JETZT mit LERN-VIDEOS

10. Klasse

Realschule 2023
MSA Bayern

Mathematik II/III

Zusätzlich mit
- Musterprüfungen im Stil der neuen Abschlussprüfung mit Lösungen

Inkl. 2022
Original-Prüfungen mit Lösungen

RS 10

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern   LehrplanPLUS

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Original-Prüfungen
Realschule Bayern 2023
Mathematik WPFG II

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Realschule Bayern
mit der Wahlpflichtfächergruppe I

INKL.
Original-Prüfungen
2022
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem speziellen Prüfungsvorbereitungsbuch **Original-Prüfungen Realschule Bayern 2023 Mathematik II** nach dem neuen LehrplanPLUS, sind die Original-Prüfungen der letzten Jahre nach Lernbereich sortiert und zusätzlich **mehrere Original-Musterprüfungen** eingefügt. Zu den ausgewählten Prüfungsaufgaben gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2023 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am Montag **26.06.2023** statt und dauert **150 Minuten**.
(Stand 01.09.2022 - Angaben ohne Gewähr)
Als **Hilfsmittel** ist ein elektronischer Taschenrechner und eine Formelsammlung zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet, die wir die nächsten Wochen vervollständigen. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Mathe-Themen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen. Jetzt bei **https://lern.de** einen Platz sichern. **Zeit- und ortsunabhängig** online für einzelne Arbeiten in der Schule oder den Mittleren Schulabschluss (MSA)/Mittlere Reife 2023 lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig an sich auf die Abschlussprüfung vorzubereiten und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernzielkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie die Punktevergabe des neuen Prüfungsformates.

Jahrgang 2022/2023
oHm=ohne Hilfsmittel
mHm=mit Hilfsmitteln

Teil A oHm	11,5 Pkt.
Teil B1 mHm	4,5 Pkt.
Teil B2 mHm	5 Pkt.
Teil B3 mHm	16 Pkt.
Teil B4 mHm	17 Pkt.
Gesamt	54 Pkt.

Ein entsprechender Notenschlüssel war zum Buchdruck am 01.09.2022 noch nicht bekannt.

Impressum
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, lern.de und cleverlag sind eingetragene Marken von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.

Druck: Deutschland
Lösungen:
Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team aus Pädagogen und Naturwissenschaftlern der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

8. ergänzte Auflage ©2022 1. Druck
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0098-8
Artikelnummer:
EAN 9783743000988

Aktuelles Rund um die Prüfung 2023 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über quadratische Funktionen oder die Berechnung von Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos angezeigt mit unterschiedlichen Erklärungen? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „ON-TOP" Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen in dieser Neuauflage 2022/2023 - ISBN: 978-3-7430-0098-8

- Prüfungstrainer nach Lernbereichen aufgeteilt.
- Musterprüfungen 2022 mit ausführlichen Lösungen eingebaut.
- **Original-Prüfung 2022 inkl. ausführlichen Lösungen auf unterschiedliche Lernbereiche aufgeteilt.**

Inhaltsverzeichnis

Stoffübersicht der Abschlussprüfungen

Realschule Bayern Mathematik II/III

1 Funktionen

Allgemeine Lösungsansätze:

Nullstellen berechnen: Funktionsterm gleich Null setzen und Gleichung nach x umformen, z. B.
$2x + 1 = 0 \iff x = -0{,}5 \implies$ Nst. $N(-0{,}5\,|\,0)$

Schnittpunkte berechnen: Gleichsetzen der beiden Funktionsterme und lösen der Gleichung nach x. Anschließend den berechneten x-Wert in einen der beiden Funktionsterme einsetzen: z. B.
$2x + 1 = 0{,}5x - 2 \iff x = -2 \implies y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$
$\implies$ Schnittpunkt $SP(-2\,|\,-3)$

1.1 Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Zu jedem x-Wert existiert genau ein einziger y-Wert und umgekehrt.
In der folgenden Übersicht werden alle notwendigen Formeln dargestellt.

Die allgemeine Form: $ax + by = c$ $\quad a, c \in \mathbb{R}; \quad b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Die Normalform: $y = mx + t$
$m, t \in \mathbb{R}$

Der **y-Achsenabschnitt t** ist der Schnittpunkt mit der y-Achse; $x = 0$.

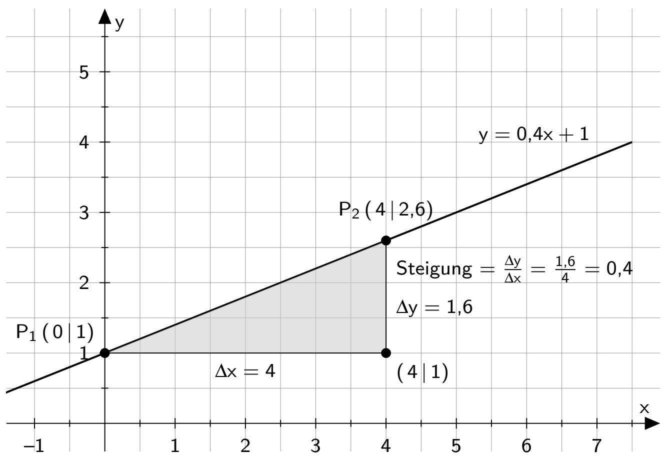
Parallele Geraden
$g_1 \parallel g_2 \iff m_1 = m_2$

Der **Steigungsfaktor m**
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha$
wobei $P_1(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2)$ zwei beliebige (aber verschiedene) Punkte auf der Geraden sind.

Senkrechte (orthogonale) Geraden
$g_1 \perp g_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$
Die Geraden g_1 und g_2 stehen im rechten Winkel zueinander.

Abszisse:
Die x-Koordinate eines Punktes;
Auch: x-Achse

Ordinate:
Die y-Koordinate eines Punktes;
Auch: y-Achse



1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Dabei existiert eine Symmetrieachse, die durch den Scheitelpunkt der Parabel geht.

Die allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c \qquad b, c \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

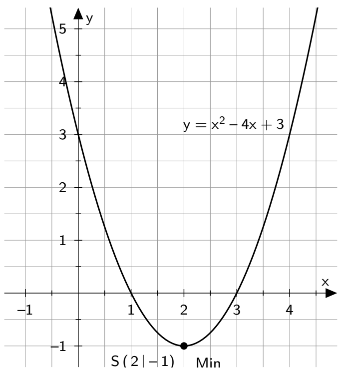
Die Normalparabel (a = 1): $y = x^2 + bx + c$ bzw. $y = x^2 + px + q$.

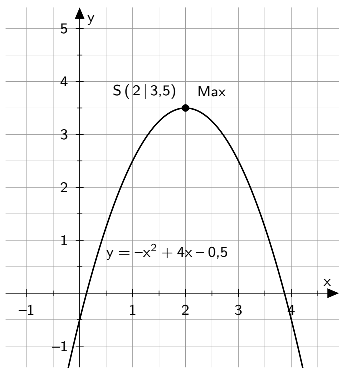
Scheitelpunkt: $S\left(x_S \,|\, y_S\right)$ $\qquad S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ bzw. $S\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, q - \frac{p^2}{4}\right)$

Scheitelpunktform: $y = a(x - x_S)^2 + y_S \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Die Parameter a, b und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
a	$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	Falls $a > 0$: nach oben geöffnete Parabel, mit Minimum Falls $a < 0$: nach unten geöffnete Parabel, mit Maximum Falls $\lvert a\rvert > 1$: gestreckte Parabel (schmaler als Normalparabel) Falls $\lvert a\rvert < 1$: gestauchte Parabel (breiter als Normalparabel)
b	$b \in \mathbb{R}$	Steigung, mit der die Parabel die y-Achse schneidet
c	$c \in \mathbb{R}$	Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse „y-Achsenabschnitt“





Lösen von quadratischen Gleichungen - Nullstellen berechnen

Lösungsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ bzw. $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante D: $D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Es gilt:
$D > 0$: Zwei Lösungen
$D = 0$: Eine Lösung
$D < 0$: Keine Lösung

Beim Lösen einer quadratischen Gleichung haben sich folgende Schritte bewährt:

1. **Schritt:** a, b und c neben der gegeben Funktion untereinander schreiben.
2. **Schritt:** Berechnen der Diskriminante.
3. **Schritt:** Einfügen aller Zahlen in die Lösungsformel.

4 Daten und Zufall

Grundgesamtheit n

Anzahl n aller erfassten Daten

Absolute Häufigkeit H

Anzahl H der Merkmalsträger aus der Grundgesamtheit

Relative Häufigkeit h

$$\boxed{h = \frac{\text{Absolute Häufigkeit H}}{\text{Grundgesamtheit n}}}$$

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen das Ereignis E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}}$$

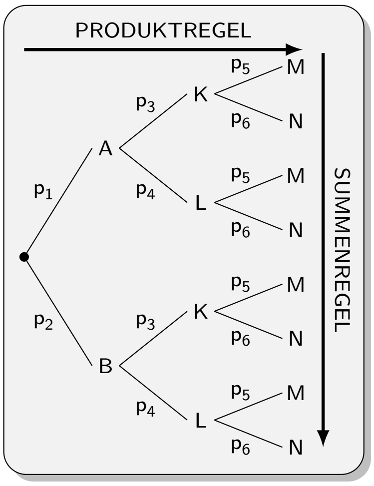
Pfadregeln (am Beispiel eines zweistufigen Zufallsexperiments):
Es gilt: $p_1 + p_2 = 1$; $p_3 + p_4 = 1$; $p_5 + p_6 = 1$

1.Pfadregel (Produktregel)
Beispiel:

$$\boxed{P(\{AKM\}) = p_1 \cdot p_3 \cdot p_5}$$

2.Pfadregel (Summenregel)
Beispiel:

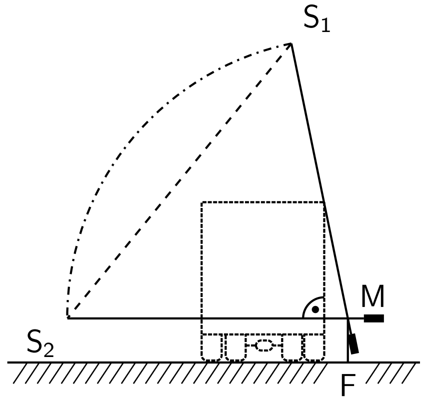
$$\boxed{P(\{ALM; BKN\}) = p_1 \cdot p_4 \cdot p_5 + p_2 \cdot p_3 \cdot p_6}$$



Übungsteil - Trigonometrie

A1 Original-Prüfung 2013 Aufgabe A3 (adaptiert)

A 1.0 Die nebenstehende Skizze verdeutlicht die Funktionsweise einer Bahnschranke. $[MS_1]$ stellt die Schranke in geöffnetem Zustand dar, $[MS_2]$ zeigt sie in geschlossenem Zustand. Der Bogen $\overset{\frown}{S_1S_2}$ beschreibt den Weg, den die Schrankenspitze beim Schließen und Öffnen zurücklegt. Der Punkt M ist der Drehpunkt der Schranke und bildet zusammen mit dem Punkt F die Strecke [MF] (Schrankenfuß).
Es gilt:
$\overline{MS_1} = \overline{MS_2} = 7{,}00\,\text{m}$; $\overline{S_1S_2} = 8{,}85\,\text{m}$; $\overline{MF} = 1{,}10\,\text{m}$.



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

A 1.1 Berechnen Sie das Maß α des Winkel S_1MS_2 und sodann die Länge b des Bogens $\overset{\frown}{S_1S_2}$. 3 P

[Teilergebnis: $\alpha = 78{,}42°$]

A 1.2 Herr Lute überquert mit einem 4,00 m hohen LKW den Bahnübergang. Er fährt einen halben Meter am Schrankenfuß [MF] der geöffneten Schranke vorbei. 2 P

Überprüfen Sie rechnerisch, ob dabei die Schranke beschädigt wird und begründen Sie Ihre Antwort.

