

1	Einführung	1
1.1	Aufgabenstellung	2
1.2	Tragwerkstheorien und Berechnungsmodelle	10
1.3	Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	18
1.3.1	Koordinatensystem, Verschiebungen, Spannungen	18
1.3.2	Kinematische Gleichungen	26
1.3.3	Gleichgewichtsbedingungen	28
1.3.4	Konstitutive Gleichungen, Werkstoffgesetz	30
1.3.5	Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in der direkten Tensordarstellung	31
1.3.6	Randwert- und Anfangs-Randwertaufgaben der linearen Elastizitätstheorie	36
1.3.7	Variationsprinzip der Elastizitätstheorie	39
	Literaturverzeichnis	44
2	Scheiben	47
2.1	Grundgleichungen und Randbedingungen für isotrope Scheiben	49
2.1.1	Scheibengleichung in kartesischen Koordinaten	51
2.1.1.1	Kinematische Gleichungen	51
2.1.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	51
2.1.1.3	Konstitutive Gleichungen	52
2.1.1.4	Randbedingungen	58
2.1.2	Vektor-Matrix-Schreibweise	61
2.1.3	Energieformulierungen	63
2.1.4	Scheibengleichung in Polarkoordinaten	65
2.1.4.1	Kinematische Gleichungen	67
2.1.4.2	Gleichgewichtsbedingungen	68
2.1.4.3	Konstitutive Gleichungen	69
2.1.5	Scheibengleichung in schiefwinkeligen Koordinaten	72
2.1.5.1	Kinematischen Gleichungen	73

2.1.5.2	Gleichgewichtsbedingungen	75
2.1.5.3	Konstitutive Gleichungen	77
2.1.6	Scheibengleichung in der direkten Tensordarstellung..	79
2.1.6.1	Annahmen und Vorüberlegungen	79
2.1.6.2	Kinematische Gleichungen	82
2.1.6.3	Gleichgewichtsbedingungen	82
2.1.6.4	Konstitutive Gleichungen	83
2.1.6.5	Grundgleichungen in den Verschiebungen ...	84
2.1.6.6	Grundgleichungen in der Spannungsfunktion	85
2.1.7	Festigkeit und Steifigkeit von Scheiben	86
2.1.8	Zusammenfassung der Grundgleichungen	89
2.2	Beispiele	89
2.2.1	Allgemeine Lösungsmethoden	90
2.2.2	Elementare Lösungen der Scheibengleichung	98
2.2.2.1	Rechteckscheibe mit konstanter Randschub- und linear veränderlicher Randnormalbelastung	100
2.2.2.2	Dreieckscheibe mit hydrostatischer Belastung	100
2.2.2.3	Konstruktion besserter Balkenlösungen für wandartige Träger	103
2.2.2.4	Kreisringscheibe mit konstanter Schubbeanspruchung.....	109
2.2.2.5	Kreisscheibe unter konstanter Randzugbelastung	110
2.2.2.6	Blech mit Kreislochbohrung	111
2.2.2.7	Halbebene mit Einzelkraftbelastungen	112
2.2.2.8	Spannungen im Keil	115
2.2.3	Wandartige Träger.....	121
2.2.3.1	Halbscheibenmodell	122
2.2.3.2	Inneres Feld eines Durchlaufträgers großer Höhe	124
2.2.3.3	Halbscheibe mit Randschubbelastung.....	127
2.2.3.4	Scheibenhalbstreifenmodell	130
2.2.3.5	Scheibenstreifenmodell	132
2.2.3.6	Rechteckscheibenmodell	139
2.2.4	Rotationssymmetrische Kreis- und Kreisringscheiben .	141
2.2.4.1	Kinematische Gleichungen	142
2.2.4.2	Gleichgewichtsbedingungen	142
2.2.4.3	Konstitutive Gleichungen	143
2.2.4.4	Randbelastete Kreisscheibe.....	146
2.2.4.5	Kreisringscheibe mit konstanter Druckbelastung am Innenrand	146
2.2.4.6	Rotierende Kreisscheibe	148
2.2.4.7	Kreisbogenscheibe mit Momentenbelastung ..	149

