Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Baden-Württemberg

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analysis

Analytische Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur im Leistungsfach benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im hilfsmittelfreien Teil abgefragt. Durch den klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:
- Abitur-Training Analysis
- Abitur-Training Analytische Geometrie
- Abitur-Training Stochastik

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre und weitere Übungsaufgaben für die Prüfung mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg – Mathematik Leistungsfach“.

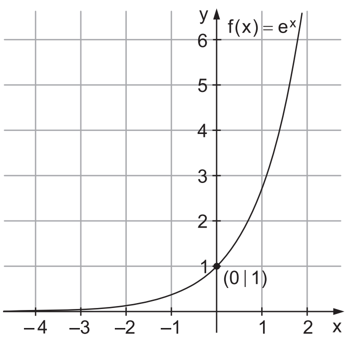
2.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

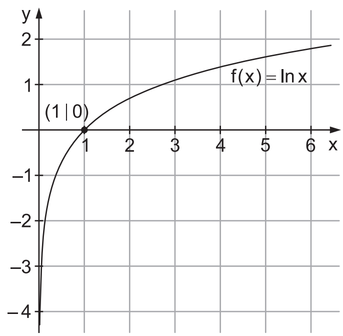
Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f(x) = e^x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$ ($e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ($y = 0$ ist waagerechte Asymptote) $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Natürliche Logarithmusfunktion

- Die natürliche Logarithmusfunktion lautet $f(x) = \ln x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Die ln-Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ($x = 0$ ist senkrechte Asymptote) $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$





Die natürliche Exponential- und die natürliche Logarithmusfunktion sind Umkehrfunktionen voneinander (vgl. Abschnitt 2.9).

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

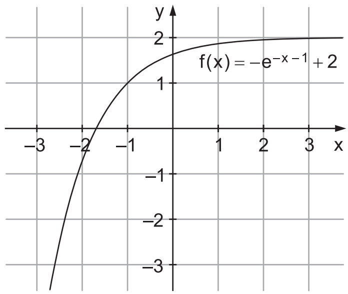
$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1) \cdot e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -e^{-x-1} + 2;\ x \in \mathbb{R}$.

Ausgehend vom Graphen oben (vgl. auch Abschnitt 2.6):

- Verschiebung um +1 in x-Richtung (nach rechts)
- Spiegelung an der y-Achse
- Spiegelung an der x-Achse
- Verschiebung um +2 in y-Richtung (nach oben)
- Waagerechte Asymptote $y = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x-1} + 2) = 2$



Exponentialfunktionen finden insbesondere bei Wachstumsvorgängen eine Anwendung; exponentielles Wachstum liegt vor, wenn sich ein Bestand im jeweils gleichen Zeitraum immer um denselben Faktor vervielfacht.

Dabei kann die Basis auch eine andere Zahl sein, man spricht dann von allgemeinen Exponentialfunktionen der Form:

$f(x) = c \cdot a^x + d$

2.5 Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion f ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen u und v:

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners } v(x)\}$

Nullstellen des Nenners v(x) sind Definitionslücken und *mögliche* Polstellen der Funktion f.
Nullstellen des Zählers u(x) sind *mögliche* Nullstellen der Funktion f.

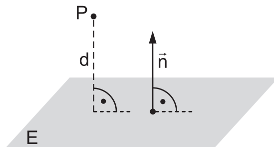
Eine Nullstelle des Zählers ist nur dann Nullstelle der Funktion f, wenn sie nicht zugleich Nullstelle des Nenners ist.

5 Abstände zwischen geometrischen Objekten

5.1 Abstand zu einer Ebene

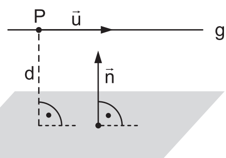
Abstand Punkt – Ebene
Der Abstand des Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$ zur Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ kann mithilfe der HNF von E ermittelt werden (vgl. Abschnitt 3.5):

$$d(P; E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - a|}{|\vec{n}|}$$

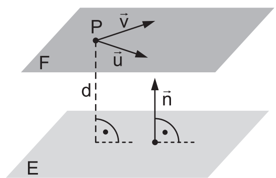


Die Berechnung des Abstands einer Geraden zu einer parallel verlaufenden Ebene bzw. zweier paralleler Ebenen lässt sich jeweils zurückführen auf die Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene.

Abstand Gerade – Ebene
Der Abstand einer zur Ebene E parallel verlaufenden Geraden g zur Ebene E entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden zur Ebene:
$d(g; E) = d(P; E)$ mit $P \in g$ beliebig



Abstand Ebene – Ebene
Der Abstand einer zur Ebene E parallel verlaufenden Ebene F zur Ebene E entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes P der Ebene F zur Ebene E:
$d(F; E) = d(P; E)$ mit $P \in F$ beliebig



Berechnen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen

$$E_1\colon -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -9 \text{ und } E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Der Abstand der parallelen Ebenen entspricht dem Abstand des Stützpunktes $P(1|2|4)$ der Ebene E_2 zur Ebene E_1:

$$d(E_2; E_1) = d(P; E_1) = \frac{|-2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 9|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$$

5.2 Abstand eines Punktes zu einer Geraden

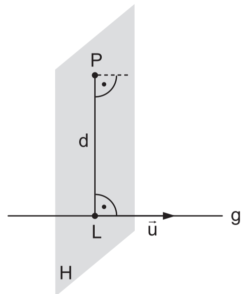
Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g entspricht der Länge des Lotes, das von P auf die Gerade gefällt wird. Zur Bestimmung dieses Abstands ermittelt man den Lotfußpunkt.