A1 Lösung Original-Prüfung 2013 Aufgabe A3 (adaptiert)

A 1.1 Das Maß $\alpha \in]0°; 180°[$ des Winkels $\sphericalangle S_1MS_2$ wird mithilfe des Kosinussatzes berechnet:

$$\begin{aligned}
& \overline{S_1S_2}^2 = \overline{MS_1}^2 + \overline{MS_2}^2 - 2 \cdot \overline{MS_1} \cdot \overline{MS_2} \cdot \cos\alpha \\
\Longleftrightarrow\quad & 8{,}85^2 = 7{,}00^2 + 7{,}00^2 - 2 \cdot 7{,}00 \cdot 7{,}00 \cdot \cos\alpha \\
\Longleftrightarrow\quad & 8{,}85^2 = 98{,}00 - 98{,}00 \cdot \cos\alpha \qquad | + 98{,}00 \cdot \cos\alpha \ | - 8{,}85^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 98{,}00 \cdot \cos\alpha = 98{,}00 - 8{,}85^2 \qquad | : 98{,}00 \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos\alpha = 0{,}20 \qquad | \cos^{-1}(\,) \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\alpha = 78{,}42°}}
\end{aligned}$$

Für die Bogenlänge $b = \widehat{S_1S_2}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& b = \frac{\alpha}{180°} \cdot \overline{MS_1} \cdot \pi \\
\Longleftrightarrow\quad & b = \frac{78{,}42°}{180°} \cdot 7{,}00\,\text{m} \cdot \pi \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{b = 9{,}58\,\text{m}}}
\end{aligned}$$

A 1.2 Für den Mindestabstand d eines 4 m hohen LKW zum Fußpunkt F der Schranke gilt:

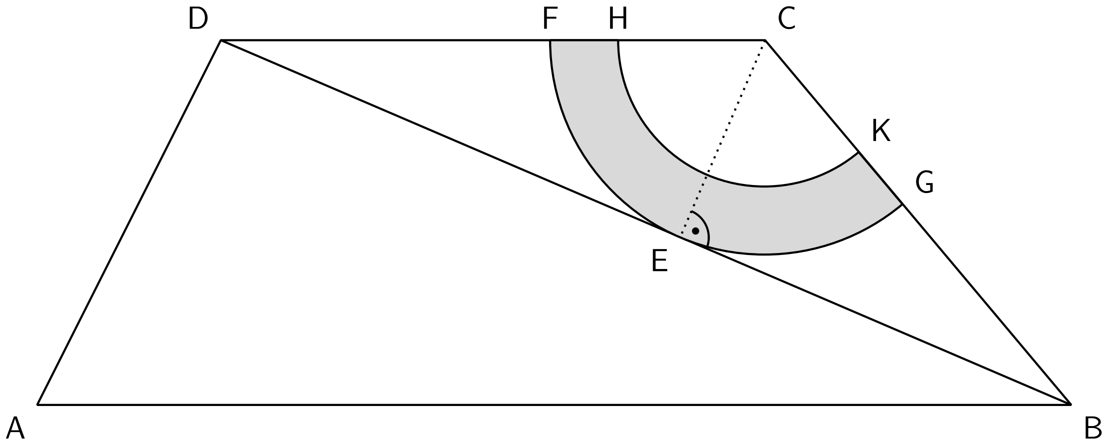
$$\begin{aligned}
& \tan 78{,}42° = \frac{(4 - 1{,}10)\ \text{m}}{d} \qquad | \cdot d \quad | : \tan 78{,}42° \\
\Longleftrightarrow\quad & d = \frac{2{,}90\,\text{m}}{\tan 78{,}42°} \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{d = 0{,}59\,\text{m}}}
\end{aligned}$$

Der LKW beschädigt also die Schranke, wenn er nur in einem Abstand von $\underline{\underline{0{,}5\,\text{m}}}$ am Schrankenfuß [MF] vorbeifährt, da der Mindestabstand 0,59 m beträgt.

A2 Original-Prüfung 2014 Aufgabe A2 (adaptiert)

A 1.0 Die Zeichnung zeigt das Trapez ABCD mit [AB] ∥ [CD].
Es gilt: $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$; $\overline{AD} = 6\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$; $\sphericalangle DCB = 130°$.

Runden Sie im Folgenden alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.1 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen [BD], das Maß ε des Winkels CBD und das Maß α des Winkels BAD. 5 P
[Ergebnisse: $\overline{BD} = 13{,}60\,\text{cm}$; $\varepsilon = 26{,}79°$; $\alpha = 63{,}29°$]

A 1.2 Die Diagonale [BD] berührt den Kreisbogen $\overset{\frown}{FG}$ im Punkt E. 1 P
Ermitteln Sie rechnerisch den Radius $\overline{CE}$ des Kreissektors CFG.
[Ergebnis: $\overline{CE} = 3{,}16\,\text{cm}$]

A 1.3 Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhaltes A der grauen Figur, die durch die Kreisbögen $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{HK}$ und die Strecken [FH] und [GK] begrenzt wird, am Flächeninhalt des Trapezes ABCD. Es gilt: $\overline{FH} = \overline{GK} = 1\,\text{cm}$. 3 P

A2 Lösung Original-Prüfung 2014 Aufgabe A2 (adaptiert)

A 1.1 Die Länge der Diagonalen [BD] berechnet sich im Dreieck BCD mithilfe des Kosinussatzes:

$$\begin{aligned} & \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\sphericalangle DCB && |\sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{BD} = \sqrt{8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 130^\circ}\,\text{cm} \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\overline{BD} = 13{,}60\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

Das Maß ε des Winkels CBD wird ebenfalls mit dem Kosinussatz im Dreieck BCD berechnet:

$$\begin{aligned} & \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \cos\varepsilon \\ \Longleftrightarrow\quad & 8^2 = 7^2 + 13{,}60^2 - 2 \cdot 7 \cdot 13{,}60 \cdot \cos\varepsilon \\ \Longleftrightarrow\quad & 64 = 233{,}96 - 190{,}40 \cdot \cos\varepsilon && |-233{,}96 \\ \Longleftrightarrow\quad & -169{,}96 = -190{,}40 \cdot \cos\varepsilon && |:(-190{,}40) \\ \Longleftrightarrow\quad & \cos\varepsilon = \frac{-169{,}96}{-190{,}40} && |\cos^{-1}(\ ) \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\varepsilon = 26{,}79^\circ}} \end{aligned}$$

Um das Maß α des Winkels BAD zu berechnen, überlegt man sich zunächst, dass aufgrund der Parallelität [CD] ∥ [AB] folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} & \sphericalangle DCB + \varepsilon + \sphericalangle DBA = 180^\circ \\ \Longleftrightarrow\quad & 130^\circ + 26{,}79^\circ + \sphericalangle DBA = 180^\circ \\ \Longleftrightarrow\quad & 156{,}79^\circ + \sphericalangle DBA = 180^\circ && |-156{,}79^\circ \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\sphericalangle DBA = 23{,}21^\circ} \end{aligned}$$

Nun kann man mithilfe des Sinussatzes α berechnen:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\alpha}{\overline{BD}} = \frac{\sin\sphericalangle DBA}{\overline{AD}} && |\cdot\overline{BD} \\ \Longleftrightarrow\quad & \sin\alpha = \frac{\overline{BD} \cdot \sin\sphericalangle DBA}{\overline{AD}} \\ \Longleftrightarrow\quad & \sin\alpha = \frac{13{,}60 \cdot \sin 23{,}21^\circ}{6} && |\sin^{-1}(\ ) \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\alpha = 63{,}29^\circ}} \end{aligned}$$

A 1.2 Der Radius des Kreissektors CFG ist gerade die Streckenlänge $\overline{CE}$. Diese kann im rechtwinkligen Dreieck BCE mit dem Sinus berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \sin\varepsilon = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} && |\cdot\overline{BC} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CE} = \overline{BC} \cdot \sin\varepsilon \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{CE} = 7\,\text{cm} \cdot \sin 26{,}79^\circ \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\overline{CE} = 3{,}16\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

A 1.3 Den Flächeninhalt des Trapezes ABCD kann man mithilfe der beiden Teildreiecke berechnen:

$$
\begin{aligned}
& A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle DCB + \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \sphericalangle ADB \\
\Longleftrightarrow \quad & A_{ABCD} = \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin 130^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13{,}60 \cdot \sin(180^\circ - (63{,}29^\circ + 23{,}21^\circ))\right] \text{cm}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{A_{ABCD} = 62{,}17\,\text{cm}^2}
\end{aligned}
$$

Die Fläche der grauen Figur wird mithilfe der zwei Kreissektoren CFG und CHK:

$$
\begin{aligned}
& A = \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot \overline{CE}^2 \cdot \pi - \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot (\overline{CE} - \overline{FH})^2 \cdot \pi \\
\Longleftrightarrow \quad & A = \left(\frac{13}{36} \cdot 3{,}16^2 \cdot \pi - \frac{13}{36} \cdot 2{,}16^2 \cdot \pi\right) \text{cm}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{A = 6{,}04\,\text{cm}^2}
\end{aligned}
$$

Der prozentuale Anteil der Fläche der grauen Figur zur Fläche des Trapezes ABCD ist dann:

$$
\frac{A}{A_{ABCD}} = \frac{6{,}04\,\text{cm}^2}{62{,}17\,\text{cm}^2} = \underline{\underline{0{,}0972}}
$$

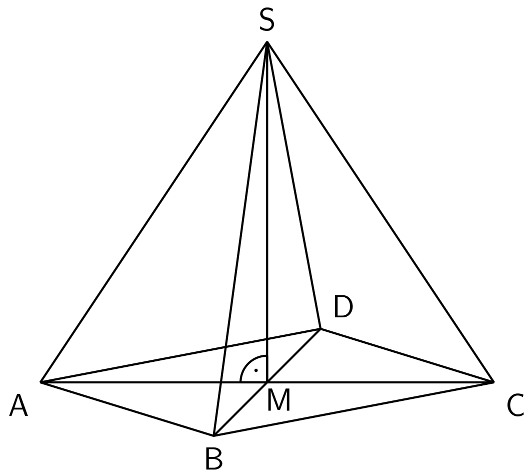
Somit beträgt der prozentuale Anteil $\underline{\underline{9{,}72\,\%}}$.

Übungsteil - Raumgeometrie

A1 Original-Prüfung 2014 Aufgabe B2 (adaptiert)

A 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche die Raute ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist.
Die Spitze S der Pyramide ABCDS liegt senkrecht über dem Punkt M.

Es gilt: $\overline{AC} = 12\,\text{cm}$; $\overline{BD} = 8\,\text{cm}$; $\overline{MS} = 9\,\text{cm}$.



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

A 1.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke [AC] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll. 4 P
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Bestimmen Sie sodann rechnerisch die Länge der Strecke [AS] und das Maß α des Winkels CAS.
[Ergebnis: $\alpha = 56{,}31°$]

A 1.2 Für Punkte P_n auf der Strecke [AS] gilt: $\overline{AP_n}(x) = x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $0 < x \leqq 10{,}82$. 4 P
Die Punkte P_n sind Spitzen von Pyramiden $ABDP_n$.
Zeichnen Sie die Pyramide $ABDP_1$ und die dazugehörige Höhe $[H_1P_1]$ mit dem Höhenfußpunkt $H_1 \in [AM]$ für $x = 5$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MP_1]$ und das Volumen der Pyramide $ABDP_1$.
[Teilergebnisse: $\overline{MP_1} = 5{,}26\,\text{cm}$; $\overline{H_1P_1} = 4{,}16\,\text{cm}$]

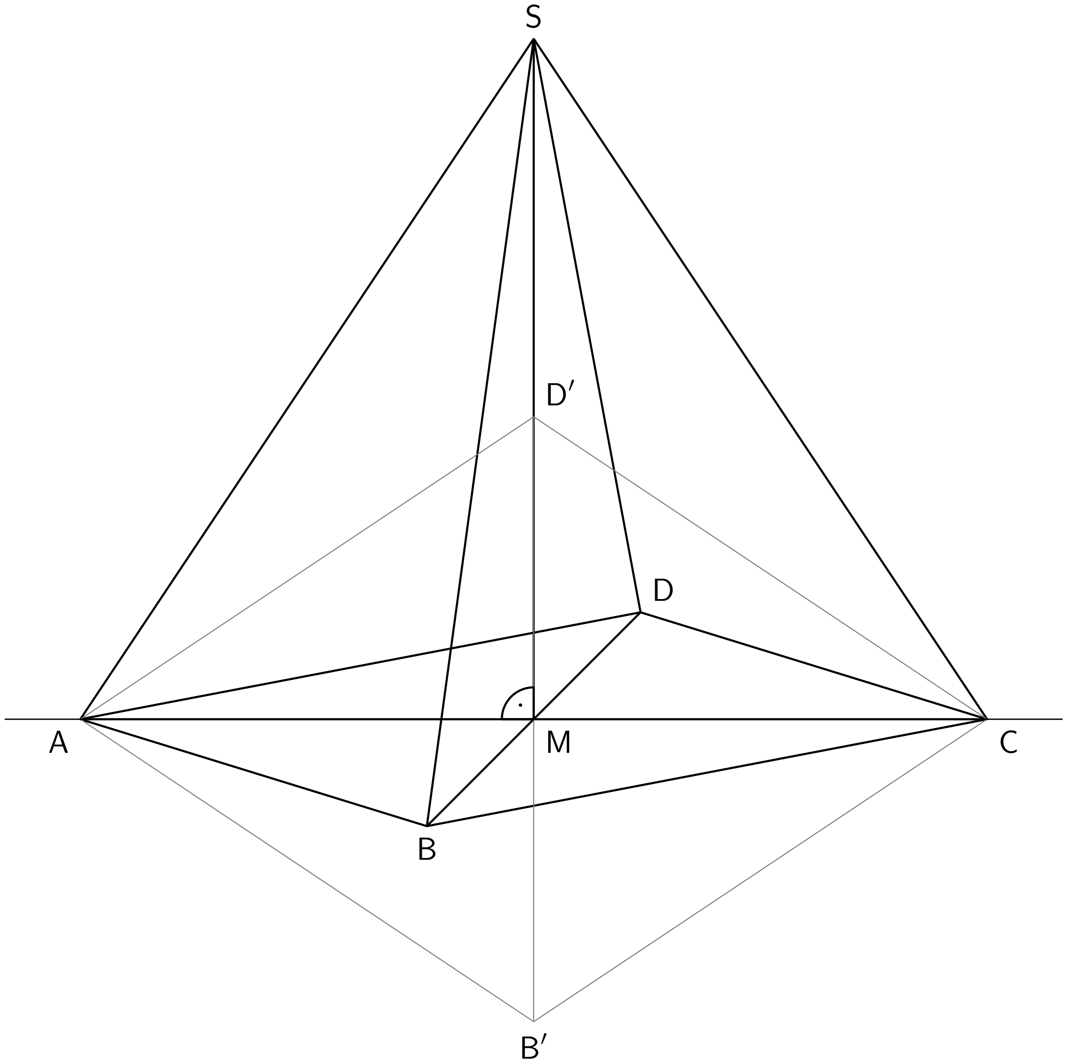
A 1.3 Bestimmen Sie durch Rechnung den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $ABDP_1$ am Volumen der Pyramide ABCDS. 2 P

A 1.4 Zeichnen Sie das Dreieck MCP_1 in das Schrägbild zu B 2.1 ein und berechnen Sie sodann dessen Flächeninhalt. 3 P

A 1.5 Die Strecke $[MP_0]$ besitzt unter den Strecken $[MP_n]$ die minimale Länge. 4 P
Zeichnen Sie diese Strecke in das Schrägbild zu B 2.1 ein und berechnen Sie deren Länge.
Begründen Sie sodann, dass es unter den Dreiecken BDP_n kein Dreieck mit einem Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$ gibt.

