2023 Training

Abschlussprüfung

ActiveBook
Interaktives Training

MEHR ERFAHREN

Realschule Bayern

Mathematik I

+ *Basiswissen mit Übungen*
+ *Aufgaben im Stil der Prüfung*

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

Inhalt

Komplexe Aufgaben

Aufgaben im Stil der Prüfung

Original-Abschlussprüfung

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

ActiveBook Interaktives Training

Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet.

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autoren: Markus Hochholzer, Markus Schmidl

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es sich zudem bereits ab Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben eignet.

Mit dem Buch erhältst du:

- **Grundwissen 5. – 8. Klasse**
  Hier findest du wichtige Themen aus den früheren Schuljahren zur Wiederholung.
- **Grundwissen 9. Klasse und Grundwissen 10. Klasse**
  In diesen Kapiteln wird der prüfungsrelevante Stoff der 9. und der 10. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Zu jedem Themenbereich findest du zudem vielfältige Aufgaben. Diese eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. bzw. 10. Klasse als auch zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung.
  Die Aufgaben mit einem durchgestrichenen Taschenrechnersymbol eignen sich auch zur Bearbeitung ohne Taschenrechner.
- **Komplexe Aufgaben**
  Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die nach den Themenbereichen der Abschlussprüfung geordnet sind. Sie greifen auch auf das Grundwissen der vorhergehenden Jahrgangsstufen zurück, das für die Abschlussprüfung relevant ist.
- **Aufgaben im Stil der neuen Prüfung ab 2023**
  Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.
- **Original-Abschlussprüfung 2022**
  Obwohl sich die Abschlussprüfung 2023 von denen der Vorjahre unterscheidet, eignet sich die Abschlussprüfung 2022 dennoch dazu, unter Prüfungsbedingungen zu üben. Versuche, die Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. C0910TL)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden, und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!
Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Viel Erfolg in der Prüfung!

Markus Hochholzer   Markus Schmidl

2 Grundwissen 9. Klasse

2.1 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem erhält man durch Verknüpfung von zwei linearen Gleichungen mit den Unbekannten $x \in G_1$ (Grundmenge von x) und $y \in G_2$ (Grundmenge von y) durch **„und zugleich“**. Die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems beinhaltet alle Paare $(x\,|\,y)$ mit $x \in G_1$, $y \in G_2$, die **beide** Gleichungen **zugleich** erfüllen.

Grafisches Lösungsverfahren

Merke

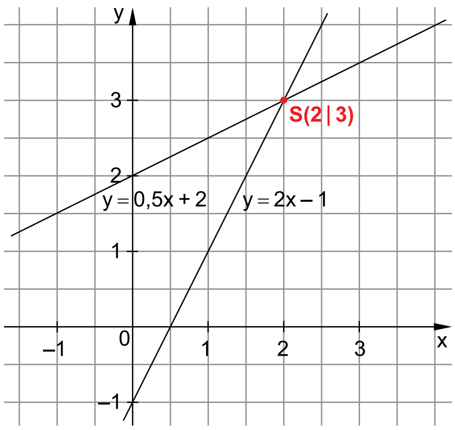
- Zeichne die beiden Geraden, die den Gleichungen des linearen Gleichungssystems entsprechen.
- Bestimme anhand der Zeichnung die Koordinaten des Schnittpunkts. Falls ein Schnittpunkt existiert, bilden dessen Koordinaten die Lösung.
- Mache die Probe durch Einsetzen.

Beispiel

Gesucht sind alle Paare $(x\,|\,y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, die folgende beide Gleichungen erfüllen.

$$\begin{array}{|ll} & y = 2x - 1 \\ \wedge & y = 0{,}5x + 2 \end{array}$$

Lösung:



Die Lösungsmenge jeder linearen Gleichung lässt sich als Gerade veranschaulichen. Die beiden gegebenen Gleichungen sind bereits in der Normalform $y = mx + t$ angegeben. Die zugehörigen Graphen lassen sich leicht einzeichnen.
Der Punkt $S(2\,|\,3)$ ist der einzige Punkt, der auf beiden Geraden zugleich liegt. Somit ist das Paar $(2\,|\,3)$ auch das einzige Paar, das beide Gleichungen erfüllt.

