

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung mit Bemerkungen zur historischen Entwicklung	1
1.1	Das Potential des Schwerefeldes	2
1.2	Die Laplacegleichung und die Poissongleichung	4
1.3	Das Neumannsche und das Dirichletsche Randwertproblem	7
1.4	Das Dirichletsche Randwertproblem im 19. Jahrhundert	10
2	Die Laplacegleichung	19
2.1	Harmonische Funktionen und Mittelwerteigenschaft	19
2.2	Liouville- und Harnackeigenschaft	28
2.3	Das Maximum-Minimumprinzip	31
2.4	Analytizität	35
2.5	Erweiterung: Helmholtzsche Schwingungsgleichung	39
2.6	Ausblick: Elliptische Gleichungen 2. Ordnung	43
2.7	Exkurs: Eindeutige Fortsetzbarkeit	47
	Aufgaben	53
3	Das Dirichletproblem für harmonische Funktionen	59
3.1	Einführung: Eindeutigkeit, Stabilität und der Fall der Kreisscheibe	59
3.2	Die Poissonsche Integralformel löst das Dirichletproblem für die Kugel.	63
3.3	Superharmonische Funktionen und die Perronsche Lösungsmethode für beschränktes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$	67
3.4	Über den lokalen Charakter der Barrierenforderung. Kriterien.	75
3.5	Behebbarer Singularitäten. Dirichletprobleme ohne Lösung.	78
3.6	Unbeschränkte Gebiete	82
3.7	Der Satz von Giesecke. Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip.	92
	Aufgaben	97

4	Die Poissongleichung $-\Delta u = f$	103
4.1	Orientierende Bemerkungen zum Newtonpotential	103
4.2	Differenzierbarkeitseigenschaften des Newtonpotentials und Lösung des Dirichletproblems	107
4.3	Petrinis Gegenbeispiel	115
4.4	Die Greensche Funktion zum Dirichletproblem	118
4.5	Die Symmetrie der Greenschen Funktion	123
4.6	Abschätzungen für die Ableitungen der Greenschen Funktion	126
4.7	Das Newtonpotential verallgemeinernde singuläre Integrale	134
4.8	Das Dirichletproblem für $-\Delta u = f$ bei am Rand unbeschränktem f	142
4.9	Erweiterung: Die Greensche Funktion für $-\Delta + 1$	147
	Aufgaben	161
5	Die Greensche Funktion für die Kugel mit Anwendungen	165
5.1	Die Greensche Funktion für den Halbraum, die Kugel und ihr Äußeres	165
5.2	Einschub: Harmonische Funktionen mit einer isolierten Singularität	170
5.3	Die 2. Ableitungen des Greenpotentials für die Kugel	172
5.4	Eine erste Anwendung: Die lokale Lösbarkeit des Beltrami-Systems	184
5.5	Das Dirichletproblem für die Kugel bei kleiner Abweichung des Hauptteils vom Laplaceoperator	191
5.6	Die Methode von Leray und Schauder am Beispiel des semilinearen Dirichletproblems in der Kugel	197
	Aufgaben	202
6	Die Fredholmsche Alternative für das Dirichletproblem	207
6.1	Die Sätze von Fredholm und ihre Verallgemeinerung. Resolvente und Spektrum.	207
6.2	Das Dirichletproblem für $(-\Delta + a - \lambda)u = f$	211
6.3	Die Gleichung $-\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i u_{x_i} + (a - \lambda)u = f$ mit am Rand unbeschränkten a und f	224
	Aufgaben	230
7	Der Kelloggsche Satz	233
7.1	Vorbereitungen	234
7.2	Umformulierung und Beweis des Kelloggschen Satzes	246
7.3	Zwei A-Priori-Ungleichungen im Gefolge des Kelloggschen Satzes	252
	Aufgaben	260

8	Die globale A-Priori-Abschätzung von Schauder und ihre Anwendung auf lineare und quasilineare Dirichletprobleme	263
8.1	Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten	264
8.2	Variable Koeffizienten	267
8.3	Die Kontinuitätsmethode zur Lösung des allgemeinen linearen Dirichletproblems in $\overline{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. Die Fredholmsche Alternative.....	272
8.4	Ausblick: Das Dirichletproblem für die quasilineare elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung nach der Methode von Leray-Schauder	277
	Aufgaben	279
9	Innere Abschätzungen und innere Regularität	281
9.1	Eine innere A-Priori-Abschätzung und ihre Anwendung	281
9.2	Innere Regularität von C^2 -Lösungen linearer und quasilinear elliptischer Gleichungen nach E. Hopf	287
	Aufgaben	298
10	Schwache Lösungen	299
10.1	Bemerkungen zur historischen Entwicklung	299
10.2	Existenz schwacher Lösungen	304
10.3	Innere Regularität schwacher Lösungen	318
10.4	Randregularität für Lösungen verallgemeinerter Dirichletprobleme	328
10.5	Rechtfertigung des Dirichletschen Prinzips	332
	Aufgaben	337
A	Partielle Integration. Glättungsoperatoren.	343
B	Integration über Sphären	355
C	Hölderstetigkeit	363
	Symbolverzeichnis	371
	Literaturverzeichnis	375
	Personenverzeichnis	395
	Sachverzeichnis	399