A1 Lösung Original-Prüfung 2014 Aufgabe B2 (adaptiert)

A 1.1 Zeichnen des Schrägbilds der Pyramide ABCDS:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



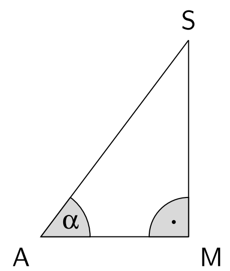
Die Länge $\overline{AS}$ wird im rechtwinkligen Dreieck AMS mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet:

$$\overline{AS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{AS} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{AS} = \sqrt{(0{,}5 \cdot 12)^2 + 9^2}\,\text{cm}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\overline{AS} = 10{,}82\,\text{cm}}}$$



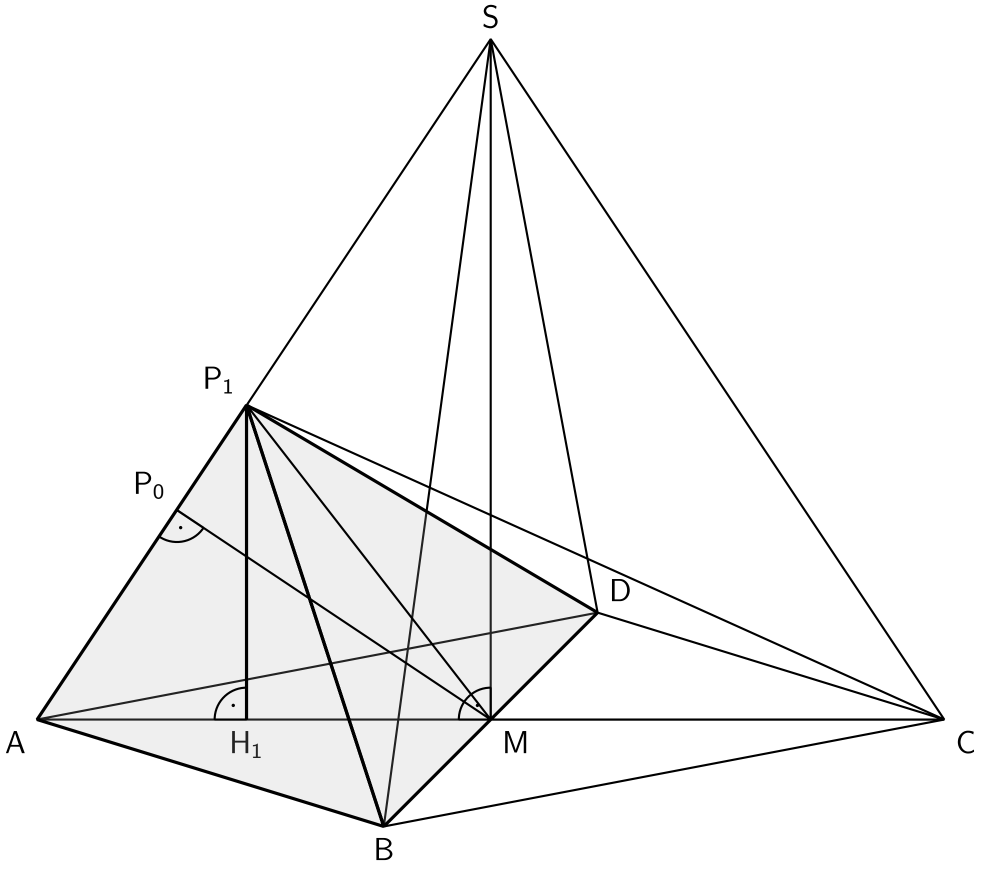
Das Maß α des Winkels CAS wird im selben Dreieck (AMS) mit dem Tangens berechnet:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tan\alpha = \frac{9}{0{,}5 \cdot 12} \qquad \tan^{-1}(\,)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 56{,}31^\circ}}$$

A 1.2 Einzeichnen der Pyramide $ABDP_1$ und der zugehörigen Höhe $[H_1P_1]$
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)

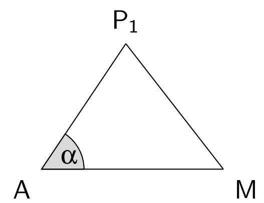


Die Länge $\overline{MP_1}$ wird im Dreieck AMP_1 mithilfe des Kosinussatzes berechnet:

$$\overline{MP_1}^2 = \overline{AP_1}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \cdot \overline{AP_1} \cdot \overline{AM} \cdot \cos\alpha \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{MP_1} = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 56{,}31^\circ}\ \text{cm}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\overline{MP_1} = 5{,}26\,\text{cm}}}$$



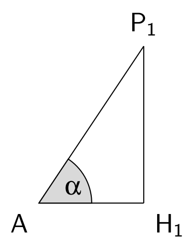
Um das Volumen V_{ABDP_1} zu berechnen, benötigt man die Höhe $\overline{H_1P_1}$. Diese berechnet man im rechtwinkligen Dreieck AH_1P_1 mit dem Sinus:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{AP_1}} \qquad | \cdot \overline{AP_1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{H_1P_1} = \overline{AP_1} \cdot \sin\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{H_1P_1} = 5\,\text{cm} \cdot \sin 56{,}31^\circ$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\overline{H_1P_1} = 4{,}16\,\text{cm}}$$



Für das Volumen V_{ABDP_1} gilt dann:

$$\begin{aligned} & V_{ABDP_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{H_1P_1} \\ \Longleftrightarrow \quad & V_{ABDP_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4{,}16\,\text{cm}^3 \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{V_{ABDP_1} = 33{,}28\,\text{cm}^3} \end{aligned}$$

A 1.3 Für das Volumen der großen Pyramide ABCDS gilt:

$$\begin{aligned} & V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MS} \\ \Longleftrightarrow \quad & V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 9\,\text{cm}^3 \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{V_{ABCDS} = 144\,\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Somit gilt für den prozentualen Anteil von V_{ABDP_1} an V_{ABCDS}:

$$\frac{V_{ABDP_1}}{V_{ABCDS}} = \frac{33{,}28\,\text{cm}^3}{144\,\text{cm}^3} = 0{,}2311$$

Der Anteil beträgt also $\underline{\underline{23{,}11\,\%}}$.

A 1.4 Einzeichnen des Dreiecks MCP_1: siehe Zeichnung zu B 2.2

Für den Flächeninhalt A_{MCP_1} gilt:

$$A_{MCP_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MP_1} \cdot \overline{MC} \cdot \sin \sphericalangle CMP_1$$

Der Winkel CMP_1 wird bestimmt, indem zunächst der Winkel P_1MH_1 im rechtwinkligen Dreieck MP_1H_1 berechnet wird:

$$\begin{aligned} & \sin \sphericalangle P_1MH_1 = \frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{MP_1}} \\ \Longleftrightarrow \quad & \sin \sphericalangle P_1MH_1 = \frac{4{,}16}{5{,}26} \qquad |\sin^{-1}(\,) \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{\sphericalangle P_1MH_1 = 52{,}27^\circ}} \end{aligned}$$

Dann folgt der Winkel CMP_1 aus der Tatsache, dass die Winkel P_1MH_1 und CMP_1 an einer Geraden liegen und somit zusammen einen Winkel mit 180° aufspannen:

$$\begin{aligned} & \sphericalangle CMP_1 + \sphericalangle P_1MH_1 = 180^\circ \qquad |-\sphericalangle P_1MH_1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \sphericalangle CMP_1 = 180^\circ - \sphericalangle P_1MH_1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \sphericalangle CMP_1 = 180^\circ - 52{,}27^\circ \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{\sphericalangle CMP_1 = 127{,}73^\circ} \end{aligned}$$

Letztendlich kann nun der Flächeninhalt A_{MCP_1} berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
& A_{MCP_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MP_1} \cdot \overline{MC} \cdot \sin \sphericalangle CMP_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & A_{MCP_1} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}26 \cdot 6 \cdot \sin 127{,}73^\circ \text{ cm}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{A_{MCP_1} = 12{,}48\,\text{cm}^2}}
\end{aligned}
$$

A 1.5 Die Strecke $[MP_n]$ wird minimal, wenn sie im rechten Winkel auf der Strecke [AS] steht. Einzeichnen der Strecke $[MP_0]$: siehe Zeichnung zu B 2.2

Die Länge $\overline{MP_0}$ kann im rechtwinkligen Dreieck AMP_0 mit dem Sinus berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
& \sin\alpha = \frac{\overline{MP_0}}{\overline{AM}} && | \cdot \overline{AM} \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{MP_0} = \overline{AM} \cdot \sin\alpha \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{MP_0} = 6\,\text{cm} \cdot \sin 56{,}31^\circ \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\overline{MP_0} = 4{,}99\,\text{cm}}
\end{aligned}
$$

Der Flächeninhalt der Dreiecke BDP_n wird minimal, wenn die Höhe $\overline{MP_n}$ minimal wird. Die minimale Höhe ist gerade $\overline{MP_0} = 4{,}99\,\text{cm}$. Somit ist der minimale Flächeninhalt der Dreiecke BDP_n gerade der Flächeninhalt des Dreiecks BDP_0:

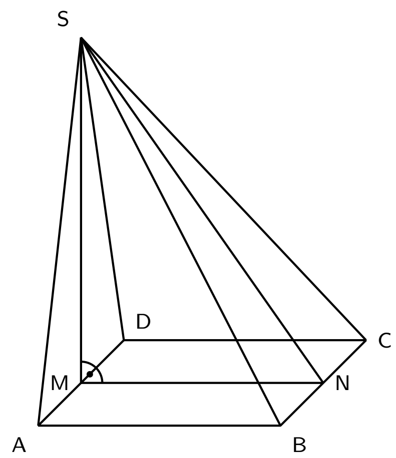
$$
\begin{aligned}
& A_{BDP_0} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MP_0} \\
\Longleftrightarrow \quad & A_{BDP_0} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4{,}99\,\text{cm}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{A_{BDP_0} = 19{,}96\,\text{cm}^2}}
\end{aligned}
$$

Also gilt: Da der minimale Flächeninhalt $19{,}96\,\text{cm}^2$ beträgt, gibt es kein Dreieck BDP_n mit einem Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$.

A2 Original-Prüfung 2015 Aufgabe B2 (adaptiert)

A 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche das Quadrat ABCD ist.
Die Spitze S der Pyramide liegt Senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke [AD].
N ist der Mittelpunkt der Strecke [BC].
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$; $\sphericalangle SNM = 55°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 1.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke [MN] auf der Schrägbildachse und der Punkt M links vom Punkt N liegen soll. 4 P
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann die Höhe [MS] der Pyramide ABCDS und die Länge der Strecke [SN]. $\left[\text{Ergebnisse: } \overline{MS} = 11{,}43\,\text{cm};\ \overline{SN} = 13{,}95\,\text{cm}\right]$

A 1.2 Punkte P_n auf der Strecke [SN] mit $\overline{P_nS}(x) = x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \in \,]0;\,13{,}95[$ sind die Spitzen von Pyramiden $BCMP_n$. Punkte F_n sind die Fußpunkte der Pyramidenhöhen $[P_nF_n]$. 4 P
Zeichnen Sie für $x = 5$ die Pyramide $BCMP_1$ zusammen mit ihrer Höhe $[P_1F_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein. Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels $\sphericalangle SP_1M$.
$\left[\text{Teilergebnis: } \overline{MP_1} = 7{,}88\,\text{cm}\right]$

A 1.3 Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Pyramiden $BCMP_n$ in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = (-8{,}75x + 121{,}92)\,\text{cm}^3$. 3 P

A 1.4 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x das zugehörige Volumen der Pyramiden $BCMP_n$ mehr als 34 % des Volumens der Pyramide ABCDS beträgt. 3 P

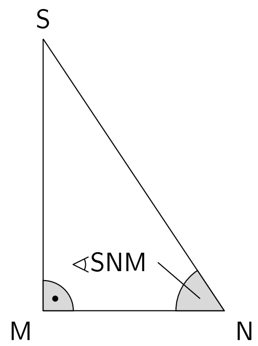
A 1.5 Unter den Punkten P_n hat der Punkt P_2 die kürzeste Entfernung zu M. 3 P
Zeichnen Sie die Pyramide $BCMP_2$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MP_2]$ sowie den zugehörigen Wert für x.

A2 Lösung Original-Prüfung 2015 Aufgabe B2 (adaptiert)

A 1.1 Schrägbild mit Schrägbildachse [MN], $q = \frac{1}{2}$ und $\omega = 45°$ zeichnen: Siehe nächste Seite.