Schnittpunkt $S(2\,|\,3)$, also $x = 2$ und $y = 3$.

Probe:

$$\begin{array}{|lll} & \mathbf{3} = 2 \cdot \mathbf{2} - 1 & \text{(wahr)} \\ \wedge & \mathbf{3} = 0{,}5 \cdot \mathbf{2} + 2 & \text{(wahr)} \end{array}$$

Einsetzen der x- und der y-Koordinate von S in beide Gleichungen

Grundmengenbetrachtung:
$2 \in \mathbb{R}$, $3 \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{(2\,|\,3)\}$

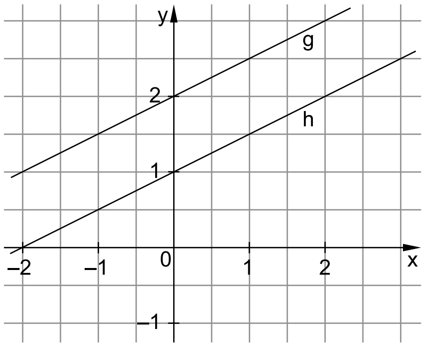
Obiges Gleichungssystem hat genau **eine** Lösung. Allgemein sind 3 Fälle möglich.

Merke

Ein lineares Gleichungssystem besitzt entweder **keine** Lösung, **eine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen.

Beispiele

1. Keine Lösung
(parallele, aber nicht identische Geraden)

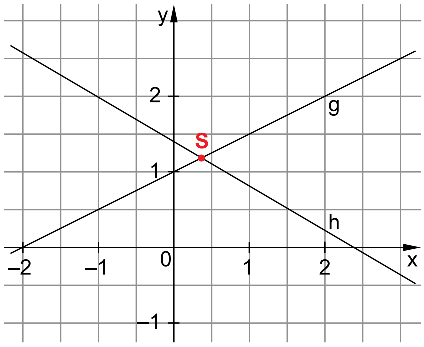


Nicht identische, parallele Geraden haben keine Punkte gemeinsam. Demnach gibt es auch kein Paar (x | y), das die beiden zugehörigen Gleichungen zugleich erfüllt.

$L = \emptyset$

$m_g = m_h \wedge t_g \neq t_h \Rightarrow$ **parallele Geraden ohne Schnittpunkt**

2. Genau eine Lösung
(sich schneidende Geraden)

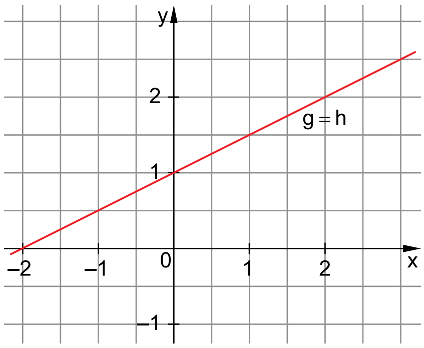


Geraden, die nicht parallel sind (unterschiedliche Steigung), schneiden sich in genau einem Punkt S. Es gibt deshalb genau eine Lösung.

$L = \{S\}$

$m_g \neq m_h \Rightarrow$ **sich schneidende Geraden mit genau einem Schnittpunkt**

3. Unendlich viele Lösungen
(identische Geraden)



Identische Geraden schneiden sich in unendlich vielen Punkten. Es gibt deshalb unendlich viele Lösungen. Alle Paare, die zur Lösungsmenge gehören, werden durch die Geradengleichung beschrieben:

$L = \{(x \mid y) \mid y = mx + t\}$

$m_g = m_h \wedge t_g = t_h \Rightarrow$ **identische Geraden mit unendlich vielen Schnittpunkten**

