

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	1
<b>2 Punktkinematik</b>	2
2.1 Ortsvektor, Linienelement und Tangentenvektor	2
2.2 Geschwindigkeitsvektor	3
2.3 Beschleunigungsvektor, Hauptnormalenvektor und Krümmung	4
2.4 Binormalenvektor und Verwindung	6
2.5 Übergang auf allgemeine Koordinaten	6
2.6 Sechs Grundaufgaben bei gegebener Bahn	10
2.7 Relativbewegung	11
2.8 Ebene Relativbewegung	13
2.9 Ebene Relativbewegung in Komponenten	14
2.10 Spezielle ebene Bewegungen	15
2.10.1 Translation des Bezugssystems	15
2.10.2 Rotation des Bezugssystems	15
2.10.3 Kreisbewegung	15
2.10.4 Ebene Bewegung in Polarkoordinaten	16
2.11 Beispiele	18
2.11.1 Begegnung von zwei Fahrzeugen	18
2.11.2 Bewegung mit konstanter Tangentialbeschleunigung	20
2.11.3 Bewegung mit geschwindigkeitsabhängiger Tangentialbeschleunigung	20
2.11.4 Geschwindigkeitsmessung bei Flugzeugen	21
2.11.5 Flügüberquerung	22
2.11.6 Spiraltbewegung	23
<b>3 Kinetik des Massenpunktes</b>	25
3.1 Die Newtonschen Gesetze	25
3.2 Kinetische Grundgleichung	26
3.3 Masse und Gravitation	26
3.4 Trägheitskraft und d'Alembertsche Hilfskraft	27
3.5 Drehimpulssatz	28
3.6 Arbeit, Energie und Leistung	29
3.7 Aufteilung des Systems	31
3.8 Prinzip der virtuellen Arbeit und Prinzip von d'ALEMBERT	33
3.9 Äußeres Kräftepotential, elastisches Potential und Zwangsbedingungen	34
3.10 Nicht-konservative Kräfte	36
3.11 Die Gleichungen von LAGRANGE	37

3.12 Die Lagrange-Rayleigh-Gleichungen . . . . .	37
3.13 Wichtige Lösungsverfahren . . . . .	38
3.14 Beispiele . . . . .	38
3.14.1 Anfahren eines Fahrstuhles . . . . .	38
3.14.2 Freier Fall mit und ohne Luftwiderstand . . . . .	40
3.14.3 Wurfbahn einer Punktmasse bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes . . . . .	41
3.14.4 Schuß auf fliegendes Objekt . . . . .	44
3.14.5 Punktmasse auf schiefer Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit . . . . .	46
3.14.6 Punktmasse auf schiefer Ebene mit beliebigem Anfangsgeschwindigkeitsvektor . . . . .	48
3.14.7 Punktmasse auf schiefer Ebene mit Coulombreibung und Anfangsgeschwindigkeit in Gefällerichtung . . . . .	49
3.14.8 Punktmasse auf schiefer Ebene mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung und Anfangsgeschwindigkeit in Gefällerichtung . . . . .	49
3.14.9 Punktmasse auf schiefer Ebene mit Coulombreibung und beliebigem Anfangsgeschwindigkeitsvektor . . . . .	51
3.14.10 Punktmasse auf schiefer Ebene mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung und beliebigem Anfangsgeschwindigkeitsvektor . . . . .	51
3.14.11 Grenzgeschwindigkeiten eines Personenwagens auf gekrümmter und überhöhter Fahrbahn . . . . .	52
3.14.12 Kurbeltrieb mit Punktmasse . . . . .	53
3.14.13 Antriebskraft und Zwangskraft bei der Bewegung einer Punktmasse auf spiralförmiger Bahn . . . . .	54
3.14.14 Punktmasse auf einer Kegelfläche . . . . .	55
3.14.15 Punktmasse auf rollender oder gleitender Kreisscheibe . . . . .	59
3.14.16 Freier Fall eines Meteors . . . . .	61
3.14.17 Freier Fall mit Berücksichtigung der Erddrehung . . . . .	62
3.14.18 Punktmasse im rotierenden System . . . . .	66