Die Höhe der Strecke [MS] berechnet sich im rechtwinkligen Dreieck MNS mithilfe des Tangens wie folgt:

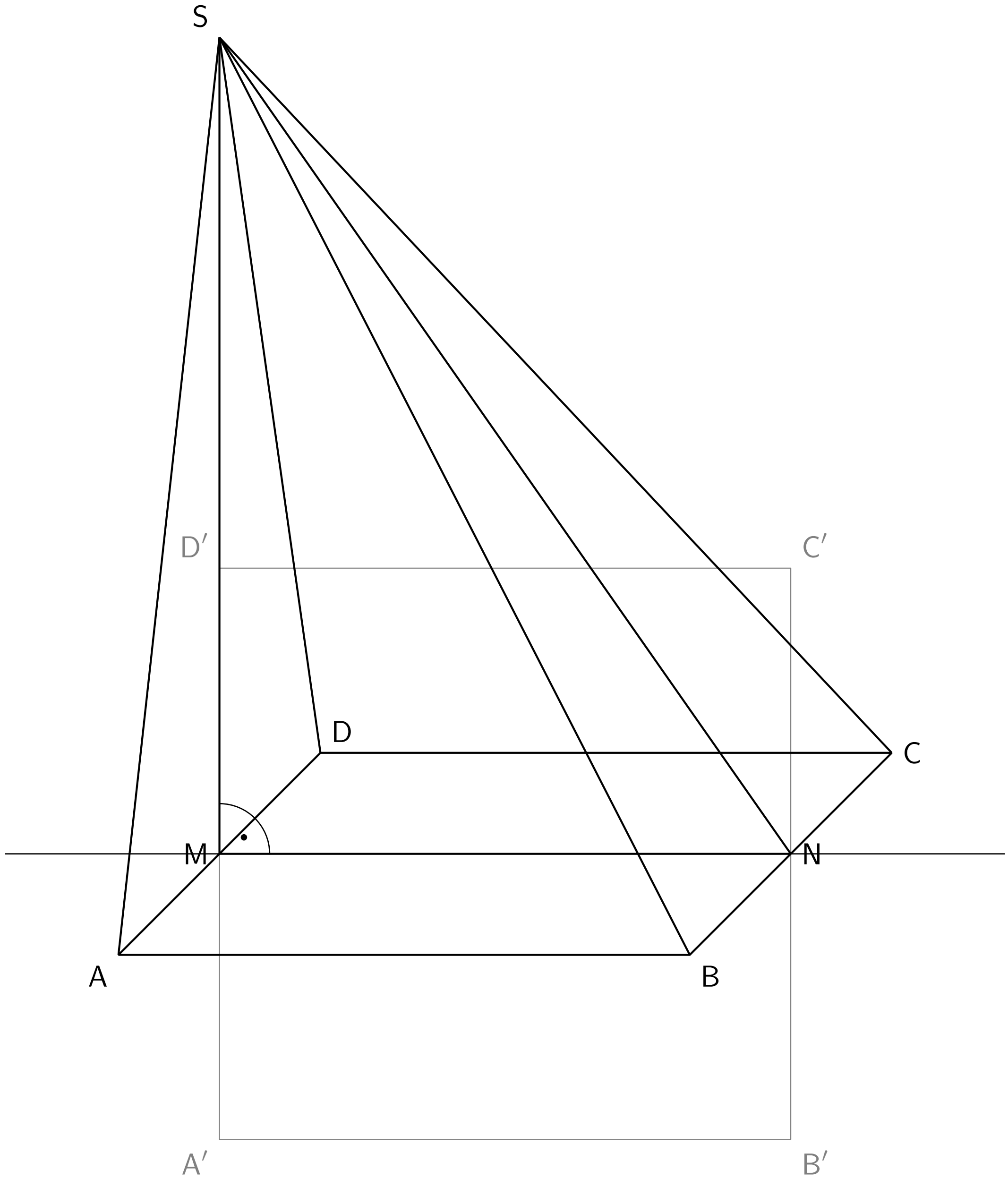
$$\begin{aligned} & \tan \sphericalangle SNM = \frac{\overline{MS}}{\overline{MN}} & \\ \Longleftrightarrow \quad & \tan 55° = \frac{\overline{MS}}{8\,\text{cm}} & | \cdot 8\,\text{cm} \\ \Longleftrightarrow \quad & \overline{MS} = 8\,\text{cm} \cdot \tan 55° & \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{\overline{MS} = 11{,}43\,\text{cm}}} & \end{aligned}$$



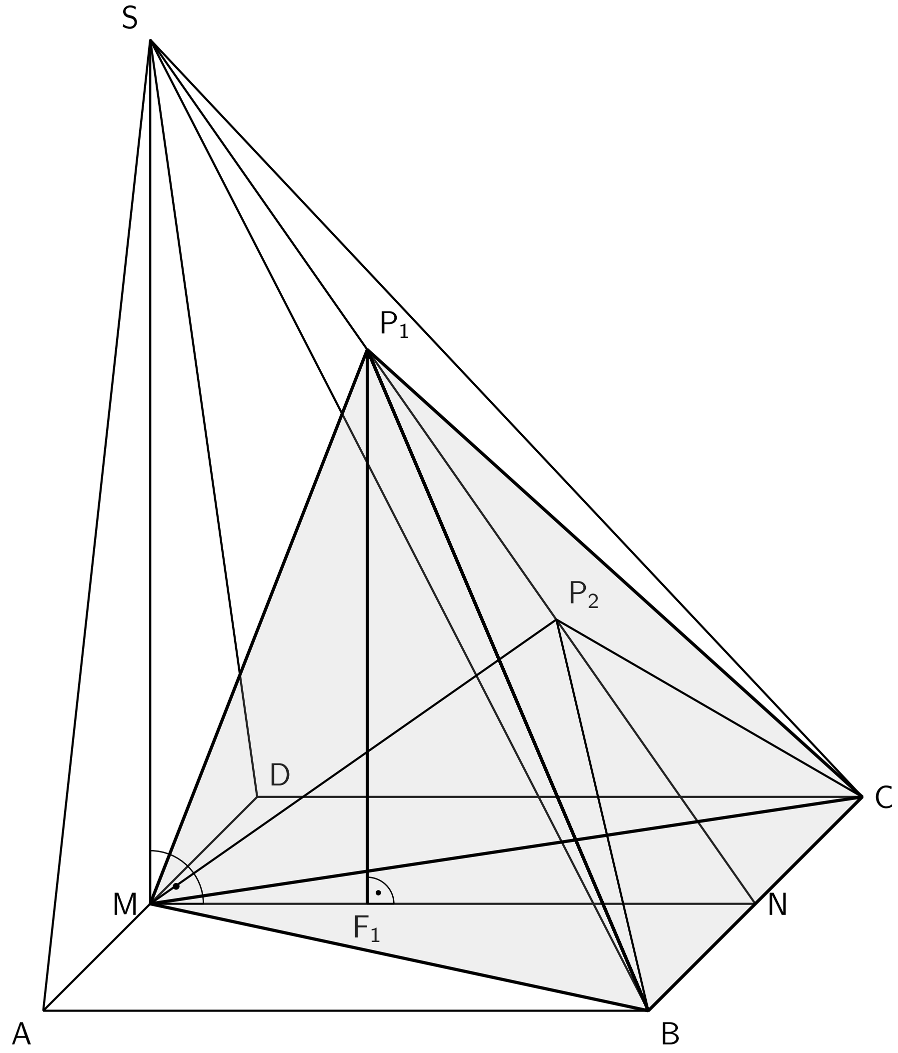
Die Länge der Strecke [SN] berechnet sich im rechtwinkligen Dreieck MNS mithilfe des Kosinus wie folgt:

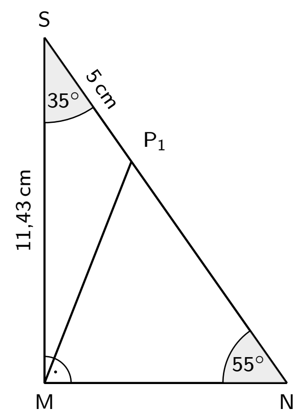
$$\begin{aligned} & \cos \sphericalangle SNM = \frac{\overline{MN}}{\overline{SN}} & \\ \Longleftrightarrow \quad & \cos 55° = \frac{8\,\text{cm}}{\overline{SN}} & | \cdot \overline{SN} \quad | : \cos 55° \\ \Longleftrightarrow \quad & \overline{SN} = \frac{8\,\text{cm}}{\cos 55°} & \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{\overline{SN} = 13{,}95\,\text{cm}}} & \end{aligned}$$

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.2 Einzeichnen der Pyramide $BSMP_1$ und ihrer Höhe $[P_1F_1]$ für $x = 5$:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)





Das Maß des Winkels $\sphericalangle SP_1M$ muss mithilfe des Kosinussatzes im Dreieck MP_1S berechnet werden (siehe Skizze). Hierzu wir die Länge $\overline{MP_1}$ benötigt. Diese wird ebenfalls mit dem Kosinussatz im Dreieck MP_1S berechnet. Für den Winkel $\sphericalangle MSN$ gilt: $\sphericalangle MSN = 180° - 90° - 55° = 35°$. Für $\overline{MP_1}$ gilt also:

$$\overline{P_1M}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{P_1S}^2 - 2 \cdot \overline{MS} \cdot \overline{P_1S} \cdot \cos \sphericalangle MSN \quad |\sqrt{\ }$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{P_1M} = \sqrt{11{,}43^2 + 5^2 - 2 \cdot 11{,}43 \cdot 5 \cdot \cos 35°}\ \text{cm}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{P_1M} = \sqrt{62{,}02}\ \text{cm}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\overline{P_1M} = 7{,}88\ \text{cm}}$$

Für den Winkel $\sphericalangle SP_1M$ gilt dann:

$$\overline{MS}^2 = \overline{P_1M}^2 + \overline{P_1S}^2 - 2 \cdot \overline{P_1M} \cdot \overline{P_1S} \cdot \cos \sphericalangle SP_1M$$

$$\Longleftrightarrow \quad 11{,}43^2 = 7{,}88^2 + 5^2 - 2 \cdot 7{,}88 \cdot 5 \cdot \cos \sphericalangle SP_1M \quad |-7{,}88^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 11{,}43^2 - 7{,}88^2 = 25 - 78{,}8 \cdot \cos \sphericalangle SP_1M \quad |-25$$

$$\Longleftrightarrow \quad 11{,}43^2 - 7{,}88^2 - 25 = -78{,}8 \cdot \cos \sphericalangle SP_1M \quad |:(-78{,}8)$$

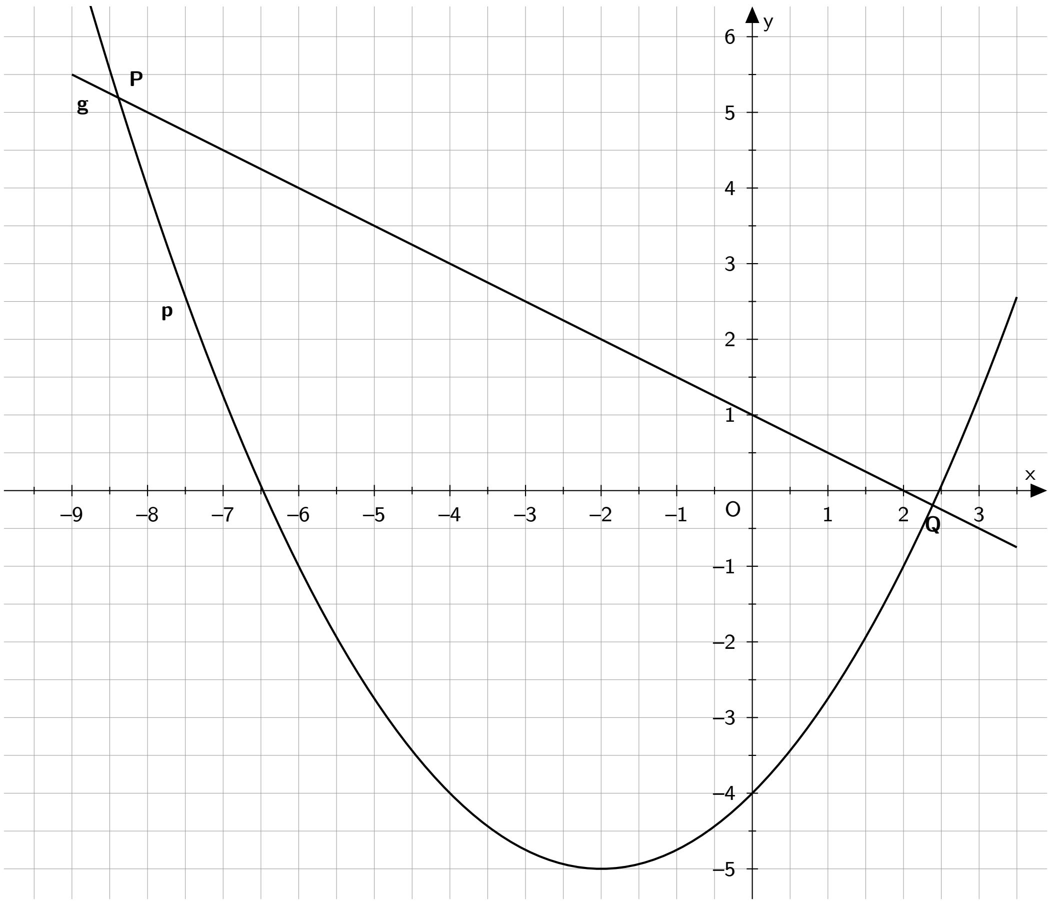
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{11{,}43^2 - 7{,}88^2 - 25}{-78{,}8} = \cos \sphericalangle SP_1M$$

Übungsteil - Quadratische Funktionen

A1 Original-Prüfung 2013 Aufgabe A2 (adaptiert)

A 1.0 Die Parabel p mit dem Scheitel $S(-2|-5)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0{,}25x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0{,}5x + 1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.1 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0{,}25x^2 + x - 4$ hat. 1 P

A 1.2 Die Gerade g schneidet die Parabel p in den Punkten P und Q. 3 P

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q.

