot 4x^3 + 2\cdot 2x = -\frac{1}{2}x^3 + 4x \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot 3x^2 + 4 = -\frac{3}{2}x^2 + 4 \end{aligned}$$

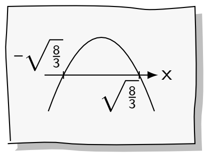
Weiterhin werden die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} && f''(x) &= 0 & \\ \iff && -\frac{3}{2}x^2 + 4 &= 0 & &|-4 \\ \iff && -\frac{3}{2}x^2 &= -4 & &|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\ \iff && x^2 &= \frac{8}{3} & &|\sqrt{} \\ \iff && x_{1;2} &= \pm\sqrt{\frac{8}{3}} & \end{aligned}$$

Wieder wird mithilfe einer Skizze des Graphen der zweiten Ableitung eine Vorzeichentabelle erstellt:

x	$x<-\sqrt{\frac{8}{3}}$	$x=-\sqrt{\frac{8}{3}}$	$-\sqrt{\frac{8}{3}}<x<\sqrt{\frac{8}{3}}$	$x=\sqrt{\frac{8}{3}}$	$\sqrt{\frac{8}{3}}<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_f	$\curvearrowright$	WEP	$\circlearrowleft$	WEP	$\curvearrowright$

Skizze $G_{f''}$



Die Wendestellen des Graphen von f liegen bei $\underline{\underline{x = -\sqrt{\frac{8}{3}}}}$ und $\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{8}{3}}}}$.

Beurteilung der maximalen positiven oder negativen Steigung

Maximale positive oder negative Steigung des Funktionsgraphen liegt vor, wenn die erste Ableitung maximale oder minimale Funktionswerte annimmt. Bei den ermittelten Stellen liegt zwar ein relativer Extrempunkt der ersten Ableitung, aber kein absoluter, da die erste Ableitung einer Funktion 3. Grades entspricht, deren Wertemenge $]-\infty; \infty[$ ist. Demnach liegt an den Wendestellen keine Stelle mit maximaler positiver oder negativer Steigung von G_f vor.

Aufgaben Index

Analysis

A

E

F

G

I

M

N

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 12 Bayern 2023

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- Original-Prüfungen mit Lösungen **2019 - 2022**
- Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- Inkl. Anpassungen und der Original-Prüfung 2022 mit Lösungen

Abi-Trainer für FOS · BOS 12 MNT 2023

DIGITALES COACHING

- Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. : EAN 9783743000919

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0091-9
€ 13,90
9 783743 000919 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de