

Inhalt

1. Aussagen und Mengen	
1.1. Aussagen und Aussageformen	9
1.1.1. Aussagen und Wahrheitswerte	9
1.1.2. Aussageformen	9
1.2. Verknüpfung von Aussagen	10
1.2.1. Junktoren und Wahrheitstafeln	10
1.2.2. Aussageverknüpfungen	10
1.2.3. Tabellarischer Überblick	12
1.3. Begriff und Darstellung von Mengen	14
1.3.1. Begriff und Bezeichnung der Menge	14
1.3.2. Verfahren zur Angabe von Mengen	15
1.3.3. Die Quantorenschreibweise	16
1.3.4. Mengendiagramme	16
1.4. Grundbeziehungen zwischen Mengen	17
1.4.1. Äquivalenz und Gleichheit	17
1.4.2. Teilmengen	18
1.4.3. Unendliche Mengen	19
1.5. Verknüpfungen von Mengen	20
1.5.1. Die Vereinigungsmenge oder die Vereinigung	20
1.5.2. Die Durchschnittsmenge oder der Durchschnitt	21
1.5.3. Gesetze zu den Verknüpfungen „Vereinigung“ und „Durchschnitt“	22
1.5.4. Die Komplementmenge und die Differenzmenge	23
1.6. Entsprechungen zwischen Aussagen und Mengen	24
1.7. Zusammenfassende Übersicht	24
2. Zahlenmengen, Operationen, Zahlendarstellung	
2.1. Die Menge der natürlichen Zahlen N	26
2.1.1. Die natürlichen Zahlen	26
2.1.2. Operationen in N	26
2.2. Die Menge der ganzen Zahlen Z	27
2.2.1. Die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung	27
2.2.2. Operationen in Z	28
2.2.3. Die Ringstruktur der Menge der ganzen Zahlen	29
2.3. Die Menge der rationalen Zahlen Q	29
2.3.1. Die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung	29
2.3.2. Operationen in Q	31
2.3.3. Die Körperstruktur der Menge der rationalen Zahlen	31
2.3.4. Die Potenzgesetze	31
2.3.4.1. Die Definition der Potenz	31
2.3.4.2. Das Vorzeichen des Potenzwertes	32
2.3.4.3. Die Addition von Potenzen	32
2.3.4.4. Die Multiplikation und die Division von Potenzen	32
2.3.4.5. Das Potenzieren von Potenzen	35
2.3.4.6. Das Potenzieren von Summen	35
2.4. Die Menge der reellen Zahlen R	38
2.4.1. Die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung	38

2.4.2.	Intervall und Umgebung	40
2.4.3.	Die Menge der reellen Zahlen als Intervallschachtelung	41
2.4.4.	Operationen in \mathbb{R}	42
2.4.5.	Die Körperstruktur der Menge der reellen Zahlen	42
2.4.6.	Die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten	42
2.4.7.	Der Logarithmus	47
2.4.8.	Logarithmensysteme	51
2.4.8.1.	Der Zehnerlogarithmus	51
2.4.8.2.	Das Rechnen mit Zehnerlogarithmen	53
2.4.8.3.	Umrechnung von Logarithmen verschiedener Basen	57
2.4.9.	Ausblick auf die Menge der komplexen Zahlen	58
2.5.	Die Zahlendarstellung	59
2.5.1.	Das Dezimalsystem	59
2.5.2.	p -adische Systeme	60
2.5.3.	Das Dualsystem	60

3. Gleichungen und Ungleichungen

3.1.	Gleichungen und Ungleichungen als Aussagen oder Aussageformen	63
3.2.	Äquivalenz, Terme und Termumformungen	65
3.3.	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	67
3.4.	Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	69
3.4.1.	Lösung einer Bruchgleichung	70
3.4.2.	Lösung einer Bruchungleichung	70
3.5.	Betragsgleichungen und Betragsungleichungen	72
3.6.	Quadratische Gleichungen und Ungleichungen	74
3.6.1.	Lösung der quadratischen Gleichung	74
3.6.2.	Lösung der quadratischen Ungleichung	76
3.7.	Wurzelgleichungen	77
3.8.	Exponentialgleichungen	79
3.9.	Gleichungssysteme	80
3.9.1.	Das Gleichsetzungsverfahren	80
3.9.2.	Das Einsetzungsverfahren	81
3.9.3.	Das Additionsverfahren	82
3.9.4.	Das Determinantenverfahren	83
3.10.	Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen	84