A 1.3 Punkte $A_n\,(x\,|\,0{,}25x^2 + x - 4)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n\,(x\,|-0{,}5x + 1)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind für $-8{,}39 < x < 2{,}39$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_nB_nC_n$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g, wobei die Abszisse der Punkte C_n um 3 kleiner ist als die Abszisse x der Punkte A_n und B_n. Zeichnen Sie für $x_1 = -4$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ und für $x_2 = 1$ das Dreieck $A_2B_2C_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein. 2 P

A 1.4 Zeigen Sie, dass für die Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt: $C_n\,(x-3\,|-0{,}5x + 2{,}5)$ 1 P

A 1.5 In allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ haben die Winkel $C_nB_nA_n$ das gleiche Maß. 2 P

Berechnen Sie das Maß der Winkel $C_nB_nA_n$.

A1 Lösung Original-Prüfung 2013 Aufgabe A2 (adaptiert)

A 1.1 Mit dem Scheitelpunkt $S\,(-2\,|-5)$ und der Scheitelpunktsgleichung der Parabel p gilt:

$$\begin{aligned} & p\colon y = 0{,}25\,(x-(-2))^2 + (-5) \qquad (\mathbb{G} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}) \\ \Longleftrightarrow\quad & p\colon y = 0{,}25\,(x+2)^2 - 5 \\ \Longleftrightarrow\quad & p\colon y = 0{,}25\left(x^2+4x+4\right) - 5 \\ \Longleftrightarrow\quad & p\colon y = 0{,}25x^2 + x + 1 - 5 \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{p\colon y = 0{,}25x^2 + x - 4} \end{aligned}$$

A 1.2 Um die Schnittpunkte zu berechnen, werden die Gleichungen der Parabel und der Gerade gleichgesetzt. Es gilt also für $x \in \mathbb{R}$ und $p \cap g$:

$$\begin{aligned} & -0{,}5x + 1 = 0{,}25x^2 + x - 4 \qquad |+0{,}5x-1 \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 5 \\ \Longleftrightarrow\quad & x_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4\cdot 0{,}25\cdot(-5)}}{2\cdot 0{,}25} \\ \Longleftrightarrow\quad & x_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{7{,}25}}{0{,}5} \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = -8{,}39}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_2 = 2{,}39}} \qquad \mathbb{L} = \{-8{,}39;\ 2{,}39\} \end{aligned}$$

Für die y-Werte gilt:

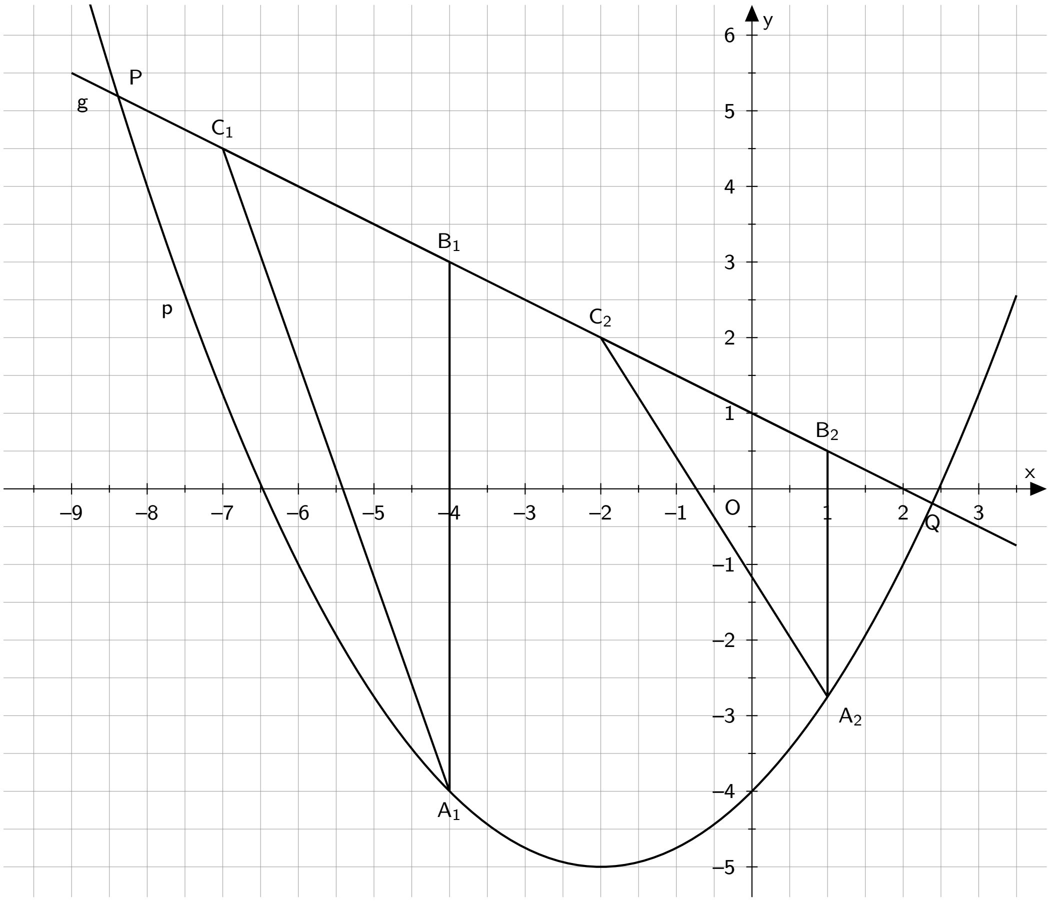
$$y_1 = -0{,}5\cdot(-8{,}39) + 1 = \underline{\underline{5{,}20}} \qquad \text{und} \qquad y_2 = -0{,}5\cdot 2{,}39 + 1 = \underline{\underline{-0{,}20}}$$

Somit sind die Koordinaten der Punkte P und Q:

$$P\,(-8{,}39\,|\,5{,}20) \quad \text{und} \quad Q\,(2{,}39\,|-0{,}20)$$

A 1.3 Einzeichnen der Dreiecke $A_1B_1C_1$ für $x_1 = -4$ und $A_2B_2C_2$ für $x_2 = 1$:

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.4 Da die Abszisse der Punkte $C_n \in g$ um 3 kleiner ist, als die der Punkte $B_n \in g$, gilt für die Punkte C_n:

$$C_n\,(x-3\,|-0{,}5(x-3)+1) \quad\Longleftrightarrow\quad C_n\,(x-3\,|-0{,}5x+2{,}5)$$

A 1.5 Legt man gedanklich durch die Punkte B_n eine horizontale Linie parallel zur x-Achse, so unterteilt sich der Winkel $\sphericalangle C_nB_nA_n$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \tan\alpha = m_g;\, m_g = -0{,}5 \\
\Longleftrightarrow\quad & \tan\alpha = -0{,}5 && |\tan^{-1}(\,) \\
\Longleftrightarrow\quad & \alpha = -26{,}57^\circ + 180^\circ = 153{,}43^\circ \\
\Longleftrightarrow\quad & \sphericalangle C_nB_nA_n = 360^\circ - 90^\circ - 153{,}43^\circ = 116{,}57^\circ
\end{aligned}$$

A7 Original-Prüfung 2016 Aufgabe B1 (adaptiert)

A 1.0 Die Parabel p mit dem Scheitel $S\,(4\,|-2)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0{,}25x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $bc \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = 0{,}5x + 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A 1.1 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0{,}25x^2 - 2x + 2$ hat. Zeichnen Sie sodann die Parabel p sowie die Gerade g für $x \in [-1;\, 11]$ in ein Koordinatensystem ein. 3 P
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leqq x \leqq 11$; $-3 \leqq y \leqq 11$.

A 1.2 Die Punkte $A\,(0\,|\,2)$ und $C\,(10\,|\,7)$ sind Schnittpunkte der Parabel p mit der Geraden g. Sie sind zusammen mit den Punkten $B_n\,(x\,|\,0{,}25x^2 - 2x + 2)$ auf der Parabel p Eckpunkte von Drachenvierecken AB_nCD_n mit der Geraden g als Symmetrieachse. 2 P

Zeichnen Sie das Drachenviereck AB_1CD_1 für x=6 in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein und geben Sie das Intervall für x an, für das es Drachenvierecke AB_nCD_n gibt.

A 1.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass das Drachenviereck AB_1CD_1 bei B_1 rechtwinklig ist. 3 P

A 1.4 Unter den Drachenvierecken AB_nCD_n gibt es die Drachenvierecke AB_2CD_2 und AB_3CD_3, bei denen die Eckpunkte B_2 und B_3 auf der x-Achse liegen. 2 P

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_2 und B_3.

A 1.5 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Drachenvierecke AB_nCD_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt: 3 P

$A(x) = (-2{,}5x^2 + 25x)$ FE.

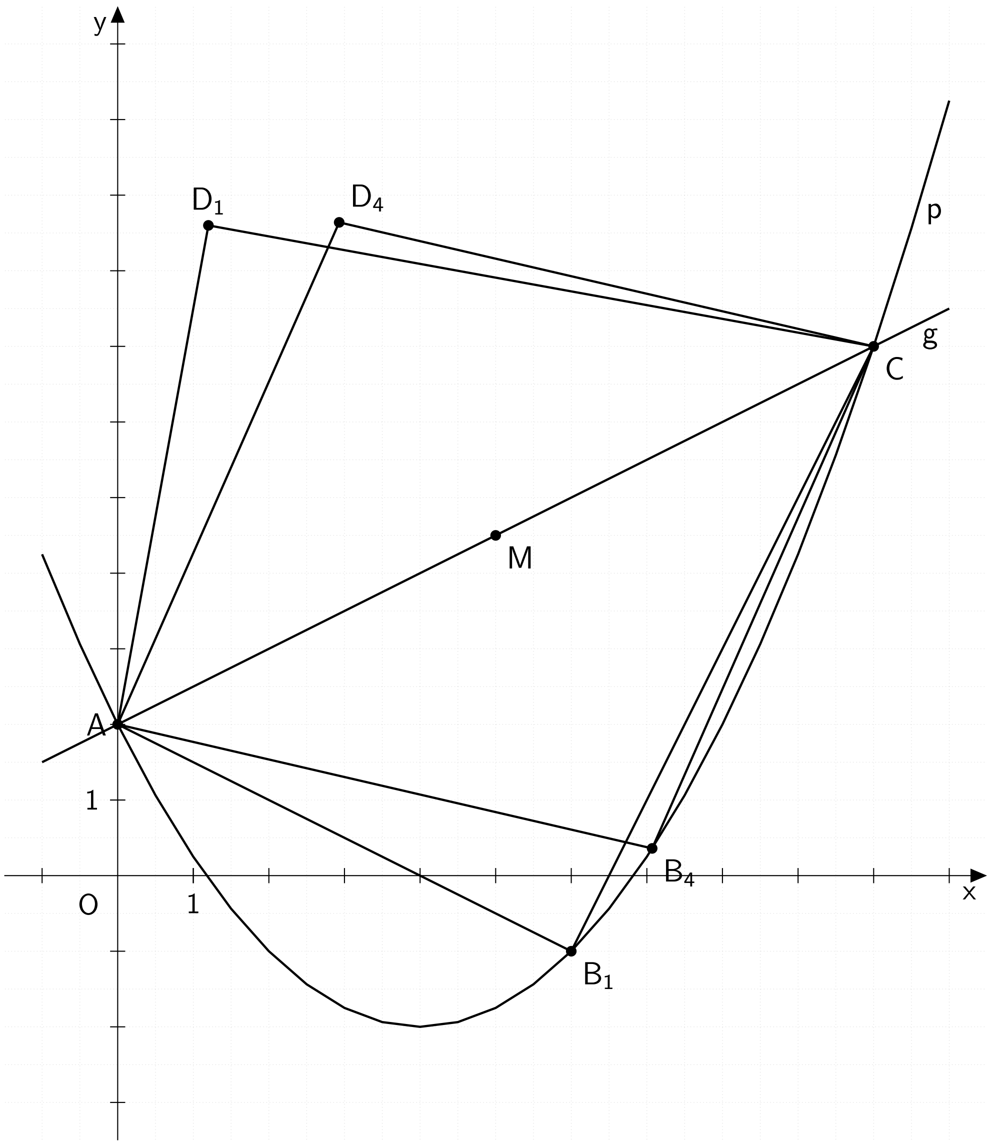
A 1.6 Unter den Drachenvierecken AB_nCD_n gibt es eine Raute AB_4CD_4. 4 P
Zeichnen Sie die Raute AB_4CD_4 mit dem Diagonalenschnittpunkt M in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.
Ermitteln Sie sodann rechnerisch die Gleichung der Geraden MB_4.
[Teilergebnis : $M\,(5\,|\,4{,}5)$]

A7 Lösung Original-Prüfung 2016 Aufgabe B1 (adaptiert)

A 1.1 Die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion lautet im allgemeinen $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$, wobei $(x_s \,|\, y_s)$ die Koordinaten des Scheitelpunktes sind. Der Parameter a entspricht dem Parameter a in der Form $y = ax^2 + bx + c$. Aus den Angaben sind die Koordinaten $S\,(4 \,|\, -2)$ des Scheitelpunktes, sowie $a = 0{,}25$ bekannt. Damit kann die Scheitelpunktform der Parabel aufgestellt werden, welche dann in die allgemeine Form umgeformt wird:

$$\begin{aligned} y &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ &= 0{,}25 \cdot (x - 4)^2 - 2 \\ &= 0{,}25 \cdot (x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 0{,}25x^2 - 2x + 4 - 2 \\ &= \underline{\underline{0{,}25x^2 - 2x + 2}} \end{aligned}$$

Grafische Darstellung von Parabel p und Gerade g:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.2 Die Koordinaten der Punkte A und C sind laut Angabe bekannt. Setzt man $x = 6$ in die allgemeinen Koordinaten von B_n ein, können außerdem die Koordinaten des Punktes B_1 ermittelt werden:

$$B_1\left(6\,\middle|\,0{,}25\cdot 6^2 - 2\cdot 6 + 2\right) \quad\Longleftrightarrow\quad B_1\,(6\,|\,9 - 12 + 2) \quad\Longleftrightarrow\quad B_1\,(6\,|\,-1)$$

Damit kann das Drachenviereck AB_1CD_1 gezeichnet werden, da der Punkt D_1 symmetrisch zu B_1 bezüglich der Strecke [AC] liegt (siehe Zeichnung in Teilaufgabe 1.1).