Aufgabe 43

Löse folgende Gleichungssysteme grafisch $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) $\left| \begin{array}{l} y = x - 2 \\ \wedge \; y = -2x + 1 \end{array} \right.$

b) $\left| \begin{array}{r} 2y + x = 4 \\ \wedge \; 2y = x \end{array} \right.$

Nach y auflösen! (Normalform)

Interaktive Aufgabe

1. Gleichungssystem grafisch lösen

Rechnerische Lösungsverfahren

Es gibt folgende Verfahren zur rechnerischen Lösung linearer Gleichungssysteme:
Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren
Ziel der Verfahren ist es, durch Umformung eine Gleichung zu erhalten, die nur noch eine Unbekannte enthält.

Merke

Gleichsetzungsverfahren
- Löse beide Gleichungen nach der Variablen y auf.
- Setze die beiden Rechtsterme gleich.
- Löse nach x auf.
- Setze x in eine der beiden Gleichungen ein und bestimme y.

(Das Verfahren funktioniert analog, wenn man die Rollen von x und y vertauscht.)
Tipp: Günstiges Verfahren, wenn beide Gleichungen bereits nach der gleichen Variablen aufgelöst sind.

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(x, y \in \mathbb{R})$.

$$\left|\begin{array}{ll} & y+1=2x \\ \wedge & y=0{,}5x+2 \end{array}\right.$$

Lösung:

$$\left|\begin{array}{ll} & y+1=2x \\ \wedge & y=0{,}5x+2 \end{array}\right. \quad \left| -1 \right.$$

Löse Gleichung I nach y auf.

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & y=2x-1 \\ \wedge & y=0{,}5x+2 \end{array}\right.$$

Setze die beiden Rechtsterme gleich.

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & 2x-1=0{,}5x+2 \quad (\mathrm{I}=\mathrm{II}) \\ \wedge & y=0{,}5x+2 \end{array}\right. \quad \left| -0{,}5x+1 \right.$$

Gleichung I enthält jetzt nur noch die Variable x, nach der nun aufgelöst wird.

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & 1{,}5x=3 \\ \wedge & y=0{,}5x+2 \end{array}\right. \quad \left| :1{,}5 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & x=2 \\ \wedge & y=0{,}5x+2 \end{array}\right.$$

Berechne y durch Einsetzen von $x=2$ in Gleichung II.

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & x=2 \\ \wedge & y=0{,}5\cdot 2+2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & x=2 \\ \wedge & y=3 \end{array}\right.$$

$L=\{(2|3)\}$

Angabe der Lösungsmenge

Aufgabe 44
a – c

Löse folgende Gleichungssysteme mit dem Gleichsetzungsverfahren $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) $\left|\begin{array}{ll} & y=x-2 \\ \wedge & y=-2x+1 \end{array}\right.$

b) $\left|\begin{array}{ll} & x=3-y \\ \wedge & x=4+2y \end{array}\right.$

c) $\left|\begin{array}{ll} & 4x=3y-7 \\ \wedge & 4x=3y-2 \end{array}\right.$

d) $\left|\begin{array}{ll} & 0{,}4x-5{,}2y=1{,}4 \\ \wedge & 2{,}1x=2{,}52+3{,}15y \end{array}\right.$

Interaktive Aufgabe

2. Gleichsetzungsverfahren

2.9 Grundbegriffe der Statistik

Spannweite, Modalwert, arithmetisches Mittel, Zentralwert

Merke

Spannweite:	**Differenz** aus **Maximum** (größter Wert) und **Minimum** (kleinster Wert) der Datenreihe
Modalwert:	Wert, der in der Datenreihe am **häufigsten** vorkommt
Arithmetisches Mittel:	Wird berechnet, indem man die **Einzelwerte addiert** und das Ergebnis durch die **Anzahl der Einzelwerte dividiert**
Zentralwert (Median):	Bei **ungerader Anzahl** von Werten: Wert, der in der **Mitte** steht, wenn die Daten der **Größe nach geordnet** werden Bei **gerader Anzahl** von Werten: **Arithmetisches Mittel** der beiden Werte, die in der **Mitte** stehen, wenn die Daten der **Größe nach geordnet** werden

Beispiel

In einer Umfrage soll ermittelt werden, wie lange Jugendliche täglich ihr Smartphone nutzen. Dazu wurden 12 Jugendliche befragt. Die Antworten wurden dabei auf ganze Stunden gerundet.

