

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung mit Bemerkungen zur historischen Entwicklung</b>	1
1.1 Das Potential des Schwerefeldes .....	2
1.2 Die Laplacegleichung und die Poissonsgleichung .....	4
1.3 Das Neumannsche und das Dirichletsche Randwertproblem ...	7
1.4 Das Dirichletsche Randwertproblem im 19. Jahrhundert .....	10
<b>2 Die Laplacegleichung .....</b>	19
2.1 Harmonische Funktionen und Mittelwerteigenschaft .....	19
2.2 Liouville- und Harnackeigenschaft .....	28
2.3 Das Maximum-Minimumprinzip .....	31
2.4 Analytizität .....	35
2.5 Erweiterung: Helmholtzsche Schwingungsgleichung .....	39
2.6 Ausblick: Elliptische Gleichungen 2. Ordnung .....	43
2.7 Exkurs: Eindeutige Fortsetzbarkeit .....	47
Aufgaben .....	53
<b>3 Das Dirichletproblem für harmonische Funktionen .....</b>	59
3.1 Einführung: Eindeutigkeit, Stabilität und der Fall der Kreisscheibe .....	59
3.2 Die Poissonsche Integralformel löst das Dirichletproblem für die Kugel .....	63
3.3 Superharmonische Funktionen und die Perronsche Lösungsmethode für beschränktes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ .....	67
3.4 Über den lokalen Charakter der Barrierenforderung. Kriterien.	75
3.5 Behebbare Singularitäten. Dirichletprobleme ohne Lösung....	78
3.6 Unbeschränkte Gebiete .....	82
3.7 Der Satz von Giesecke. Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip.	92
Aufgaben .....	97

<b>4 Die Poissons-Gleichung <math>-\Delta u = f</math></b> .....	103
4.1 Orientierende Bemerkungen zum Newtonpotential .....	103
4.2 Differenzierbarkeitseigenschaften des Newtonpotentials und Lösung des Dirichletproblems .....	107
4.3 Petrinis Gegenbeispiel .....	115
4.4 Die Greensche Funktion zum Dirichletproblem .....	118
4.5 Die Symmetrie der Greenschen Funktion .....	123
4.6 Abschätzungen für die Ableitungen der Greenschen Funktion ..	126
4.7 Das Newtonpotential verallgemeinernde singuläre Integrale ..	134
4.8 Das Dirichletproblem für $-\Delta u = f$ bei am Rand unbeschränktem $f$ .....	142
4.9 Erweiterung: Die Greensche Funktion für $-\Delta + 1$ .....	147
Aufgaben .....	161
<b>5 Die Greensche Funktion für die Kugel mit Anwendungen</b> ..	165
5.1 Die Greensche Funktion für den Halbraum, die Kugel und ihr Äußeres .....	165
5.2 Einschub: Harmonische Funktionen mit einer isolierten Singularität .....	170
5.3 Die 2. Ableitungen des Greenpotentials für die Kugel .....	172
5.4 Eine erste Anwendung: Die lokale Lösbarkeit des Beltrami-Systems .....	184
5.5 Das Dirichletproblem für die Kugel bei kleiner Abweichung des Hauptteils vom Laplaceoperator .....	191
5.6 Die Methode von Leray und Schauder am Beispiel des semilinearen Dirichletproblems in der Kugel .....	197
Aufgaben .....	202
<b>6 Die Fredholmsche Alternative für das Dirichletproblem</b> ..	207
6.1 Die Sätze von Fredholm und ihre Verallgemeinerung. Resolvente und Spektrum .....	207
6.2 Das Dirichletproblem für $(-\Delta + a - \lambda)u = f$ .....	211
6.3 Die Gleichung $-\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i u_{x_i} + (a - \lambda)u = f$ mit am Rand unbeschränkten $a$ und $f$ .....	224
Aufgaben .....	230
<b>7 Der Kelloggsche Satz</b> .....	233
7.1 Vorbereitungen .....	234
7.2 Umformulierung und Beweis des Kelloggschen Satzes .....	246
7.3 Zwei A-Priori-Ungleichungen im Gefolge des Kelloggschen Satzes .....	252
Aufgaben .....	260

<b>8 Die globale A-Priori-Abschätzung von Schauder und ihre Anwendung auf lineare und quasilineare Dirichletprobleme</b>	263
8.1 Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten . . . . .	264
8.2 Variable Koeffizienten . . . . .	267
8.3 Die Kontinuitätsmethode zur Lösung des allgemeinen linearen Dirichletproblems in $\overline{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ . Die Fredholmsche Alternative. . . . .	272
8.4 Ausblick: Das Dirichletproblem für die quasilineare elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung nach der Methode von Leray-Schauder . . . . .	277
Aufgaben . . . . .	279
<b>9 Innere Abschätzungen und innere Regularität</b> . . . . .	281
9.1 Eine innere A-Priori-Abschätzung und ihre Anwendung . . . . .	281
9.2 Innere Regularität von $C^2$ -Lösungen linearer und quasilinearer elliptischer Gleichungen nach E. Hopf . . . . .	287
Aufgaben . . . . .	298
<b>10 Schwache Lösungen</b> . . . . .	299
10.1 Bemerkungen zur historischen Entwicklung . . . . .	299
10.2 Existenz schwacher Lösungen . . . . .	304
10.3 Innere Regularität schwacher Lösungen . . . . .	318
10.4 Randregularität für Lösungen verallgemeinerter Dirichletprobleme . . . . .	328
10.5 Rechtfertigung des Dirichletschen Prinzips . . . . .	332
Aufgaben . . . . .	337
<b>A Partielle Integration. Glättungsoperatoren</b> . . . . .	343
<b>B Integration über Sphären</b> . . . . .	355
<b>C Hölderstetigkeit</b> . . . . .	363
<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	371
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	375
<b>Personenverzeichnis</b> . . . . .	395
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	399