Damit sich ein Drachenviereck ergibt, muss die x-Koordinate von Punkt B_n zwischen denen von Punkt A und C liegen. Da die x-Koordinate des Punktes B_n genau dem Abszissenwert x entspricht, muss x also zwischen der x-Koordinate von A (also 0) und C (also 10) liegen. Es ist $x \in \,]0;\,10[$.

A 1.3 Um eine Aussage treffen zu können, werden die Steigungen der Geraden AB_1 und B_1C betrachtet, da zwischen diesen beiden Geraden der zu untersuchende Winkel liegt:

$$m_{AB_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{B_1} - y_A}{x_{B_1} - x_A} = \frac{-1-2}{6-0} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{B_1C} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_{B_1}}{x_C - x_{B_1}} = \frac{7-(-1)}{10-6} = \frac{8}{4} = \underline{\underline{2}}$$

Der Steigung m_{AB_1} ist das negativ Inverse von m_{B_1C}, es gilt also $m_{AB_1} \cdot m_{B_1C} = -1$, die Geraden stehen somit senkrecht aufeinander. Damit ist das Drachenviereck AB_1CD_1 bei B_1 rechtwinklig.

A 1.4 Liegen die Punkte B_2 und B_3 auf der x-Achse, so ist ihre y-Komponente 0. Laut Angabe gilt dann also:

$$\begin{aligned}
& & y_{B_n} &= 0{,}25x^2 - 2x + 2 \\
&\Longleftrightarrow & 0 &= 0{,}25x^2 - 2x + 2 \\
&\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 2}}{2 \cdot 0{,}25} \\
&\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{0{,}5} \\
&\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= 2 \cdot (2 \pm \sqrt{2}) \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x_1 = 1{,}17}} &\quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = 6{,}83}} & & \mathbb{L} = \{1{,}17; 6{,}83\}
\end{aligned}$$

Die Eckpunkte $B_2\,(1{,}17\,|\,0)$ und $B_3\,(6{,}83\,|\,0)$ liegen auf der x-Achse.

A 1.5 Aufgrund der Symmetrie der Drachenvierecke entspricht der gesamte Flächeninhalt dem doppelten des Dreiecks AB_nC, es gilt $A = 2 \cdot A_{AB_nC}$. Um den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen, werden die Vektoren $\overrightarrow{AB_n}$ und $\overrightarrow{AC}$ betrachtet, die das Dreieck einschließen:

$$\overrightarrow{AB_n}(x) = \begin{pmatrix} x_{B_n} - x_A \\ y_{B_n} - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ 0{,}25x^2 - 2x + 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0{,}25x^2 - 2x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 0 \\ 7 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit den ermittelten Koordinaten der beiden Vektoren gilt nun für den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
A(x) = 2 \cdot A_{AB_nC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & 10 \\ 0{,}25x^2 - 2x & 5 \end{vmatrix} \text{ FE} \\
&= (x \cdot 5 - (0{,}25x^2 - 2x) \cdot 10) \text{ FE} \\
&= (5x - 2{,}5x^2 + 20x) \text{ FE} \\
&= \underline{\underline{(-2{,}5x^2 + 25x)\,[\text{FE}]}}
\end{aligned}$$

A 1.6 Die Raute zeichnet sich dadurch aus, dass alle Seiten gleich lang sind. Demnach liegt der Diagonalenschnittpunkt M genau mittig zwischen den Punkten A und C, es gilt:

$$M\left(\frac{x_C + x_A}{2} \,\middle|\, \frac{y_C + y_A}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad M\left(\frac{10+0}{2} \,\middle|\, \frac{7+2}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad M\,(5\,|\,4{,}5)$$

Von diesem Punkt aus kann dann senkrecht zur Strecke [AC] abgetragen werden, sodass ein Schnittpunkt mit der Parabel p entsteht, der dem Punkt B_4 entspricht. Gespiegelt über [AC] von B_4 aus, entsteht dann der Punkt D_4 (siehe Zeichnung in Teilaufgabe 1.1).

Zunächst muss die Steigung m_{MB_4} der Gerade MB_4 ermittelt werden. Da die Koordinaten des Punktes B_4 unbekannt sind, berechnet man die Steigung über die Steigung der senkrechten Gerade AC. Diese Steigung beträgt $m_{AC} = m_g = \frac{1}{2}$. Da die Gerade MB_4 senkrecht dazu steht, ist ihr Anstieg das negativ Inverse dieses Wertes, es gilt:

$$m_{MB_4} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{-2}$$

Eingesetzt in die allgemeine Form lautet die Gleichung der Geraden $y = -2 \cdot x + t$. Dabei bestimmt man nun t, indem man die Koordinaten des bekannten Punktes M einsetzt, der auf der Gerade liegt:

$$\begin{aligned} & & y &= -2 \cdot x + t & & \\ \iff & & 4{,}5 &= -2 \cdot 5 + t & & + 10 \\ \iff & & & \underline{\underline{t = 14{,}5}} & & \end{aligned}$$

Die Gleichung der Gerade MB_4 lautet $y = -2x + 14{,}5$.

A8 Original-Prüfung 2017 Aufgabe B1 (adaptiert)

A 1.0 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-3|0)$ und $Q(5|0)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + 0{,}5x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0{,}1x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75$ hat. 4 P
Zeichnen Sie sodann die Gerade g sowie die Parabel p für $x \in [-4; 7]$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 8$; $-5 \leqq y \leqq 5$.

A 1.2 Punkte $A_n(x|-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x|-0{,}1x - 2)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x. 2 P
Sie sind zusammen mit Punkten C_n und D_n für $x \in]-3{,}74; 6{,}14[$ die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$.
Die Punkte C_n liegen ebenfalls auf der Geraden g. Dabei ist die Abszisse x der Punkte C_n jeweils um 2 größer als die Abszisse x der Punkte B_n.
Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -2$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

A 1.3 Berechnen Sie die Länge der Strecken $[A_nB_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n. 2 P
$\left[\text{Ergebnis}: \overline{A_nB_n}(x) = (-0{,}25x^2 + 0{,}6x + 5{,}75)\,\text{LE}\right]$

A 1.4 Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt. 3 P

A 1.5 Unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es Rauten $A_3B_3C_3D_3$ und $A_4B_4C_4D_4$. 4 P
Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. $\left[\text{Teilergebnis}: \overline{B_nC_n} = 2{,}01\ \text{LE}\right]$

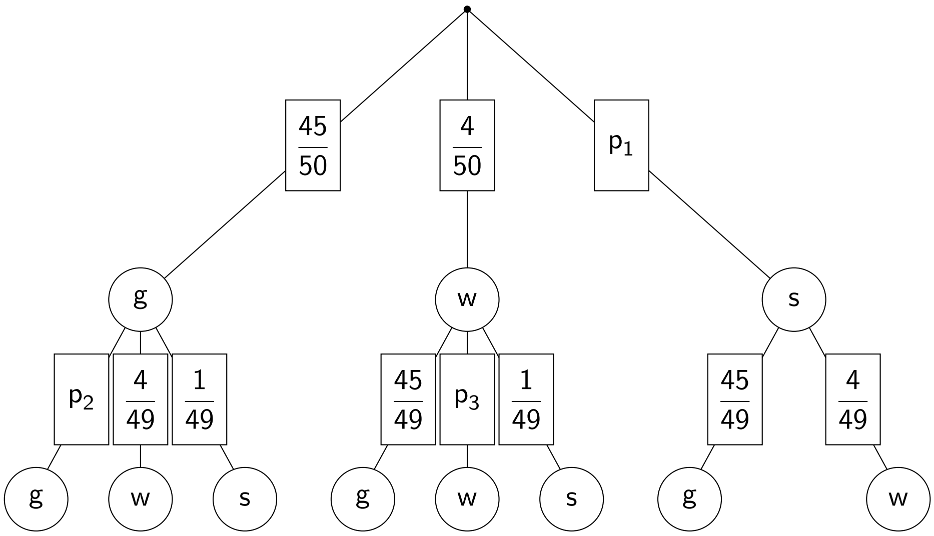
A 1.6 Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ kein Rechteck gibt. 2 P

Übungsteil - Daten und Zufall

A1 Original-Prüfung 2018 Mittelschule Bayern M10 AII-A7 (adaptiert)

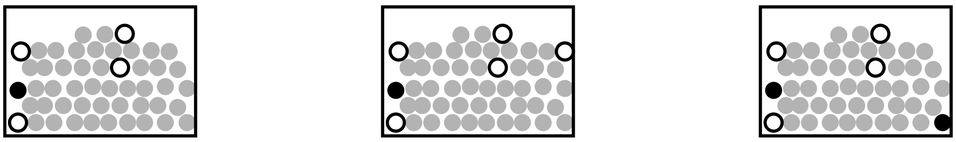
A 1 In einem Behälter befinden sich Kugeln in den Farben grau (g), weiß (w) und schwarz (s). Bei einem Zufallsexperiment wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel gezogen. 4 P

Das folgende Baumdiagramm stellt die möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperimentes dar.



a) Begründen Sie anhand des Baumdiagramms, dass es sich um ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen handelt.

b) Markieren Sie die Nummer des Behälters (siehe Abbildung unten), die zum dargestellten Baumdiagramm passt.



(1) (2) (3)

c) Geben Sie die im Baumdiagramm fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_2 und p_3 in Bruchschreibweise an.

d) Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass es sich bei den beiden gezogenen Kugeln um eine graue sowie um eine weiße handelt.

A1 Lösung Original-Prüfung 2018 Mittelschule Bayern M10 AII-A7 (adaptiert)

A 1 a) In der ersten Ebene des Baumdiagramms gibt es 50 Kugeln, in der zweiten Ebene nur noch 49 Kugeln. Es wurde also eine Kugel gezogen und nicht zurückgelegt. Ablesbar ist dies an den Nennern der Wahrscheinlichkeiten.

b) In den Behältern müssen entsprechend viele Kugeln der einzelnen Farben enthalten sein wie es die Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm angeben (ablesbar an den Zählern der Brüche). Am besten sieht man dies an der ersten Ebene des Baumdiagramms.
Die Wahrscheinlichkeit eine graue Kugel zu ziehen ist $p_g = \frac{45}{50} \quad \Rightarrow$ 45 graue Kugeln
Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen ist $p_w = \frac{4}{50} \quad \Rightarrow$ 4 weiße Kugeln
Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen ist $p_s = 1-\frac{45}{50}-\frac{4}{50} = \frac{1}{50} \quad \Rightarrow$ 1 schwarze Kugel
Nun muss man nur noch die Kugeln in den Behältern zählen. Der richtige Behälter ist damit **Behälter (1)**.

c) Für p_2: Es gibt zu Beginn 45 graue Kugeln. Im ersten Schritt wurde hier aber bereits eine graue Kugel gezogen. Es verbleiben nach dem ersten Ziehen somit noch 44 graue Kugeln, insgesamt sind es noch 49. Damit gilt:

$$p_2 = \frac{44}{49}$$

Für p_3: Analog kann man hier überlegen, dass beim ersten Ziehen bereits eine weiße Kugel gezogen wurde. Damit verbleiben noch drei weiße Kugeln, insgesamt sind es noch 49. Für die Wahrscheinlichkeit erneut eine weiße zu ziehen gilt also:

$$p_3 = \frac{3}{49}$$

d) Die Wahrscheinlichkeit eine graue und eine weiße zu ziehen, entspricht den Kombinationen weiß-grau und grau-weiß. Nach den Pfadregeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$$p = \underbrace{\frac{45}{50} \cdot \frac{4}{49}}_{\text{grau-weiß}} + \underbrace{\frac{4}{50} \cdot \frac{45}{49}}_{\text{weiß-grau}} = \frac{36}{245} \approx 0{,}147 = 14{,}7\,\%$$

A2 Original-Prüfung Mittelschule Bayern M10 AI-A10 (adaptiert)

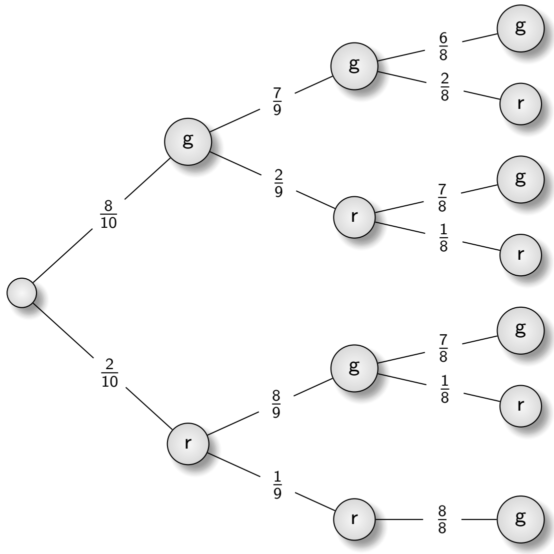
A 1 Aus einem Korb mit 8 gekochten und 2 rohen Eiern werden nacheinander 3 Eier entnommen und nicht wieder zurückgelegt. 3 P

a) Zeichnen Sie für diesen Ablauf ein Baumdiagramm und beschriften Sie dieses mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Ablauf genau ein rohes Ei entnommen wird.