Datenreihe:

5 4 1 $\underline{\mathbf{2}}$ **0** $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{2}}$ 5 **6** 4 $\underline{\mathbf{2}}$

Minimum: $\mathbf{Min = 0}$ 0 ist der kleinste Wert.

Maximum: $\mathbf{Max = 6}$ 6 ist der größte Wert.

Spannweite: $\mathbf{R} = \text{Max} - \text{Min} = 6 - 0 = \mathbf{6}$ Die Differenz liefert die Spannweite.

Modalwert: $\mathbf{m = 2}$ $\underline{2}$ kommt am häufigsten vor (4 Mal).

Arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{5+4+1+2+0+2+3+2+5+6+4+2}{12}$$

$$= \frac{36}{12} = \mathbf{3}$$ gerundet

Geordnete Datenreihe:

0 1 2 2 2 **2** **3** 4 4 5 5 6

Zentralwert: $\mathbf{z} = \frac{2+3}{2} = \mathbf{2{,}5}$ 2 und 3 stehen in der Mitte der geordneten Datenreihe.

Man kann diese Ergebnisse aber nicht auf das Verhalten aller Jugendlichen verallgemeinern, da zu wenige befragt wurden. Man sagt: Die Stichprobe war **nicht repräsentativ**.

Merke

Eine **repräsentative Stichprobe** soll folgende Merkmale erfüllen:
1. Eine Stichprobe muss die Zusammensetzung der **Gesamtheit widerspiegeln**.
2. Die Stichprobe muss **zufällig** ausgewählt sein.
3. Der Stichprobenumfang darf **nicht zu klein** sein.

Aufgaben

147 Es wurden 7 Kinder im Alter von 3 Jahren gewogen. Die Ergebnisse waren:

13 kg 16 kg 9 kg 13 kg 12 kg 11 kg 10 kg

a) Gib Maximum, Minimum, Spannweite, Modalwert, Zentralwert (Median) sowie das arithmetische Mittel an.

b) Lassen sich diese Erkenntnisse auf alle Kinder im Alter von 3 Jahren übertragen? Entscheide begründet.

148

a) Das arithmetische Mittel einer Datenreihe aus 10 Werten beträgt 5,5. Gib ein Beispiel einer solchen Reihe an.

b) Der Modalwert einer Datenreihe aus 10 Werten ist 5. Gib ein Beispiel einer solchen Reihe an.

c) Die Spannweite einer Datenreihe aus 7 Werten ist 63. Gib ein Beispiel einer solchen Reihe an.

d) Der Zentralwert einer Datenreihe aus 9 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 25. Gib ein Beispiel einer solchen Reihe an.

149 Ein in Deutschland geborener Mann wird heute im Durchschnitt 78,6 Jahre alt. Die deutschen Männer liegen im Ranking der durchschnittlichen Lebenserwartung auf Platz 28. In den folgenden Tabellen sind jeweils 9 Länder mit hoher bzw. niedriger Lebenserwartung aufgeführt.