4. Relationen, Funktionen, Funktionstypen

4.1.	Relationen	88
4.1.1.	Geordnetes Paar und kartesisches Mengenprodukt	88
4.1.2.	Definition und Erläuterung der Relation	90
4.1.3.	Eigenschaften von Relationen	92
4.1.4.	Die Umkehrrelation	94
4.2.	Erläuterung des Funktionsbegriffs	95
4.2.1.	Die Definition des Funktionsbegriffs	95
4.2.2.	Gleichberechtigte Darstellungsweisen einer Funktion	96
4.2.3.	Der Abbildungsbegriff	97
4.3.	Die Umkehrfunktion	99
4.3.1.	Definition der Umkehrfunktion	99
4.3.2.	Bildung von Umkehrfunktionen	99

4.4. Die ganzen rationalen Funktionen	103
4.4.1. Die Grundfunktionen	103
4.4.2. Der Aufbau der ganzen rationalen Funktionen n-ten Grades aus den Grundfunktionen	107
4.4.3. Allgemeine Kriterien des Kurvenverlaufs	112
4.4.4. Polynome und Linearfaktoren	116
4.4.5. Der binomische Lehrsatz	119
4.5. Potenzfunktionen mit negativem und gebrochenem Exponenten und ihre Erweiterungen	120
4.5.1. Die Hyperbeln n-ter Ordnung	120
4.5.2. Die gebrochene rationale Funktion	121
4.5.3. Die Wurzelfunktion	128
4.6. Exponential- und Logarithmusfunktion	130
4.6.1. Die allgemeine Exponentialfunktion	130
4.6.2. Die e-Funktion	132
4.6.3. Die allgemeine Logarithmusfunktion	134
4.6.4. Die Funktion des natürlichen Logarithmus	135
4.7. Die trigonometrischen Funktionen	136
4.7.1. Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck	136
4.7.2. Die Sinusfunktion	137
4.7.3. Die Kosinusfunktion	138
4.7.4. Die Tangensfunktion	139
4.7.5. Die Kotangensfunktion	140
4.7.6. Einfache trigonometrische Gesetze	141
4.7.6.1. Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus	141
4.7.6.2. Beziehungen zwischen Tangens und Kotangens	141
4.7.6.3. Beziehungen zwischen Tangens, Sinus, Kosinus und Kotangens	142
4.7.7. Die Additionstheoreme	142
4.7.8. Zusammengesetzte Winkelfunktionen	143
4.7.8.1. Phasenverschobene Kurven	143
4.7.8.2. Amplitude	144
4.7.8.3. Die Winkelfunktion $y = f(ax)$	144
4.7.8.4. Die Funktion $y = \sin^2 x$	144
4.8. Spezielle Funktionen	146
4.8.1. Die Betragsfunktion	146
4.8.2. Die Gaußfunktion	146
4.8.3. Die Vorzeichenfunktion	147

5. Folgen und Reihen

5.1. Definition von Folgen und Reihen	148
5.1.1. Folgen	148
5.1.2. Reihen	150
5.2. Arithmetische Folgen und Reihen	152
5.2.1. Die arithmetische Folge (AF)	152
5.2.2. Die arithmetische Reihe (AR)	155
5.3. Geometrische Folgen und Reihen	158
5.3.1. Die geometrische Folge (GF)	158
5.3.2. Die geometrische Reihe (GR)	162
5.3.3. Die unendliche geometrische Folge und Reihe	166

6. Grenzwert und Stetigkeit

6.1. Eigenschaften unendlicher Zahlenfolgen	169
6.1.1. Die Beschränktheit unendlicher Folgen	169
6.1.2. Die Monotonie unendlicher Folgen	170

6.2. Grenzwerte unendlicher Zahlenfolgen	171
6.2.1. Der Begriff des Grenzwertes	171
6.2.2. Sätze über unendliche Zahlenfolgen	174
6.2.2.1. Intervallschachtelungen	174
6.2.2.2. Konvergenzsatz	175
6.2.2.3. Die Zahl e	175
6.2.2.4. Grenzwertsätze bei Folgen	176
6.3. Grenzwerte von Funktionen	179
6.3.1. Grenzwerte für x gegen $+\infty$ oder $-\infty$	179
6.3.2. Grenzwerte für x gegen x_0	181
6.3.3. Grenzwertsätze bei Funktionen	183
6.4. Stetigkeit	184
6.4.1. Stetigkeit und Unstetigkeit von Funktionen an der Stelle $x = x_0$	184
6.4.2. Stetigkeit in einem Intervall	187
6.4.3. Stetigkeit der ganzen rationalen Funktionen	188
6.4.4. Stetigkeit der gebrochenen rationalen Funktionen	188
6.4.5. Stetigkeit der irrationalen Funktionen	188
6.4.6. Stetigkeit spezieller Funktionen	189