A2 Lösung Original-Prüfung 2019 Mittelschule Bayern M10 AI-A10 (adaptiert)

A 1 a) Die Eier werden gezogen und nicht wieder zurückgelegt. Entsprechend ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade immer aus der Zahl der verbleibenden gekochten (g)/rohen (r) Eier und der verbleibenden Gesamtzahl.



$P(ggg) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{336}{720} = \frac{7}{15}$

$P(ggr) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{112}{720} = \frac{7}{45}$

$P(grg) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{112}{720} = \frac{7}{45}$

$P(grr) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{16}{720} = \frac{1}{45}$

$P(rgg) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{112}{720} = \frac{7}{45}$

$P(rgr) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{16}{720} = \frac{1}{45}$

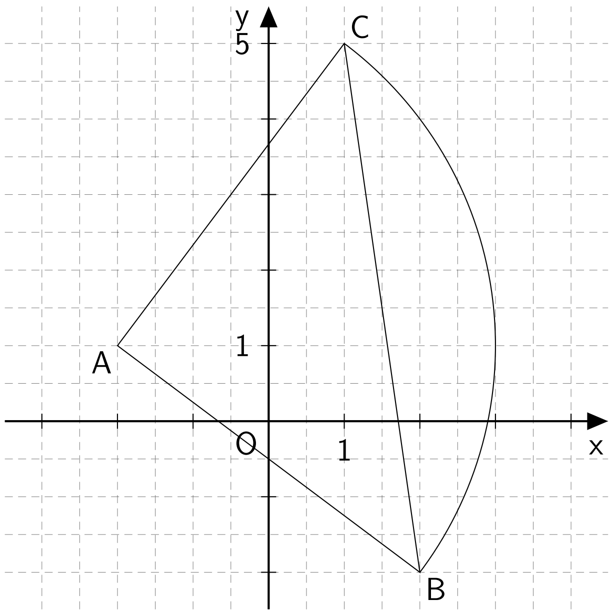
$P(rrg) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{16}{720} = \frac{1}{45}$

b) Die Ereignisse, die genau ein rohes Ei beinhalten sind „ggr“, „grg“ und „rgg“. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse können dem Baumdiagramm entnommen werden und werden dann addiert:

$$P(ggr) + P(grg) + P(rgg) = \frac{7}{45} + \frac{7}{45} + \frac{7}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} \approx \underline{\underline{0{,}467}}$$

Musterprüfungen nach LehrplanPLUS

A 1.0 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC.
Es gilt:
$A(-2\,|\,1)$; $B(2\,|\,-2)$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

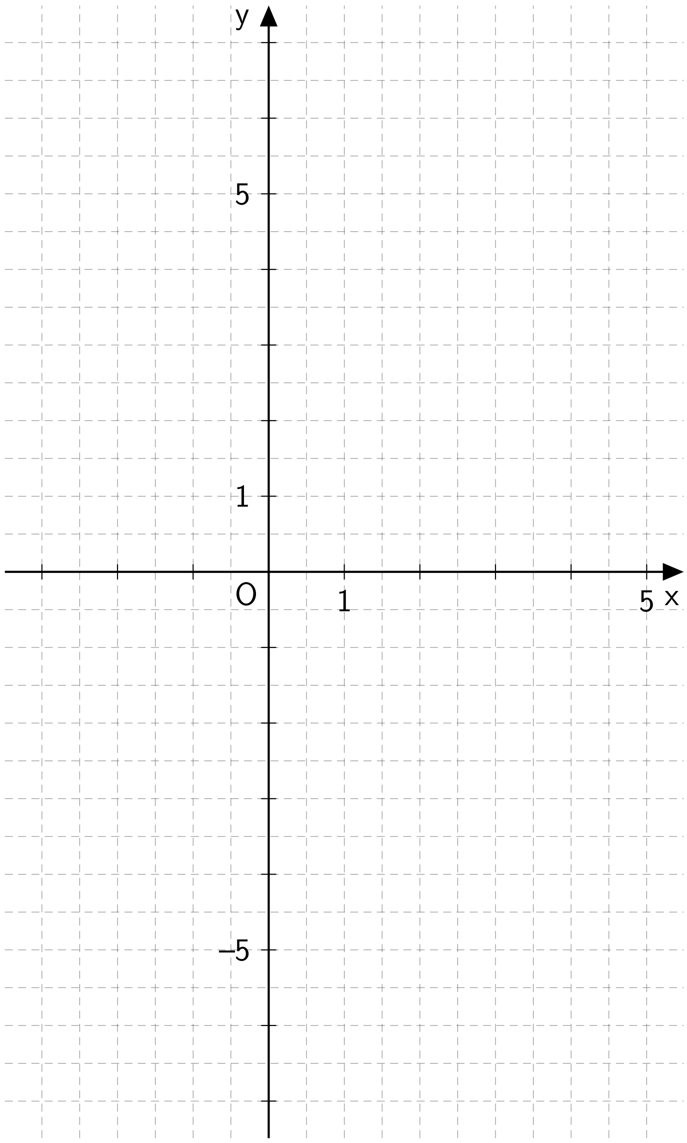


A 1.1 Begründen Sie rechnerisch, weshalb das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 2 P

A 1.2 Der Kreis um A mit dem Radius 5 LE schneidet die Strecke $\overline{BC}$ in den Punkten B und C. 2 P

Berechnen Sie den Flächeninhalt A_{Segment} des Kreissegments, das durch die Strecke $\overline{BC}$ und den Kreisbogen $\widehat{BC}$ begrenzt wird. Geben Sie das exakte Ergebnis an.

A 2 Zeichnen Sie die Parabel p mit der Gleichung $y = -0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$ $(x,y \in \mathbb{R})$ für $x \in [-3;\ 5]$ in das Koordinatensystem ein. 1,5 P



A 3 Ermitteln Sie rechnerisch die Lösung der Gleichung $0{,}5x^2 + 18 = 6x$ $(x \in \mathbb{R})$. 2 P

A 4.0 In einem Kartenspiel mit insgesamt 100 Karten befinden sich jeweils 20 Ziffernkarten in den Farben rot, gelb, grün und blau. Pro Farbe sind jeweils zwei Karten mit den Ziffern 0 bis 9 beschriftet. Die übrigen 20 Karten sind Sonderkarten.

Die Karten werden gemischt und verdeckt verteilt. Bruno erhält die beiden ersten Karten.

A 4.1 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Bruno als erstes eine gelbe Ziffernkarte mit der Ziffer 0 erhält. 1 P

A 4.2 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Bruno als erstes eine grüne oder eine rote Ziffernkarte erhält. 1 P

A 4.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bruno zwei Sonderkarten erhält. 2 P

A 1.1 Um zu zeigen, dass ABC rechtwinklig ist, wird die Steigung der beiden Geraden AB und AC ermittelt. Die Steigung von AB ergibt sich dabei aus den Koordinaten der Punkte A und B:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{2-(-2)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Die Steigung von AC ergibt sich direkt aus den Koordinaten des Vektors:

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$$

Es wird nun das Produkt der beiden Steigungen bestimmt:

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{12}{12} = -1$$

Die beiden Geraden stehen senkrecht zueinander, entsprechend hat das Dreieck ABC bei A einen rechten Winkel.

A 1.2 Die gesuchte Fläche ergibt sich aus der Differenz der Fläche des Viertelkreises (es handelt sich um einen Viertelkreis, weil bei A ein rechter Winkel liegt) und des Dreiecks ABC:

$$\begin{aligned} A_{Segment} = A_{Viertelkreis} - A_{ABC} &= \frac{1}{4} \cdot A_{Kreis} - A_{ABC} \\ &= \frac{1}{4} \cdot r_{Kreis}^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\right) \text{ FE} \\ &= \underline{\underline{(6{,}25 \cdot \pi - 12{,}5) \text{ FE}}} \end{aligned}$$

A 2 Aus der gegebenen Gleichung können die Koordinaten des Scheitelpunktes abgelesen werden zu $S\,(1\,|\,2)$:

$$y = -0{,}5 \cdot (x - \underbrace{1}_{x_S})^2 + \underbrace{2}_{y_S}$$

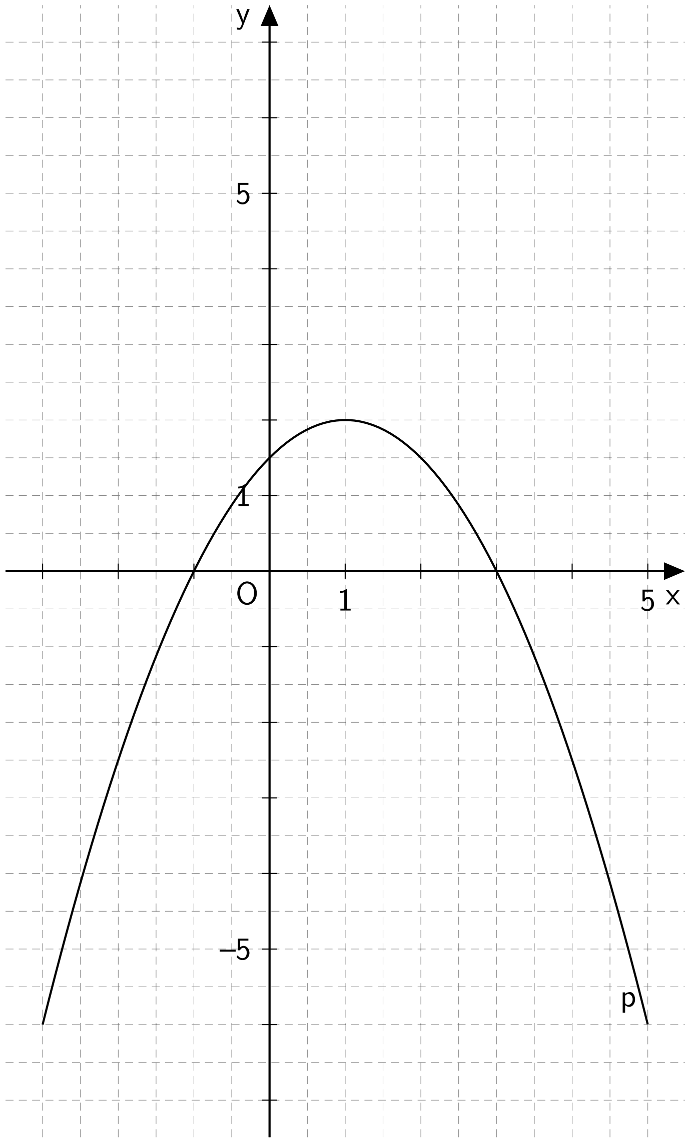
Aus dem Faktor –0,5 ergibt sich außerdem, dass die Parabel nach unten geöffnet ist und im Vergleich zu einer Normalparabel um einen Faktor 0,5 in y-Richtung gestaucht ist. Alternativ zu diesen Überlegungen kann durch Einsetzen in die Funktionsgleichung eine Wertetabelle erstellt werden, wie am Beispiel von $x = -3$ gezeigt ist:

$$y = -0{,}5 \cdot (-3-1)^2 + 2 = -0{,}5 \cdot (-4)^2 + 2 = -0{,}5 \cdot 16 + 2 = -8 + 2 = -6$$

Damit ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–6	–2,5	0	1,5	2	1,5	0	–2,5	–6

Damit kann die graphische Darstellung erfolgen:



A 3 Die Gleichung wird zunächst umgeformt:

$$0{,}5x^2 + 18 = 6x \qquad |-6x$$
$$\Longleftrightarrow \qquad 0{,}5x^2 - 6x + 18 = 0$$

Nun kann die Lösungsformel angewendet werden:

$$x_{1;2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 18}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{1} = 6$$

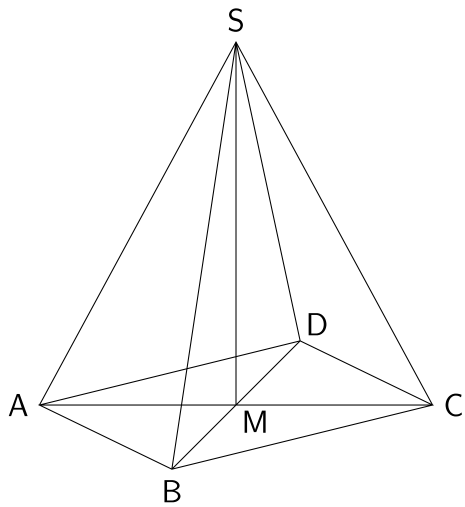
Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{6\}}}$.

A 4.1 Pro Farbe gibt es jeweils 2 Karten, die mit den Ziffern 0 bis 9 beschriftet sind. Entsprechend gibt es in dem Kartenspiel zwei gelbe Ziffernkarten mit der Ziffer 0. Die Wahrscheinlichkeit, dass Bruno eine dieser zwei Karten aus insgesamt 100 Karten als erstes bekommt ist daher $\underline{\underline{\frac{2}{100}}}$.

B 4.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$, deren Grundfläche die Raute ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist.

Es gilt: $|\overline{AC}| = 13\,\text{cm}$; $|\overline{BD}| = 12\,\text{cm}$; $|\overline{MS}| = 12\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 4.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke $\overline{AC}$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll. 4 P

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $\overline{CS}$ und das Maß des Winkels SCA.

[Teilergebnis: $|\overline{CS}| = 13{,}65\,\text{cm}$]

B 4.2 Punkte H_n liegen auf der Strecke $\overline{AM}$ mit $|\overline{AH_n}|(x) = x\,\text{cm}$ ($x \in \mathbb{R}; 0 < x < 6{,}5$). Sie sind Mittelpunkte von Strecken $\overline{P_nQ_n}$ mit $P_n \in \overline{AB}$, $Q_n \in \overline{AD}$ und $\overline{P_nQ_n} \parallel \overline{BD}$. 2 P

Punkte R_n sind Spitzen von Pyramiden $AP_nCQ_nR_n$ mit den Grundflächen AP_nCQ_n und den Höhen $\overline{H_nR_n}$, wobei gilt: $|\overline{CR_n}| = |\overline{CS}|$.