2.2.5	Nichtrotationssymmetrische Lösungen in Polarkoordinaten	151
2.2.5.1	Varianten der Scheibenlösungen	151
2.2.5.2	Kreisbogenträger mit Kraft- und Momentenbelastung am freien Rand	152
2.2.6	Näherungslösungen nach Ritz, Galerkin, Wlassow und Kantorowitsch	155
2.2.7	Zusammenfassung der Beispillösungen	164
	Literaturverzeichnis	165
3	Schubstarre Platten mit kleinen Durchbiegungen	167
3.1	Grundgleichungen und Randbedingungen für isotrope Platten	168
3.1.1	Plattengleichungen in kartesischen Koordinaten	171
3.1.1.1	Kinematische Gleichungen	171
3.1.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	172
3.1.1.3	Konstitutive Gleichungen	174
3.1.2	Vektor-Matrix-Schreibweise	194
3.1.2.1	Kinematische Gleichungen	194
3.1.2.2	Gleichgewichtsbedingungen	194
3.1.2.3	Konstitutive Gleichungen	195
3.1.2.4	Randbedingungen	195
3.1.3	Energieformulierungen	196
3.1.4	Plattengleichungen in Polarkoordinaten - allgemeiner (nichtrotationssymmetrischer) Fall	200
3.1.4.1	Plattengleichung	202
3.1.4.2	Konstitutive Gleichungen	202
3.1.4.3	Kinematische Gleichungen	203
3.1.4.4	Spannungen	203
3.1.5	Plattengleichungen in Polarkoordinaten - rotationssymmetrischer Fall	204
3.1.5.1	Plattengleichung	204
3.1.5.2	Konstitutive Gleichungen	204
3.1.5.3	Kinematische Gleichungen	205
3.1.5.4	Spannungen	205
3.1.5.5	Elastisches Gesamtpotential	206
3.1.6	Plattengleichungen in schiefwinkligen Koordinaten ..	207
3.1.6.1	Kinematische Gleichungen	207
3.1.6.2	Gleichgewichtsbedingungen	209
3.1.6.3	Konstitutive Gleichungen	211
3.1.6.4	Allgemeine Randbedingungen	213
3.1.6.5	Elastisches Gesamtpotential	218
3.1.7	Festigkeit und Steifigkeit von Platten	219
3.1.8	Zusammenfassung der Grundgleichungen	221
3.2	Beispiele	222

3.2.1	Allgemeine Lösungsmethoden	223
3.2.2	Elementare Lösungen der Plattengleichung.....	223
3.2.2.1	Zylindrische Biegung einer Rechteckplatte ...	224
3.2.2.2	Parabolische Biegung einer Rechteckplatte ...	225
3.2.2.3	Hyperbolische Biegung einer Rechteckplatte .	225
3.2.2.4	Reine Torsion einer Rechteckplatte.....	225
3.2.2.5	Eingespannte elliptische Platte mit konstanter Flächenlast q_0	227
3.2.2.6	Momentenfrei gelagerte gleichseitige Dreieckplatte mit konstanter Flächenlast	228
3.2.2.7	Auf vier Eckstützen gelagerte Rechteckplatte mit konstanter Flächenbelastung q_0	229
3.2.3	Rechteckplatten	231
3.2.3.1	Plattenbalkenmodell.....	231
3.2.3.2	Gelenkig gelagerter Plattenbalken mit konstanter Flächenlast	233
3.2.3.3	Plattenstreifenmodell	237
3.2.3.4	Plattenhalbstreifenmodell	245
3.2.3.5	Gleichmäßig belasteter Halbstreifen mit gelenkiger Lagerung am Querrand	248
3.2.3.6	Gleichmäßig belasteter Halbstreifen mit eingespanntem Querrand	250
3.2.3.7	Rechteckplatten mit unterschiedlichen Randbedingungen.....	251
3.2.4	Rotationssymmetrische Kreis- und Kreisringplatten ..	261
3.2.4.1	Kreisplatte mit konstanter Volllast	264
3.2.4.2	Kreisplatte mit konstanter Flächenlast für $0 \leq r \leq r_1$	265
3.2.5	Nichtrotationssymmetrische Lösungen in Polarkoordinaten	269
3.2.5.1	Kreisplatte mit linear veränderlicher Belastung	270
3.2.5.2	Eingespannte Kreisplatte mit Momentenbelastung über starrem Kern	273
3.2.5.3	Kreisplatte mit Einzellast	274
3.2.5.4	Kreisringsektorplatte mit konstanter Belastung	275
3.2.6	Näherungslösungen nach Ritz, Galerkin, Wlassow und Kantorowitsch	276
3.2.6.1	Verfahren von Ritz	277
3.2.6.2	Verfahren von Galerkin	279
3.2.6.3	Allseitig starr eingespannte Rechteckplatte unter Volllast	282
3.2.6.4	Rechteckplatte mit jeweils zwei benachbarten eingespannten und momentenfrei gelagerten Rändern	285

3.2.6.5	Allseitig starr eingespannte, schiefwinklige Platte unter Volllast	287
3.2.6.6	Verfahren von Wlassow	290
3.2.6.7	Verfahren von Kantorowitsch	295
3.2.6.8	Eingespannter Halbstreifen	297
3.2.6.9	Allseitig eingespannte Rechteckplatte	299
3.2.6.10	Allseitig momentenfrei gelagerte Rechteckplatte mit Teilbelastung	301
3.2.6.11	Trapezplatte mit unterschiedlichen Randbedingungen	303
3.2.7	Eigenschwingungen	308
3.2.7.1	Allseitig momentenfrei gelagerte Rechteckplatte	310
3.2.7.2	Rechteckplatte mit momentenfreier Lagerung für $x_1 = 0, x_1 = l_1$ und beliebiger Lagerung für $x_2 = 0, x_2 = l_2$	313
3.2.7.3	Allseitig eingespannte Rechteckplatte	316
3.2.7.4	Eingespannte Kreisplatte	317
3.2.8	Zusammenfassung der Beispillösungen	319
	Literaturverzeichnis	321
4	Schubelastische Platten mit kleinen Durchbiegungen	323
4.1	Grundgleichungen und Randbedingungen für isotrope Platten	324
4.1.1	Plattengleichung in kartesischen Koordinaten	325
4.1.1.1	Kinematische Gleichungen	326
4.1.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	327
4.1.1.3	Konstitutive Gleichungen	327
4.1.2	Energieformulierungen	335
4.1.3	Plattengleichung in Polarkoordinaten	338
4.1.4	Zusammenfassung der Grundgleichungen	342
4.2	Beispiele	343
4.2.1	Allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatten	344
4.2.1.1	Durchbiegung	344
4.2.1.2	Eigenschwingungen	345
4.2.2	Eingespannte Kreisplatten	347
4.2.2.1	Durchbiegung bei konstanter Flächenlast	347
4.2.2.2	Durchbiegung bei zentrischer Einzelkraftbelastung	348
4.2.3	Zusammenfassung der Beispillösungen	349
	Literaturverzeichnis	350
5	Anisotrope Scheiben und Platten	351
5.1	Grundgleichungen für anisotrope ebene Tragwerke	353
5.1.1	Anisotropes Stoffgesetz	354

5.1.2	Scheibenproblem	356
5.1.3	Plattenproblem.....	360
5.1.4	Gekoppelte Platten-Scheiben-Zustände	362
5.1.5	Sonderfall orthotroper Scheiben und Platten	364
5.1.6	Ermittlung von Ersatzsteifigkeiten	366
5.1.6.1	Steifigkeiten bei konstruktiver Anisotropie	367
5.1.6.2	Steifigkeiten für die Einzelschicht aus einem Kompositwerkstoff	370
5.2	Laminattheorie	372
5.2.1	Monotrope Einzelschicht	372
5.2.2	Klassische Laminattheorie	376
5.2.2.1	Schichtverbunde mit symmetrischem Schichtaufbau	380
5.2.2.2	Schichtverbunde mit unsymmetrischem und antisymmetrischem Schichtaufbau	383
5.2.2.3	Spannungsberechnung	385
5.2.3	Verbesserte Laminattheorie	386
5.2.4	Strukturgleichungen für Laminatscheiben und -platten	389
5.2.4.1	Strukturgleichungen der klassischen Laminattheorie	389
5.2.4.2	Strukturgleichungen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung	392
5.3	Ausgewählte Beispiele	395
5.3.1	Lösungen für schubstarre Tragwerke	395
5.3.1.1	Allseitig gelenkig gelagerte orthotrope Platte unter verteilter Flächenlast	395
5.3.1.2	Orthotrope Platte mit zwei gelenkig gelagerten und zwei eingespannten Seiten ..	396
5.3.2	Lösungen für schubelastische Tragwerke	397
5.3.2.1	Allseitig gelenkig gelagerte Quadratplatte aus transversal-isotropem Material	397
5.3.2.2	Zylindrische Biegung einer gelenkig gelagerten Sandwich-Platte	398
	Literaturverzeichnis	400
6	Schubstarre Platten mit großen Durchbiegungen	401
6.1	Grundgleichungen für Platten großer Durchbiegungen	402
6.1.1	Grundgleichungen in kartesischen Koordinaten	402
6.1.1.1	Kinematische Gleichungen	402
6.1.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	404
6.1.1.3	Konstitutive Gleichungen	406
6.1.1.4	Grundgleichungen in den Verschiebungen ..	407
6.1.1.5	Grundgleichungen in gemischter Form	410
6.1.2	Grundgleichungen in Polarkoordinaten	412
6.2	Variationsformulierungen	413

