

# Inhaltsverzeichnis

## I. Komplex differenzierbare Funktionen (Cauchysche Theorie)

§ 1	Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	1
1.	Definition der komplexen Zahlen . . . . .	1
2.	Die Bewertung des Körpers $\mathbb{C}$ . . . . .	4
3.	Topologisierung von $\mathbb{C}$ . . . . .	5
4.	Polarkoordinaten . . . . .	7
5.	Die Einzigkeit von $\mathbb{C}$ . . . . .	9
§ 2	Komplex differenzierbare Funktionen . . . . .	11
1.	Der Kalkül der Wirtingerschen Ableitungen . . . . .	11
2.	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	19
3.	Beispiele . . . . .	24
§ 3	Kurvenintegrale . . . . .	27
1.	Stückweise stetig differenzierbare Wege . . . . .	27
2.	Zusammenhang und Wegzusammenhang . . . . .	29
3.	Differentialformen . . . . .	31
4.	Kurvenintegrale . . . . .	32
§ 4	Stammfunktionen und Homotopie von Wegen . . . . .	36
1.	Totales Differential und Stammfunktion . . . . .	36
2.	Lokale Integrabilität . . . . .	43
3.	Homotopie von Wegen . . . . .	44
4.	Ein Fortsetzungssatz . . . . .	48
§ 5	Cauchyscher Integralsatz . . . . .	50
1.	Reell stetig differenzierbare Funktionen . . . . .	50
2.	Cauchyscher Integralsatz . . . . .	51
§ 6	Der Index eines geschlossenen Weges . . . . .	54
§ 7	Die Cauchysche Integralformel . . . . .	58
1.	Cauchysche Integralformel . . . . .	58
2.	Satz von Morera . . . . .	63
3.	Riemannscher Hebbarkeitssatz . . . . .	63

§ 8 Die logarithmische Ableitung . . . . .	65
1. Definitionen . . . . .	65
2. Homomorphismen . . . . .	65
3. Verknüpfung der Homomorphismen . . . . .	67
4. Der Logarithmus . . . . .	69

## II. Holomorphe Funktionen (Weierstraßscher Standpunkt)

§ 1 Bewertete Körper . . . . .	72
1. Bewertungen . . . . .	72
2. Beispiele nicht-trivial bewerteter Körper . . . . .	73
3. Archimedische und nicht-archimedische Bewertungen . . . . .	76
4. Die Bewertungen des Körpers $\mathbb{Q}$ . . . . .	78
5. Bewertungstopologie und Vollständigkeit . . . . .	79
§ 2 Formale Potenz- und Laurentreihen . . . . .	86
1. Definitionen . . . . .	86
2. Substitutionshomomorphismen . . . . .	91
3. Formale Differentiation . . . . .	95
§ 3 Analytische $k$ -Algebren . . . . .	100
1. Die Algebren $B_i$ und $A_i$ . . . . .	100
2. Beispiele . . . . .	105
3. Analytische Substitutionshomomorphismen und Differentialoperatoren . . . . .	108
4. Topologische Eigenschaften der analytischen Algebren . . . . .	112
5. Satz von Montel für analytische Algebren . . . . .	115
§ 4 Holomorphe Funktionen . . . . .	118
1. Funktionentheoretische Interpretation der Algebren $A_i$ und $B_i$ . . . . .	118
2. Identitätssatz für Potenzreihen und Supremumsnorm . . . . .	123
3. Der Raum der holomorphen Funktionen . . . . .	126
4. Identitätssatz für holomorphe Funktionen . . . . .	132
5. Differentiation holomorpher Funktionen . . . . .	133
6. Die Holomorphie der komplex differenzierbaren Funktionen . . . . .	135
§ 5 Die Algebra der konvergenten Potenzreihen . . . . .	138
1. Die Algebra $k\langle X \rangle$ . . . . .	138
2. Die $k$ -Algebra-Homomorphismen . . . . .	140
3. Der Endlichkeitssatz für analytische Homomorphismen . . . . .	142
§ 6 Funktionentheoretische Folgerungen aus dem Endlichkeitssatz . . . . .	146
1. Die lokale Gestalt holomorpher Abbildungen . . . . .	146
2. Funktionentheoretische Folgerungen im Komplexen . . . . .	151

**III. Laurentreihen, Singularitäten und Fortsetzbarkeit**

§ 1 Laurententwicklung . . . . .	156
1. Unendliche Laurentreihen . . . . .	156
2. Cauchysche Ungleichungen . . . . .	160
3. Eindeutigkeit der Laurententwicklung . . . . .	164
4. Existenz der Laurententwicklung . . . . .	165
5. Ganze Funktionen . . . . .	169
§ 2 Isolierte Singularitäten . . . . .	172
1. Der Begriff der Singularität . . . . .	172
2. Klassifikation der isolierten Singularitäten . . . . .	175
3. Meromorphe Funktionen . . . . .	181
§ 3 Fortsetzung holomorpher Funktionen . . . . .	184
1. Holomorphe Ergänzung reeller Funktionen . . . . .	184
2. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip . . . . .	189
3. Analytische Fortsetzung längs Wegen . . . . .	191
§ 4 Residuensatz und Anwendungen . . . . .	200
1. Der Residuensatz . . . . .	200
2. Null- und Polstellenordnung . . . . .	203
3. Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes . . . . .	205

**IV. Normale Familien**

§ 1 Konvergente Funktionenfolgen . . . . .	210
1. Kompakte Konvergenz . . . . .	210
2. