

# Inhalt

## 1. Aussagen und Mengen

<b>1.1. Aussagen und Aussageformen</b>	9
1.1.1. Aussagen und Wahrheitswerte	9
1.1.2. Aussageformen	9
<b>1.2. Verknüpfung von Aussagen</b>	10
1.2.1. Junktoren und Wahrheitstafeln	10
1.2.2. Aussageverknüpfungen	10
1.2.3. Tabellarischer Überblick	12
<b>1.3. Begriff und Darstellung von Mengen</b>	14
1.3.1. Begriff und Bezeichnung der Menge	14
1.3.2. Verfahren zur Angabe von Mengen	15
1.3.3. Die Quantorenschreibweise	16
1.3.4. Mengendiagramme	16
<b>1.4. Grundbeziehungen zwischen Mengen</b>	17
1.4.1. Äquivalenz und Gleichheit	17
1.4.2. Teilmengen	18
1.4.3. Unendliche Mengen	19
<b>1.5. Verknüpfungen von Mengen</b>	20
1.5.1. Die Vereinigungsmenge oder die Vereinigung	20
1.5.2. Die Durchschnittsmenge oder der Durchschnitt	21
1.5.3. Gesetze zu den Verknüpfungen „Vereinigung“ und „Durchschnitt“	22
1.5.4. Die Komplementmenge und die Differenzmenge	23
<b>1.6. Entsprechungen zwischen Aussagen und Mengen</b>	24
<b>1.7. Zusammenfassende Übersicht</b>	24

## 2. Zahlenmengen, Operationen, Zahlendarstellung

<b>2.1. Die Menge der natürlichen Zahlen <math>N</math></b>	26
2.1.1. Die natürlichen Zahlen	26
2.1.2. Operationen in $N$	26
<b>2.2. Die Menge der ganzen Zahlen <math>Z</math></b>	27
2.2.1. Die Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterung	27
2.2.2. Operationen in $Z$	28
2.2.3. Die Ringstruktur der Menge der ganzen Zahlen	29
<b>2.3. Die Menge der rationalen Zahlen <math>Q</math></b>	29
2.3.1. Die Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterung	29
2.3.2. Operationen in $Q$	31
2.3.3. Die Körperstruktur der Menge der rationalen Zahlen	31
2.3.4. Die Potenzgesetze	31
2.3.4.1. Die Definition der Potenz	31
2.3.4.2. Das Vorzeichen des Potenzwertes	32
2.3.4.3. Die Addition von Potenzen	32
2.3.4.4. Die Multiplikation und die Division von Potenzen	32
2.3.4.5. Das Potenzieren von Potenzen	35
2.3.4.6. Das Potenzieren von Summen	35
<b>2.4. Die Menge der reellen Zahlen <math>R</math></b>	38
2.4.1. Die Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterung	38

2.4.2.	Intervall und Umgebung	40
2.4.3.	Die Menge der reellen Zahlen als Intervallschachtelung	41
2.4.4.	Operationen in $\mathbb{R}$	42
2.4.5.	Die Körperstruktur der Menge der reellen Zahlen	42
2.4.6.	Die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten	42
2.4.7.	Der Logarithmus	47
2.4.8.	Logarithmensysteme	51
2.4.8.1.	Der Zehnerlogarithmus	51
2.4.8.2.	Das Rechnen mit Zehnerlogarithmen.	53
2.4.8.3.	Umrechnung von Logarithmen verschiedener Basen	57
2.4.9.	Ausblick auf die Menge der komplexen Zahlen	58
2.5.	<b>Die Zahlendarstellung</b>	59
2.5.1.	Das Dezimalsystem	59
2.5.2.	p-adische Systeme.	60
2.5.3.	Das Dualsystem.	60

### 3. Gleichungen und Ungleichungen

3.1.	Gleichungen und Ungleichungen als Aussagen oder Aussageformen	63
3.2.	Äquivalenz, Terme und Termumformungen	65
3.3.	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	67
3.4.	Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	69
3.4.1.	Lösung einer Bruchgleichung	70
3.4.2.	Lösung einer Bruchungleichung	70
3.5.	Betragsgleichungen und Betragsungleichungen	72
3.6.	Quadratische Gleichungen und Ungleichungen	74
3.6.1.	Lösung der quadratischen Gleichung	74
3.6.2.	Lösung der quadratischen Ungleichung	76
3.7.	Wurzelgleichungen	77
3.8.	Exponentialgleichungen	79
3.9.	Gleichungssysteme	80
3.9.1.	Das Gleichsetzungsverfahren	80
3.9.2.	Das Einsetzungsverfahren	81
3.9.3.	Das Additionsverfahren	82
3.9.4.	Das Determinantenverfahren	83
3.10.	Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen.	84

### 4. Relationen, Funktionen, Funktionstypen

4.1.	Relationen	88
4.1.1.	Geordnetes Paar und kartesisches Mengenprodukt	88
4.1.2.	Definition und Erläuterung der Relation	90
4.1.3.	Eigenschaften von Relationen	92
4.1.4.	Die Umkehrrelation	94
4.2.	Erläuterung des Funktionsbegriffs	95
4.2.1.	Die Definition des Funktionsbegriffs	95
4.2.2.	Gleichberechtigte Darstellungsweisen einer Funktion	96
4.2.3.	Der Abbildungsbegriff	97
4.3.	Die Umkehrfunktion	99
4.3.1.	Definition der Umkehrfunktion	99
4.3.2.	Bildung von Umkehrfunktionen	99

<b>4.4. Die ganzen rationalen Funktionen</b>	103
4.4.1. Die Grundfunktionen	103
4.4.2. Der Aufbau der ganzen rationalen Funktionen n-ten Grades aus den Grundfunktionen	107
4.4.3. Allgemeine Kriterien des Kurvenverlaufs	112
4.4.4. Polynome und Linearfaktoren	116
4.4.5. Der binomische Lehrsatz	119
<b>4.5. Potenzfunktionen mit negativem und gebrochenem Exponenten und ihre Erweiterungen</b>	120
4.5.1. Die Hyperbeln n-ter Ordnung	120
4.5.2. Die gebrochene rationale Funktion	121
4.5.3. Die Wurzelfunktion	128
<b>4.6. Exponential- und Logarithmusfunktion</b>	130
4.6.1. Die allgemeine Exponentialfunktion	130
4.6.2. Die e-Funktion	132
4.6.3. Die allgemeine Logarithmusfunktion	134
4.6.4. Die Funktion des natürlichen Logarithmus	135
<b>4.7. Die trigonometrischen Funktionen</b>	136
4.7.1. Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck	136
4.7.2. Die Sinusfunktion	137
4.7.3. Die Kosinusfunktion	138
4.7.4. Die Tangensfunktion	139
4.7.5. Die Kotangensfunktion	140
4.7.6. Einfache trigonometrische Gesetze	141
4.7.6.1. Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus	141
4.7.6.2. Beziehungen zwischen Tangens und Kotangens	141
4.7.6.3. Beziehungen zwischen Tangens, Sinus, Kosinus und Kotangens	142
4.7.7. Die Additionstheoreme	142
4.7.8. Zusammengesetzte Winkelfunktionen	143
4.7.8.1. Phasenverschobene Kurven	143
4.7.8.2. Amplitude	144
4.7.8.3. Die Winkelfunktion $y = f(ax)$	144
4.7.8.4. Die Funktion $y = \sin^2 x$	144
<b>4.8. Spezielle Funktionen</b>	146
4.8.1. Die Betragsfunktion	146
4.8.2. Die Gaußfunktion	146
4.8.3. Die Vorzeichenfunktion	147
<b>5. Folgen und Reihen</b>	
<b>5.1. Definition von Folgen und Reihen</b>	148
5.1.1. Folgen	148
5.1.2. Reihen	150
<b>5.2. Arithmetische Folgen und Reihen</b>	152
5.2.1. Die arithmetische Folge (AF)	152
5.2.2. Die arithmetische Reihe (AR)	155
<b>5.3. Geometrische Folgen und Reihen</b>	158
5.3.1. Die geometrische Folge (GF)	158
5.3.2. Die geometrische Reihe (GR)	162
5.3.3. Die unendliche geometrische Folge und Reihe	166
<b>6. Grenzwert und Stetigkeit</b>	
<b>6.1. Eigenschaften unendlicher Zahlenfolgen</b>	169
6.1.1. Die Beschränktheit unendlicher Folgen	169
6.1.2. Die Monotonie unendlicher Folgen	170

<b>6.2. Grenzwerte unendlicher Zahlenfolgen</b>	171
6.2.1. Der Begriff des Grenzwertes	171
6.2.2. Sätze über unendliche Zahlenfolgen	174
6.2.2.1. Intervallschachtelungen	174
6.2.2.2. Konvergenzsatz	175
6.2.2.3. Die Zahl $e$	175
6.2.2.4. Grenzwertsätze bei Folgen	176
<b>6.3. Grenzwerte von Funktionen</b>	179
6.3.1. Grenzwerte für $x$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$	179
6.3.2. Grenzwerte für $x$ gegen $x_0$	181
6.3.3. Grenzwertsätze bei Funktionen	183
<b>6.4. Stetigkeit</b>	184
6.4.1. Stetigkeit und Unstetigkeit von Funktionen an der Stelle $x = x_0$	184
6.4.2. Stetigkeit in einem Intervall	187
6.4.3. Stetigkeit der ganzen rationalen Funktionen	188
6.4.4. Stetigkeit der gebrochenen rationalen Funktionen	188
6.4.5. Stetigkeit der irrationalen Funktionen	188
6.4.6. Stetigkeit spezieller Funktionen	189

## 7. Differentialrechnung

<b>7.1. Das Tangentenproblem und die Steigung einer Kurve</b>	190
7.1.1. Die Geradensteigung	190
7.1.2. Die Sekantensteigung	191
7.1.3. Die Tangentensteigung	192
<b>7.2. Differenzierbarkeit und der allgemeine Begriff der Ableitung</b>	195
7.2.1. Die Differenzierbarkeit von Funktionen	195
7.2.2. Die Ableitungsfunktion	196
<b>7.3. Differentialrechnung auf der Menge der ganzen rationalen Funktionen</b>	198
7.3.1. Ableitung der Grundfunktionen	198
7.3.2. Einfache Ableitungsregeln	199
7.3.2.1. Konstanter Faktor	199
7.3.2.2. Additive Konstante	200
7.3.2.3. Summe von Funktionen	201
7.3.2.4. Höhere Ableitungen	201
7.3.2.5. Produktregel	202
7.3.2.6. Zusammenfassung der Ableitungsregeln	203
7.3.3. Ableitung und Differenzierbarkeit der ganzen rationalen Funktionen	203
7.3.4. Untersuchung des Kurvenverlaufs der ganzen rationalen Funktionen mit Hilfe der Ableitungen	207
7.3.4.1. Wiederholung	207
7.3.4.2. Steigen und Fallen der Funktion und ihres Graphen – Extremstellen	207
7.3.4.3. Rechtskurve und Linkskurve – Wendestellen	210
7.3.4.4. Schematische Übersicht	212
7.3.5. Kurvendiskussion	213
7.3.5.1. Das Verlaufsschema einer Kurvendiskussion	213
7.3.5.2. Untersuchung einer Funktion	213
7.3.5.3. Festlegung von ganzen rationalen Funktionen durch angegebene Bedingungen	216
7.3.6. Extremwertprobleme	222
<b>7.4. Die Differentialrechnung auf der Menge der gebrochenen rationalen und irrationalen Funktionen</b>	226
7.4.1. Die gebrochenen rationalen Funktionen	226
7.4.1.1. Quotientenregel	227
7.4.1.2. Kettenregel	228
7.4.1.3. Kurvendiskussion	229

7.4.1.4. Extremwertprobleme . . . . .	232
7.4.2. Die Wurzelfunktionen . . . . .	236
7.4.2.1. Die Wurzelfunktion als Potenzfunktion . . . . .	236
7.4.2.2. Die Ableitung von Umkehrfunktionen . . . . .	237
7.4.2.3. Ableitungsregeln . . . . .	238
7.4.2.4. Kurvendiskussion . . . . .	239
7.4.2.5. Extremwertprobleme . . . . .	242
7.4.3. Die trigonometrischen Funktionen. . . . .	245
7.4.3.1. Besondere Grenzwerte . . . . .	245
7.4.3.2. Ableitungen der trigonometrischen Funktionen . . . . .	245
7.4.3.3. Kurvendiskussion . . . . .	247
7.4.3.4. Extremwertprobleme . . . . .	250
7.4.4. Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	252
7.4.4.1. Die Ableitung der e-Funktion $x \mapsto y = e^x$ . . . . .	252
7.4.4.2. Die Ableitung der Logarithmusfunktion $x \mapsto y = \ln x$ . . . . .	253
7.4.4.3. Die Ableitung zusammengesetzter Funktionen . . . . .	254

## 8. Integralrechnung

8.1. Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung . . . . .	257
8.1.1. Der Begriff der Stammfunktion . . . . .	257
8.1.2. Stammfunktionen der Grundfunktionen. . . . .	258
8.1.3. Stammfunktionen der ganzen rationalen Funktionen . . . . .	259
8.1.4. Die Stammfunktion als unbestimmtes Integral . . . . .	259
8.2. Das bestimmte Integral als Fläche . . . . .	260
8.2.1. Fläche zwischen Kurve und x-Achse . . . . .	260
8.2.2. Fläche zwischen zwei Kurven . . . . .	268
8.3. Das bestimmte Integral als Arbeit . . . . .	272
8.4. Das bestimmte Integral als Rauminhalt. . . . .	274

Lösungen . . . . .	280
Stichwortverzeichnis . . . . .	319