6.2.1	Variationsproblem in den Verschiebungen	413
6.2.2	Gemischte Variationsformulierung.....	415
6.3	Sonderfälle	419
6.3.1	Entkoppelte Scheiben- und Plattengleichungen (Theorie 1. Ordnung)	419
6.3.2	Gekoppelte Scheiben- und Plattengleichungen (Theorie 2. Ordnung)	419
6.3.3	Membrangleichungen für große Durchbiegungen	420
6.3.4	Beulgleichung.....	420
6.4	Beispiele	421
6.4.1	Große Durchbiegungen von Platten	422
6.4.1.1	Allseitig starr eingespannte Rechteckplatte mit konstanter Volllast	422
6.4.1.2	Starr eingespannte Kreisplatte mit konstanter Volllast.....	427
6.4.2	Kritische Beullasten von Platten	429
6.4.2.1	Allseitig momentenfrei gelagerte Rechteckplatte unter konstantem einachsigen Druck	429
6.4.2.2	Allseitig momentenfrei gelagerte Rechteckplatte unter zweiseitigem Druck	432
6.4.2.3	Starr eingespannte Kreisplatte unter konstantem Druck	433
6.4.3	Zusammenfassung der Beispillösungen	435
	Literaturverzeichnis	435
7	Temperaturbeanspruchte Scheiben und Platten	437
7.1	Grundgleichungen bei vorgegebenen Temperaturfeldern	438
7.1.1	Schubstarres Scheiben-Plattenmodell	439
7.1.1.1	Kinematische Gleichungen	440
7.1.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	440
7.1.1.3	Konstitutive Gleichungen	440
7.1.2	Schubelastisches Scheiben-Plattenmodell	448
7.1.2.1	Kinematische Gleichungen	448
7.1.2.2	Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen	448
7.1.2.3	Konstitutive Gleichungen	449
7.1.3	Große Durchbiegungen und thermoelastische Stabilität	451
7.1.3.1	Kinematische Gleichungen	451
7.1.3.2	Gleichgewichtsbedingungen	452
7.1.3.3	Konstitutive Gleichungen	452
7.1.3.4	Thermoelastische Plattenbeulung	455
7.1.4	Zusammenfassung der Grundgleichungen	455
7.2	Beispiele	456
7.2.1	Elementare Lösungen	456

7.2.1.1	Freie Platte beliebiger Geometrie mit Temperaturfeld	457
7.2.1.2	Rechteckplatte mit Temperaturfeld $T(x_1, x_2, x_3) = T(x_1, x_2)f(x_3)$	459
7.2.2	Gelenkig gelagerte, schubstarre Rechteckplatten	460
7.2.2.1	Allseitig momentenfrei gelagerte Rechteckplatte	460
7.2.2.2	Verallgemeinerte Lévysche Reihenlösung	461
7.2.3	Gelenkig gelagerte, schubelastische Rechteckplatten ..	462
7.2.4	Zusammenfassung der Beispiellösungen	463
	Literaturverzeichnis	464
8	Direkte Formulierung von Theorien für ebene Flächentragwerke	465
8.1	Schubelastische Platten und das gekoppelte Platten-Scheiben-Problem.....	465
8.1.1	Schubelastische Platten	465
8.1.2	Gekoppeltes Scheiben-Plattenproblem	474
8.1.3	Zusammenfassung der direkt formulierten Plattentheorie	480
8.2	Analyse eines Dreischichtverbundes	480
8.2.1	Schichtweise Theorie	482
8.2.2	Differentialgleichungen für die Primärvariablen	487
8.2.3	Analyse eines Plattenstreifens	492
8.2.4	Zusammenfassung der Theorie basierend auf einem schichtweisen Ansatz	497
	Literaturverzeichnis	498
9	Zusammenfassung und Ausblick	501
9.1	Formulierungskonzepte für elastisches Materialverhalten	502
9.2	Berücksichtigung inelastischen Werkstoffverhaltens	508
	Literaturverzeichnis	510
10	Mathematische Hilfsmittel	515
10.1	Grundlagen der Variationsrechnung.....	515
10.1.1	Eindimensionale Funktionale.....	516
10.1.2	Zweidimensionale Funktionale	518
10.1.3	Funktionale mit höheren Ableitungen.....	518
10.1.4	Beispiele	520
10.2	Fourierreihen und Fourierintegrale.....	523
10.2.1	Fourierreihen	524
10.2.2	Einfache Fourierintegrale	526
10.2.3	Gemischte Fourierentwicklungen	527
10.3	Koordinatentransformationen für Differentialoperatoren	527
10.3.1	Allgemeine Transformationsregeln	530
10.3.2	Drehung des Koordinatensystems	531

10.3.3 Schiefwinkelige Koordinaten	532
10.3.4 Polarkoordinaten	533
10.4 Fourierlösungen für ausgewählte Scheibengleichungen	534
10.4.1 Fourierreihenlösungen in kartesischen Koordinaten ..	535
10.4.2 Fourierreihenlösungen in Polarkoordinaten	537
10.4.3 Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten ..	538
10.5 Halbebene unter Randbelastungen	540
10.5.1 Halbebene unter periodischer Belastung	541
10.5.2 Halbebene unter nichtperiodischer Belastung.....	542
10.6 Reduktionsmethode nach Kantorowitsch	544
10.7 Ansatzfunktionen für Rechteckplatten.....	551
10.7.1 Eigenfunktionen transversal schwingender Balken ..	551
10.7.2 Eigenfunktionen des Knickstabes	554
10.8 Operationen der Tensoralgebra	557
10.8.1 Einführung	557
10.8.2 Polare und axial Vektoren	559
10.8.3 Operationen mit Vektoren.....	560
10.8.3.1 Addition	560
10.8.3.2 Multiplikation mit einem Skalar	561
10.8.3.3 Skalarprodukt von zwei Vektoren	561
10.8.3.4 Vektorprodukt von zwei Vektoren	562
10.8.3.5 Basen	563
10.8.4 Operationen mit Tensoren zweiter Stufe	564
10.8.4.1 Addition	564
10.8.4.2 Multiplikation mit einem Skalar	565
10.8.4.3 Inneres Produkt	565
10.8.4.4 Transponieren eines Tensors zweiter Stufe ..	565
10.8.4.5 Doppeltes inneres Punktprodukt	566
10.8.4.6 Skalarprodukte eines Tensors zweiter Stufe und eines Vektors	566
10.8.4.7 Vektorprodukte eines Tensors zweiter Stufe und eines Vektors	567
10.8.4.8 Spur	567
10.8.4.9 Determinante und Inverse eines Tensors zweiter Stufe	567
10.8.5 Spezielle Tensoren zweiter Stufe - Definitionen und Sätze	568
10.8.5.1 Symmetrische Tensoren	568
10.8.5.2 Schiefsymmetrische Tensoren	569
10.8.5.3 Lineare Transformationen von Vektoren	569
10.8.5.4 Hauptwerte und -richtungen von symmetrischen Tensoren zweiter Stufe	570
10.8.5.5 Satz von Cayley-Hamilton	571
10.8.5.6 Vektorinvariante	571
10.8.5.7 Koordinaten von Tensoren zweiter Stufe	572

10.8.5.8 Orthogonale Tensoren	573
10.8.6 Tensoren höherer Stufe	574
Literaturverzeichnis	575
Sachverzeichnis	577