7. Differentialrechnung

7.1. Das Tangentenproblem und die Steigung einer Kurve	190
7.1.1. Die Geradensteigung	190
7.1.2. Die Sekantensteigung	191
7.1.3. Die Tangentensteigung	192
7.2. Differenzierbarkeit und der allgemeine Begriff der Ableitung	195
7.2.1. Die Differenzierbarkeit von Funktionen	195
7.2.2. Die Ableitungsfunktion	196
7.3. Differentialrechnung auf der Menge der ganzen rationalen Funktionen	198
7.3.1. Ableitung der Grundfunktionen	198
7.3.2. Einfache Ableitungsregeln	199
7.3.2.1. Konstanter Faktor	199
7.3.2.2. Additive Konstante	200
7.3.2.3. Summe von Funktionen	201
7.3.2.4. Höhere Ableitungen	201
7.3.2.5. Produktregel	202
7.3.2.6. Zusammenfassung der Ableitungsregeln	203
7.3.3. Ableitung und Differenzierbarkeit der ganzen rationalen Funktionen	203
7.3.4. Untersuchung des Kurvenverlaufs der ganzen rationalen Funktionen mit Hilfe der Ableitungen	207
7.3.4.1. Wiederholung	207
7.3.4.2. Steigen und Fallen der Funktion und ihres Graphen – Extremstellen	207
7.3.4.3. Rechtskurve und Linkskurve – Wendestellen	210
7.3.4.4. Schematische Übersicht	212
7.3.5. Kurvendiskussion	213
7.3.5.1. Das Verlaufsschema einer Kurvendiskussion	213
7.3.5.2. Untersuchung einer Funktion	213
7.3.5.3. Festlegung von ganzen rationalen Funktionen durch angegebene Bedingungen	216
7.3.6. Extremwertprobleme	222
7.4. Die Differentialrechnung auf der Menge der gebrochenen rationalen und irrationalen Funktionen	226
7.4.1. Die gebrochenen rationalen Funktionen	226
7.4.1.1. Quotientenregel	227
7.4.1.2. Kettenregel	228
7.4.1.3. Kurvendiskussion	229

7.4.1.4. Extremwertprobleme	232
7.4.2. Die Wurzelfunktionen	236
7.4.2.1. Die Wurzelfunktion als Potenzfunktion	236
7.4.2.2. Die Ableitung von Umkehrfunktionen	237
7.4.2.3. Ableitungsregeln	238
7.4.2.4. Kurvendiskussion	239
7.4.2.5. Extremwertprobleme	242
7.4.3. Die trigonometrischen Funktionen	245
7.4.3.1. Besondere Grenzwerte	245
7.4.3.2. Ableitungen der trigonometrischen Funktionen	245
7.4.3.3. Kurvendiskussion	247
7.4.3.4. Extremwertprobleme	250
7.4.4. Exponential- und Logarithmusfunktion	252
7.4.4.1. Die Ableitung der e-Funktion $x \mapsto y = e^x$	252
7.4.4.2. Die Ableitung der Logarithmusfunktion $x \mapsto y = \ln x$	253
7.4.4.3. Die Ableitung zusammengesetzter Funktionen	254

8. Integralrechnung

8.1. Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung	257
8.1.1. Der Begriff der Stammfunktion	257
8.1.2. Stammfunktionen der Grundfunktionen	258
8.1.3. Stammfunktionen der ganzen rationalen Funktionen	259
8.1.4. Die Stammfunktion als unbestimmtes Integral	259
8.2. Das bestimmte Integral als Fläche	260
8.2.1. Fläche zwischen Kurve und x-Achse	260
8.2.2. Fläche zwischen zwei Kurven	268
8.3. Das bestimmte Integral als Arbeit	272
8.4. Das bestimmte Integral als Rauminhalt	274
Lösungen	280
Stichwortverzeichnis	319