

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	11
1. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung	13
1.1 Mengentheoretischer Ereigniskalkül	13
1.2 Ereignisfelder	20
1.3 Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsalgebra	22
1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	28
1.5 Stochastische unabhängige Ereignisse	31
1.6 Bemessung von Wahrscheinlichkeiten	32
1.61 Endliche Gleichmöglichkeitsmodelle	33
1.62 Statistische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten	35
1.63* Geometrische Wahrscheinlichkeiten	36
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise I	38
2. Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilungen	43
2.1 Verteilungen einer Zufallsveränderlichen	45
2.11 Verteilungen einer Zufallsvariablen	45
2.12 Verteilungen einer stetigen Zufallsvariablen	51
2.13 Formale Eigenschaften von Verteilungsfunktionen	57
2.14 Typische Formen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	57
2.15 Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Modelle empirischer Häufigkeitsverteilungen	58
2.2 Erwartungswert, Varianz und Schwankungsintervalle von Zufallsvariablen	60
2.21 Erwartungswert und Varianz	61
2.22 Schwankungsintervalle	65
2.3 Die Normalverteilung	67
2.4 Verallgemeinerung des Erwartungswertes	72
2.41 Eigenschaften von Erwartungswerten	73
2.42* Momente	73
2.43* Momente erzeugende Funktionen	75
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise II	78
3. Verteilung der Häufigkeiten von Merkmalsausprägungen in einfachen Stichproben	82
3.1 Einfache Stichproben	82
3.2 Die binomische Verteilung	85
3.3 Die hypergeometrische Verteilung	90
3.4 Approximationen der binomischen und der hypergeometrischen Verteilung	95
3.41 Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die binomische Verteilung	95
3.42 Approximation der binomischen Verteilung durch die Normalverteilung	97
3.43 Approximation der binomischen Verteilung durch die Poisson-Verteilung	99
3.44 Zusammenfassung	101

3.5 Gemeinsame Verteilung der Häufigkeiten mehrerer Merkmalsausprägungen in einfachen Stichproben . . . . .	103
3.51 Die multinomische Verteilung . . . . .	103
3.52 Die k-dimensionale hypergeometrische Verteilung . . . . .	104
3.53 Hinweise auf Approximationen . . . . .	106
3.54 Empirische Häufigkeitsverteilung als Realisationen von einfachen Stichproben . . . . .	106
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise III . . . . .	107
 4. Mehrdimensionale Verteilungen, Stichprobenfunktionen und Gesetze der Großen Zahlen . . . . .	110
4.1 Zweidimensionale Zufallsvariable . . . . .	110
4.11 Diskrete zweidimensionale Zufallsvariable . . . . .	111
4.12 Stetige zweidimensionale Zufallsvariable . . . . .	113
4.13 Gemeinsame Verteilungsfunktion zweidimensionaler Zufallsvariablen . . . . .	115
4.14 Eigenschaften zweidimensionaler Verteilungen . . . . .	116
4.15 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable . . . . .	117
4.16 Erwartungswerte und Momente der gemeinsamen Verteilung und der Randverteilung . . . . .	119
4.17 Erwartungswert und Varianz einer Summe von Zufallsvariablen . . . . .	121
4.2 Beispiel einer Stichprobenfunktion: Das Stichprobenmittel und seine Verteilung . . . . .	123
4.3 Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels stochastisch unabhängiger Stichprobenvariablen . . . . .	127
4.4 Gesetze der Großen Zahlen . . . . .	131
4.41 Das schwache Gesetz der großen Zahlen . . . . .	132
4.42* Das starke Gesetz der großen Zahlen . . . . .	134
4.5 Der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	137
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise IV . . . . .	142
 5. Punktschätzung von Parametern . . . . .	146
5.1 Eigenschaften von Schätzfunktionen . . . . .	147
5.2 Methoden der Punktschätzung von Parametern . . . . .	152
5.21 Methode der Momente . . . . .	152
5.22 Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	153
5.23 Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	161
5.24 Ergänzende Hinweise . . . . .	164
5.3 Punktschätzung bei einfachen Stichproben . . . . .	166
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise V . . . . .	169
 6. Intervallschätzung . . . . .	174
6.1 Konstruktion eines speziellen Konfidenzintervalls . . . . .	175
6.2 Konfidenzintervalle bei normalverteilten Schätzern . . . . .	177
6.3 Ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion von Konfidenzintervallen . . . . .	183
6.4 Verteilungsfreie Konfidenzintervalle für Quantile . . . . .	186
6.5 Toleranzintervalle . . . . .	189
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise VI . . . . .	192

7. Prüfen statistischer Hypothesen . . . . .	195
7.1 Bemerkungen zur statistischen Testtheorie . . . . .	195
7.11 Das Problem von Fehlentscheidungen . . . . .	198
7.12 Die Güte eines statistischen Testes . . . . .	203
7.13 Arten statistischer Tests . . . . .	206
7.2 Allgemeine Definition eines statistischen Testes . . . . .	208
7.3 Beste kritische Bereiche für alternative Parameterhypothesen . . . . .	210
7.31 Das Fundamentale Lemma der Testtheorie . . . . .	211
7.32* Beweis des Fundamentallemmas . . . . .	217
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise VII . . . . .	219
8. Signifikanztests . . . . .	221
8.1 Aus normalverteilten Schätzern abgeleitete Prüfmaße . . . . .	221
8.2 Approximativ normalverteilte Prüfmaße . . . . .	228
8.3 Anwendungen des $\chi^2$ -Testes . . . . .	230
8.4 Ein Anwendungsbeispiel für den F-Test . . . . .	239
8.5 Verteilungsfreie Signifikanztests . . . . .	244
8.51 Der Anpassungstest von Smirnov-Kolmogoroff . . . . .	244
Übungsaufgaben und ergänzende Hinweise VIII . . . . .	246
Anhang	
Tabelle I – Zufallszahlen . . . . .	254
Tabelle II – Binomialverteilung . . . . .	255
Tabelle III – Poissonverteilung . . . . .	258
Tabelle IV – Ordinaten der standardisierten Normalverteilung . . . . .	260
Tabelle V – Flächen der standardisierten Normalverteilung . . . . .	261
Tabelle VI – Zentrale Schwankungsintervalle der Normalverteilung . . . . .	262
Tabelle VII – Zentrale Schwankungsintervalle der t-Verteilung . . . . .	262
Tabelle VIII – Prozentpunkte der $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	263
Tabelle IX – Prozentpunkte der F-Verteilung . . . . .	264
Tabelle X – Konfidenzintervalle für $p$ . . . . .	266
Tabelle XI – Konfidenzintervalle für den Korrelationskoeffizienten $\rho$ . . . . .	268
Tabelle XII – Zweiseitige Toleranzgrenzen . . . . .	270
Tabelle XIII – Kritische Werte für den Ein-Stichproben-Smirnov-Kolmogoroff-Test . . . . .	271
Literaturverzeichnis . . . . .	273
Sachverzeichnis . . . . .	275