<b>4 Schwingungen der Punktmasse . . . . .</b>	<b>68</b>
4.1 Freie Schwingungen der Punktmasse mit einem Freiheitsgrad . . . . .	68
4.1.1 Punktmasse im elastischen System . . . . .	68
4.1.2 Mathematisches Pendel . . . . .	73
4.1.3 Punktmasse im elastischen System mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung . . . . .	76
4.1.4 Punktmasse im elastischen System mit konstanter Dämpfungskraft . . . . .	81
4.2 Erzwungene Schwingungen der Punktmasse mit einem Freiheitsgrad . . . . .	83
4.2.1 Kinematisch erregte Schwingungen der Punktmasse im elastischen System . . . . .	83
4.2.2 Dynamisch erregte Schwingungen der Punktmasse im elastischen System . . . . .	87
4.2.3 Kinematisch erregte Schwingungen der Punktmasse im elastischen System bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung . . . . .	89
4.2.4 Dynamisch erregte Schwingungen der Punktmasse im elastischen System bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung . . . . .	95

4.2.5	Beliebig erregte Schwingungen der Punktmasse im elastischen System bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung	96
4.3	Beispiele	97
4.3.1	Verschiedene Federanordnungen	97
4.3.2	Feder-Dämpfer-Systeme als rheologische Modelle	99
4.3.3	Punktmasse an vier Federn und einem Dämpfer	102
4.3.4	Pendel mit Feder	104
4.3.5	Sphärisches Pendel	104
4.3.6	Einfluß der Erddrehung bei Pendelschwingungen (Versuch von FOUCault)	108
4.3.7	Isochrones Pendel (Zykloidenpendel)	110
4.3.8	Kinematisch erregtes Masse-Feder-System mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung	112
4.3.9	Dynamisch erregtes Masse-Feder-System mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung	113
4.4	Bewegung der Punktmasse bei mehreren Freiheitsgraden	113
5	Punktmassenkinetik	113
5.1	Definitionen	113
5.2	Gleichgewicht der Einzelmasse	114
5.3	Schwerpunktsatz	115
5.4	Impulssatz	115
5.5	Drehimpulssatz	117
5.6	Energiesatz	118
5.7	Aufteilung des Systems, Prinzip der virtuellen Arbeit und Prinzip von D'ALEMBERT	119
5.8	Übergang auf allgemeine Koordinaten	124
5.9	Gleichungen von LAGRANGE und RAYLEIGH	125
5.10	Hamiltonsches Prinzip	126
5.11	Stoßvorgänge	127
5.11.1	Gerader Stoß ohne Energieverlust	127
5.11.2	Gerader Stoß mit Energieverlust	129
5.12	Planetenbewegung und Zweikörperproblem	131
5.13	Systeme mit veränderlicher Gesamtmasse	140
5.13.1	Behandlung von Systemen mit stetig veränderlicher Gesamtmasse	140
5.13.2	Raketenprobleme	141
5.14	Beispiele	144
5.14.1	Zwei gekoppelte Punktmassen mit zwei Federn	144
5.14.2	Zwei Massen an vier Federn und zwei Dämpfern	146
5.14.3	Gekoppelte Pendel	148
5.14.4	Doppelpendel	150
5.14.5	Messung der Erdbeschleunigung (Fallmaschine von Atwood)	152
5.14.6	Vier Massen an einem über fünf Rollen geführten Seil	153
5.14.7	Umsteigen einer Person aus einem fahrenden Boot in ein anderes	154
5.14.8	Freier Fall auf elastische Unterlage	155
5.14.9	Stoß beim Rangieren von Eisenbahnwagen	158
5.14.10	Wagen mit Flüssigkeitsbehälter	163
5.14.11	Aus horizontaler Lagerung herabgleitende Kette	164
5.15	Lineare Elastokinetik	167
5.15.1	Definitionen und Ausgangsgleichungen für Dehnschwingungen	167