Vorgehensweise 1

Schritt 1: Gleichung einer Hilfsebene H aufstellen, die den Punkt P enthält und senkrecht auf der Geraden g steht
H: $\vec{u} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OP}) = 0$

Schritt 2: Lotfußpunkt L als Schnittpunkt von g und H berechnen

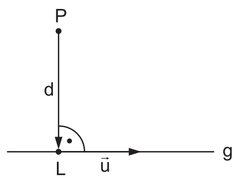
Schritt 3: Abstand von P zu g als Abstand von P zu L berechnen (Länge des Lotes)
$d(P; g) = d(P; L) = |\overrightarrow{PL}|$



Vorgehensweise 2

Schritt 1: Verbindungsvektor $\overrightarrow{PL}$ aufstellen, wobei L zunächst ein allgemeiner Geradenpunkt von g ist (in Abhängigkeit von r)

Schritt 2: Parameter r aus der Bedingung $\overrightarrow{PL} \circ \vec{u} = 0$ bestimmen und Koordinaten des Lotfußpunktes L durch Einsetzen von r in die Gleichung von g berechnen



Schritt 3: Abstand von P zu g als Abstand von P zu L berechnen
$d(P; g) = d(P; L) = |\overrightarrow{PL}|$ (Länge des Lotes)

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(–6|2|5) zur Geraden
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

Vorgehensweise 1

Schritt 1:

$$H: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad H: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -11$$

3 Zufallsgrößen

3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zufallsgröße die möglichen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise
Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.
Schritt 1:
Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2$
Schritt 2:
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 64) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6"}) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$$

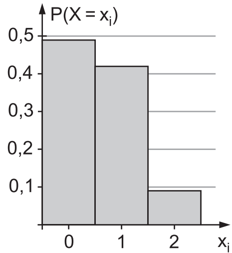
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



3.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$\mathrm{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$

$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert μ einer Zufallsgröße X ist häufig kein Wert, den die Zufallsgröße tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.

Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

Szenario B

Note y	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	0,2	0,25	0,25	0,05	0,15	0,1

Erwartungswert (Notendurchschnitt) bei beiden Szenarien:

$E(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}15+3\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}2+5\cdot 0+6\cdot 0{,}05=3$

$E(Y)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}25+3\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}05+5\cdot 0{,}15+6\cdot 0{,}1=3$

In beiden Fällen ergäbe sich derselbe Notendurchschnitt.

Varianz/Streuung um den Notendurchschnitt:

$$\begin{aligned}Var(X)&=(1-3)^2\cdot 0{,}1+(2-3)^2\cdot 0{,}15+(3-3)^2\cdot 0{,}5+(4-3)^2\cdot 0{,}2\\&\quad+(5-3)^2\cdot 0+(6-3)^2\cdot 0{,}05=1{,}2\end{aligned}$$

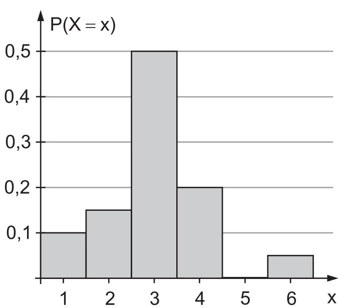
$$\begin{aligned}Var(Y)&=(1-3)^2\cdot 0{,}2+(2-3)^2\cdot 0{,}25+(3-3)^2\cdot 0{,}25+(4-3)^2\cdot 0{,}05\\&\quad+(5-3)^2\cdot 0{,}15+(6-3)^2\cdot 0{,}1=2{,}6\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad Var(X) < Var(Y)$

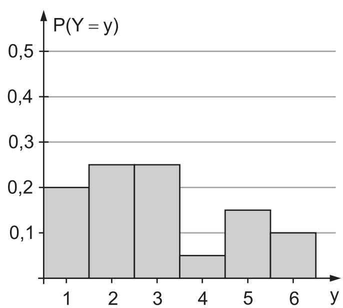
Die Streuung der Noten um den Notendurchschnitt wäre bei Szenario B größer als bei Szenario A.

Dies wird auch an den Histogrammen deutlich:

Szenario A



Szenario B



Szenario A: Sehr gute und sehr schlechte Noten treten selten auf.
$\Rightarrow$ Die Noten streuen nur wenig um den Erwartungswert.

Szenario B: Die Noten sind recht gleichmäßig verteilt.
$\Rightarrow$ Die Noten streuen stark um den Erwartungswert.