Zeichnen Sie die Pyramide $AP_1CQ_1R_1$ und die zugehörige Höhe $\overline{H_1R_1}$ für $x = 3$ in das Schrägbild zu B 4.1 ein.

B 4.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V_1 der Pyramide $AP_1CQ_1R_1$ gilt: $V_1 = 111{,}51\,\text{cm}^3$. 5 P

Bestimmen Sie sodann den prozentualen Anteil des Volumens V_1 am Volumen V der Pyramide ABCDS.

B 4.4 In der Pyramide $AP_2CQ_2R_2$ gilt: $|\overline{H_2R_2}| = 6\,\text{cm}$. 2 P

Bestimmen Sie rechnerisch den zugehörigen Wert für x.

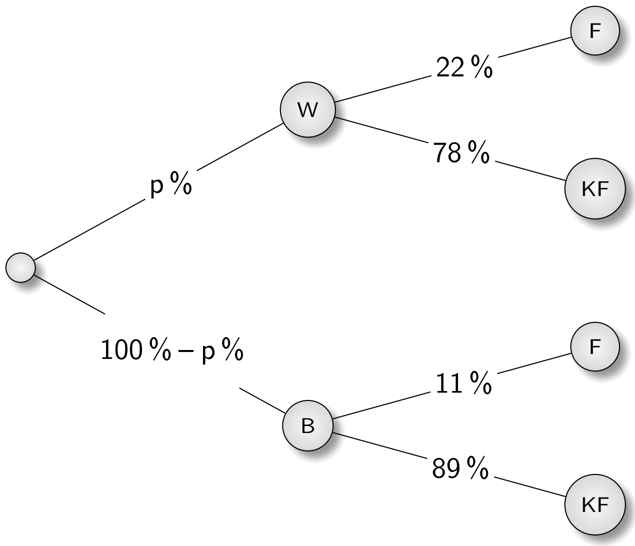
B 4.5 Zeigen Sie, dass für die Höhen $|\overline{H_nR_n}|$ der Pyramiden $AP_nCQ_nR_n$ in Abhängigkeit von x gilt: $|\overline{H_nR_n}|(x) = \sqrt{-x^2 + 26x + 17{,}32}\,\text{cm}$. 2 P

B 4.6 Begründen Sie, weshalb es unter den Pyramiden $AP_nCQ_nR_n$ keine Pyramide $AP_3CQ_3R_3$ mit $\sphericalangle R_3CA = 15°$ gibt. 2 P

B 1.1 Gemäß den Angaben sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\begin{aligned} P(W) &= p\,\% &\Rightarrow\quad & P(B) = 100\,\% - p\,\% \\ P_W(F) &= 22\,\% &\Rightarrow\quad & P_W(KF) = 100\,\% - 22\,\% = 78\,\% \\ P_B(F) = 0{,}5 \cdot P_W(F) &= 11\,\% &\Rightarrow\quad & P_B(KF) = 100\,\% - 11\,\% = 89\,\% \end{aligned}$$

Damit kann nun das Baumdiagramm erstellt werden:



B 1.2 Wenn man die Pfadwahrscheinlichkeiten für W und dann F im Baumdiagramm multipliziert, muss dies dem gegebenen Wert von 14 % = 0,14 für eine weiße Flasche mit Fehler entsprechen:

$$\begin{aligned} & \frac{p}{100} \cdot 0{,}22 = 0{,}14 && \mid :0{,}22 \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{p}{100} = \frac{0{,}14}{0{,}22} && \mid \cdot 100 \\ \Longleftrightarrow\quad & p = \frac{14}{0{,}22} \\ \Longleftrightarrow\quad & p \approx 64 \end{aligned}$$

Der Anteil der weißen Flaschen liegt bei ungefähr $\underline{\underline{64\,\%}}$.

B 2.1 Der Wert der jährlichen Zunahme lässt sich an der Basis 1,07 ablesen zu $1{,}07 - 1 = 0{,}07$. Der vervollständigte Satz lautet also:
Claudia nimmt an, dass der Wert ihrer Aktien jährlich um $\underline{\underline{7}}$ Prozent zunimmt.

B 2.2 Zu diesem Zeitpunkt wären die Aktien seit $2066 - 2021 = 45$ Jahren in ihrem Besitz. Der Wert ergibt sich dann durch Einsetzen von $x = 45$ in die Funktion:

$$\begin{aligned} & y = 2000 \cdot 1{,}07^{45} \\ \Longleftrightarrow\quad & y = 42005 \end{aligned}$$

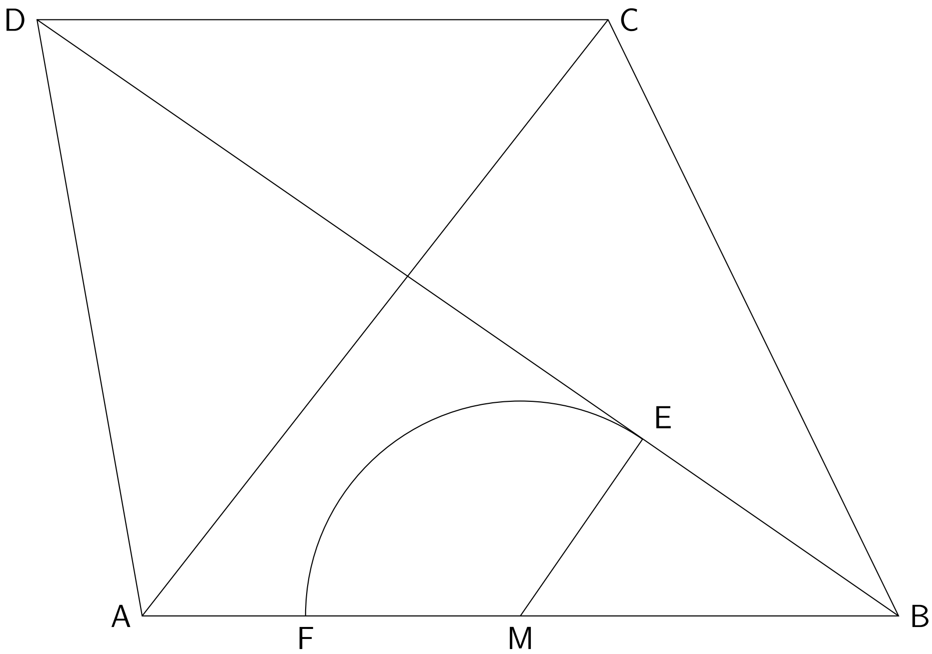
Nach der oben getroffenen Annahme wären die Aktien zu diesem Zeitpunkt $\underline{\underline{42005\,€}}$ wert.

B 2.3 Es ist gesucht, nach welcher Zeit sich das Anfangskapital (2000 €) verfünffacht hat (10000 €). Dafür wird die Funktionsgleichung diesem Wert gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} && y &= 10000 && \\ \Longleftrightarrow && 2000 \cdot 1{,}07^x &= 10000 && \mid : 2000 \\ \Longleftrightarrow && 1{,}07^x &= 5 && \mid \log_{1{,}07}(\,) \\ \Longleftrightarrow && x &\approx 23{,}79 && \end{aligned}$$

Da Claudia jeweils 21. Februar eine Mitteilung erhält, wird diese nach 24 Jahren erfolgen. Am $\underline{\underline{\text{21.02.2045}}}$ würde Claudia also erstmal davon erfahren, dass sich der Wert des Anfangskapitals verfünffacht hat.

B 3.1 Zeichnen des Vierecks ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$:

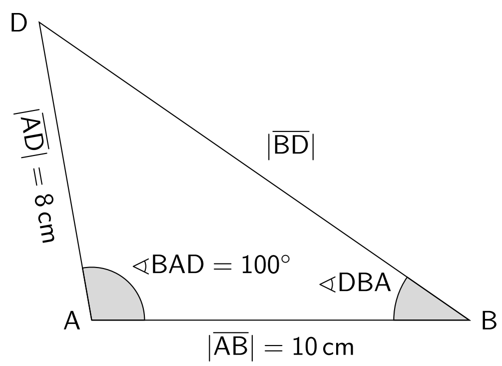


Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ ergibt sich mithilfe des Kosinussatz im Dreieck ABD (siehe Skizze):

$$\begin{aligned} && |\overline{BD}|^2 &= |\overline{AD}|^2 + |\overline{AB}|^2 - 2 \cdot |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos\sphericalangle BAD && \mid \sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow && |\overline{BD}| &= \sqrt{8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos(100^\circ)}\ \text{cm} && \\ \Longleftrightarrow && \underline{\underline{|\overline{BD}| \approx 13{,}85\,\text{cm}}} && && \end{aligned}$$

Damit kann ebenfalls im Dreieck ABD das Maß des Winkels DBA mithilfe des Sinussatz bestimmt werden:

$$\begin{aligned} && \frac{\sin\sphericalangle DBA}{|\overline{AD}|} &= \frac{\sin\sphericalangle BAD}{|\overline{BD}|} && \mid \cdot |\overline{AD}| \\ \Longleftrightarrow && \sin\sphericalangle DBA &= \frac{\sin(100^\circ)}{13{,}85} \cdot 8 && \\ \Rightarrow && \underline{\underline{\sphericalangle DBA \approx 34{,}67^\circ}} && && \end{aligned}$$

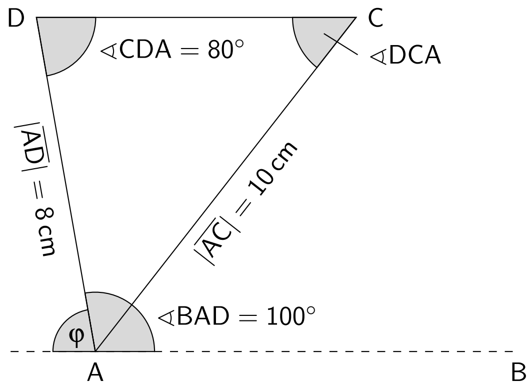


B 3.2 Das Maß des Winkels DCA wird im Dreieck ACD bestimmt. Dafür wird das Maß des Winkels CDA benötigt. Wie in der Skizze gezeigt, gilt an Punkt A:

$$\varphi + \sphericalangle BAD = 180^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 180^\circ - \sphericalangle BAD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Der Winkel CDA ist Wechselwinkel von φ an den paralleleln Geraden AB und CD, sodass $\sphericalangle CDA = \varphi = 80^\circ$ gilt. Damit gilt für den gesuchten Winkel mithilfe des Sinussatz:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \sphericalangle DCA}{|\overline{AD}|} &= \frac{\sin \sphericalangle CDA}{|\overline{AC}|} \qquad | \cdot |\overline{AD}| \\ \Longleftrightarrow \quad \sin \sphericalangle DCA &= \frac{\sin(80^\circ)}{10} \cdot 8 \\ \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sphericalangle DCA}} &\underline{\underline{\approx 51{,}98^\circ}} \end{aligned}$$



Die Winkel BAC und DCA sind ebenfalls Wechselwinkel den parallelen Geraden AB und CD, sodass das Maß der beiden Winkel gleich ist und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA = 51{,}98^\circ$ gilt.

B 3.3 Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte von Dreieck ABC und Dreieck ACD:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \sin \sphericalangle BAC + \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin \sphericalangle CAD$$

Der Winkel $\sphericalangle CAD$ ist Teil des Winkels $\sphericalangle BAD$, sodass gilt:

$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = 100^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle CAS = 100^\circ - \sphericalangle BAC = 100^\circ - 51{,}98^\circ = 48{,}02^\circ$$

Alle Größen können nun in die Berechnung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin(51{,}98^\circ) + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin(48{,}02^\circ)\right) \text{cm}^2 \\ &= \underline{\underline{69{,}12\,\text{cm}^2}} \end{aligned}$$

B 3.4 Zeichnen der Strecke $\overline{ME}$ und des Kreisbogen $\widehat{EF}$: siehe Teilaufgabe 3.1.

B 3.5 Der gesuchte Flächeninhalt A_{FBE} ergibt sich aus der Summe des Flächeninhalts A_{FME} der Figur FME und des Dreiecks A_{MBE}:

$$A_{FBE} = A_{FME} + A_{MBE} = |\overline{ME}|^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle FME}{360^\circ} + \frac{1}{2} \cdot |\overline{ME}| \cdot |\overline{MB}| \cdot \sin \sphericalangle BME$$

Zunächst können die Winkel bestimmt werden. Dabei wird verwendet, dass $\sphericalangle EBM = \sphericalangle DBA = 34{,}67^\circ$ ist. Außerdem ist $\sphericalangle MEB = 90^\circ$, da der Kreis um M die Strecke $\overline{BD}$ im Punkt E nur berührt. Für die Innenwinkelsumme im Dreieck MBE gilt (siehe Skizze):

PERFEKT VORBEREITET AUF DEN MSA 10. Klasse Bayern 2023

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen 2015 - 2022
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Ideal zur Vorbereitung auf einzelne Arbeiten während des Schuljahres
- ✓ Übersicht zu den einzelnen Prüfungsthemen mit Seitenangabe
- ✓ Digitalisierte Original-Prüfungen, Schritt für Schritt vorgerechnet

Mathe II/III - Trainer Realschule MSA 2023

DIGITALES COACHING

- ✓ Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- ✓ Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- ✓ Individuelles Online-Coaching
- ✓ Prüfungsvorbereitung Online
- ✓ Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

Bestell-Nr. :
EAN 9783743000988

ISBN 978-3-7430-0098-8

€ 13,90

9 783743 000988 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de