5.15.2	Kinematisches Verfahren für Dehnschwingungen . . . . .	170
5.15.3	Verfahren der inneren Kraftgrößen für Dehnschwingungen .	171
5.15.4	Regeln für die Eigenfrequenzen . . . . .	174
5.15.5	Vergleich des Verfahrens der inneren Kraftgrößen mit dem kinematischen Verfahren . . . . .	180
5.15.6	Orthogonalität der Eigenschwingungen . . . . .	181
5.16	Linear-elastische longitudinal schwingende Punktmassenketten und Drehschwingungssysteme . . . . .	182
5.16.1	Matrix der Richtungskosinus, Steifigkeitsmatrix und inverse Massenmatrix . . . . .	182
5.16.2	Untere und obere Schranken der Eigenfrequenzen . . . . .	183
5.16.3	Übergang zu linear-elastischen Drehschwingungssystemen .	185
5.16.4	Zeichnerisches Verfahren von BARANOW . . . . .	187
5.16.5	Homogene linear-elastische Punktmassen- und Drehschwingungsketten . . . . .	196
5.16.6	Homogene linear-elastische Punktmassen- und Drehschwingungsketten mit Zusatzmasse . . . . .	198
5.17	Biegeschwingungen und kritische Drehzahlen linear-elastischer Stäbe mit Punktmassenbelegung . . . . .	200
5.17.1	Zusammenhang der Biegeeigenfrequenzen mit den kritischen Drehzahlen . . . . .	200
5.17.2	Kinematisches Verfahren . . . . .	202
5.17.3	Verfahren der inneren Kraftgrößen . . . . .	203
5.17.4	Verfahren der Übertragungsmatrizen . . . . .	207
5.17.5	Näherungsformeln für Biegeeigenfrequenzen und kritische Drehzahlen von Stäben mit Punktmassenbelegung . . . . .	210
5.18	Beispiele . . . . .	214
5.18.1	Punktmasse mit zwei Freiheitsgraden . . . . .	214
5.18.2	Drei Massen an drei Federn . . . . .	217
5.18.3	Ebenes System mit vier Massen und fünf Federn . . . . .	220
5.18.4	Räumliches System mit vier Massen und sechs Federn . . . . .	220
5.18.5	Beiderseits freies Zweimassensystem . . . . .	221
5.18.6	Beiderseits freie Dreimassenkette . . . . .	221
5.18.7	Einseitig eingespannte Zweimassenkette . . . . .	221
5.18.8	Beiderseits freie Kette aus vier Drehmassen . . . . .	222
5.18.9	Homogene Drehschwingungskette mit sechs Drehmassen und einer Zusatzdrehmasse . . . . .	222
5.18.10	Einseitig eingespannter Biegestab mit Punktmasse . . . . .	223
5.18.11	Beiderseits drehbar gelagerter Biegestab mit Punktmasse .	224
5.18.12	Beiderseits eingespannter Biegestab mit Punktmasse . . . . .	225
5.18.13	Biegestab mit Punktmasse, an einem Ende verschieblich, am anderen Ende eingespannt . . . . .	226
5.18.14	Biegestab mit zwei Punktmassen, beiderseits drehbar gelagert . . . . .	227
5.18.15	Biegestab mit drei Punktmassen, beiderseits frei . . . . .	228
5.18.16	Biegestab mit vier Punktmassen, beiderseits frei . . . . .	229
6	Elastische Kontinua . . . . .	230
6.1	Zug- und Torsionsstab mit kontinuierlicher Massenbelegung . . . . .	230
6.2	Longitudinal- und Torsionswellen im homogenen Stab . . . . .	232
6.3	Longitudinal- und Torsionsschwingungen des homogenen Stabes . . . . .	233

6.4	Longitudinal- und Torsionsschwingungen des homogenen Stabes mit Zusatzmasse . . . . .	235
6.5	Biegeschwingungen und kritische Drehzahlen von Stäben mit kontinuierlicher Massenbelegung . . . . .	236
6.6	Räumliche Wellenbewegungen . . . . .	238
6.6.1	Grundgleichungen der linearen Elastokinetik des räumlichen Kontinuums . . . . .	238
6.6.2	Longitudinalwellen im linear-elastischen räumlichen Kontinuum . . . . .	239
6.6.3	Transversalwellen im linear-elastischen räumlichen Kontinuum . . . . .	240
6.6.4	Oberflächenwellen . . . . .	240
6.7	Beispiele . . . . .	241
6.7.1	Longitudinale Eigenschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes mit konstanter Zugsteifigkeit und gleichmäßiger Massenbelegung . . . . .	241
6.7.2	Torsioneigenschwingungen eines an einem Ende freien Stabes mit konstanter Torsionssteifigkeit und gleichmäßiger Drehmassenbelegung, sowie einer am anderen Ende über einen Zusatzstab angeschlossenen Zusatzdrehmasse . . . . .	241
6.7.3	Beiderseits drehbar gelagerter Biegestab mit konstanter Biegesteifigkeit und gleichmäßiger Massenbelegung . . . . .	242
6.7.4	Freier Biegestab mit konstanter Biegesteifigkeit und gleichmäßiger Massenbelegung . . . . .	243
7	Der starre Körper . . . . .	246
7.1	Kinematik des starren Körpers . . . . .	246
7.2	Schwerpunkt, Impuls und Impulssatz . . . . .	247
7.3	Drehimpuls und Tensor der Massenträgheitsmomente . . . . .	248
7.4	Trägheitshauptachsen und Hauptträgheitsmomente . . . . .	251
7.5	Drehimpulssatz . . . . .	253
7.6	Kinetische Energie und Energiesatz . . . . .	254
7.7	Kräftefreier Kreisel, Trägheits- und Drallellipsoid . . . . .	256
7.8	Der kräftefreie symmetrische Kreisel . . . . .	260
7.9	Der schwere symmetrische Kreisel . . . . .	262
7.9.1	Reguläre Präzession . . . . .	263
7.9.2	Allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels	265
7.10	Ebene Bewegung des starren Körpers . . . . .	268
7.10.1	Ersatz eines in ebener Bewegung befindlichen starren Körpers durch ein Zweimassensystem . . . . .	268
7.10.2	Physikalisches Pendel . . . . .	270
7.10.3	Exzentrischer Stoß . . . . .	272
7.10.3.1	Exzentrischer Stoß einer Punktmasse auf einen starren Körper mit fester Drehachse . . . . .	272
7.10.3.2	Exzentrischer Stoß einer Punktmasse auf einen starren, in einer Ebene beweglichen Körper . . . . .	273
7.10.4	Die optimale Pleuelstange . . . . .	274
7.11	Beispiele . . . . .	275
7.11.1	Kreiszylinder auf schiefer Ebene . . . . .	275
7.11.2	Elektrolokomotive bei Kurvenfahrt . . . . .	277
7.11.3	Auf einer Kreisbahn rollendes Rad mit geführter Achse . . . . .	280
7.11.4	Rotierende Scheibe auf biegsamer Welle . . . . .	281

7.11.5 Exzentrisch aufgehängter Stab . . . . .	283
7.11.6 Exzentrisch aufgehängte Rechteckplatte . . . . .	283
7.11.7 Stab mit Kreisscheibe . . . . .	284
7.11.8 Stab mit Kugel . . . . .	285
7.11.9 Physikalisches Doppelpendel . . . . .	285
7.11.10 Doppelpendel aus zwei Stäben . . . . .	286
<b>Anhang . . . . .</b>	<b>287</b>
A 1 Einheiten der Technischen Mechanik . . . . .	287
A 2 Einige Regeln für Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungen . . . . .	288
A 2.1 Matrizen . . . . .	288
A 2.2 Determinanten . . . . .	289
A 2.3 Lineare Gleichungen . . . . .	291
<b>Schrifttum . . . . .</b>	<b>293</b>
<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>294</b>