Tabelle A

Land	Lebenserwartung Männer
Hongkong	82,2 Jahre
Schweiz	81,9 Jahre
Japan	81,4 Jahre
Singapur	81,4 Jahre
Macau	81,3 Jahre
Schweden	81,3 Jahre
Norwegen	81,2 Jahre
Italien	81,1 Jahre
Island	81,0 Jahre

Tabelle B

Land	Lebenserwartung Männer
Kongo (Dem. Rep.)	59,1 Jahre
Mali	58,5 Jahre
Angola	58,4 Jahre
Kamerun	58,0 Jahre
Äquatorialguinea	57,7 Jahre
Elfenbeinküste	56,6 Jahre
Somalia	55,7 Jahre
Nigeria	53,8 Jahre
Tschad	52,8 Jahre

nach: Lebenserwartung für Männer und Frauen, www.laenderdaten.info/lebenserwartung.php

Bestimme zu jeder Tabelle das arithmetische Mittel. Ermittle anschließend die Spannweite der aufgeführten 18 Länder.

150 Ein 100-m-Läufer trainiert und läuft dreimal die 100 m. Dabei erreicht er folgende Zeiten: in Sekunden:

Lauf	1. Lauf	2. Lauf	3. Lauf	4. Lauf
Zeit in s	10,35	10,16	9,84	x

Ermittle, welche Zeit er im 4. Lauf erreichen muss, damit seine Durchschnittszeit 10 s beträgt.

Interaktive Aufgabe

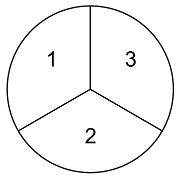
1. Schulmeisterschaft
2. Konzert
3. Eintrittspreise

Musterprüfung
Bayern – Realschule – Mathematik I

Teil A – ohne Taschenrechner

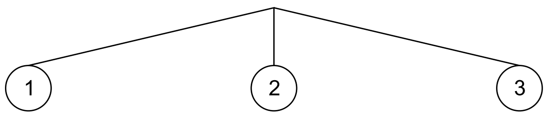
Aufgabe A 1

A 1.0 Ein Glücksrad besteht aus drei kongruenten Sektoren, die mit den Zahlen von 1 bis 3 beschriftet sind. Es wird dreimal am Glücksrad gedreht.



1 Punkt — A 1.1 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau dreimal die Zahl 1 gedreht wird.

2 Punkte — A 1.2 Ergänzen Sie das Baumdiagramm mit allen Pfaden, die sich von der Zahl 2 aus ergeben.



2 Punkte — A 1.3 Man erhält einen Gewinn, wenn man bei den drei Drehungen Zahlen erhält, deren Summenwert genau 8 ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man diesen Gewinn erhält.

Aufgabe A 2

A 2.0 Gegeben sind Fünfecke $A_nB_nSD_nE_n$ mit $\overline{A_nE_n} \parallel \overline{B_nS}$. Der Punkt C ist der Fußpunkt der Lote von den Punkten D_n auf die Strecken $\overline{B_nS}$.

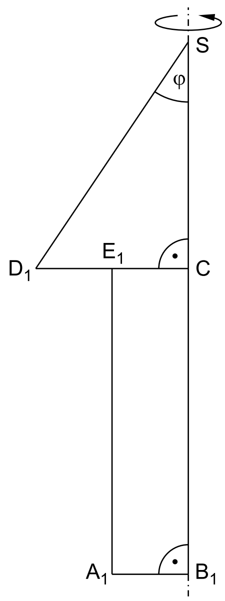
Die Punkte E_n sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CD_n}$.

Die Winkel D_nSC haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]0°; 90°[$.

Es gilt:

$\left|\overline{CS}\right| = 3\text{ cm};\ \left|\overline{CB_n}\right| = 2 \cdot \left|\overline{CD_n}\right|;\ \sphericalangle CB_nA_n = 90°$.

Die Zeichnung zeigt das Fünfeck $A_1B_1SD_1E_1$ für $\varphi = 34°$.



1 Punkt — A 2.1 Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $\overline{CD_n}$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$\left|\overline{CD_n}\right|(\varphi) = 3 \cdot \tan\varphi \text{ cm}$.

3 Punkte — A 2.2 Die Fünfecke $A_nB_nSD_nE_n$ rotieren um die Achse B_nS.

Berechnen Sie das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ.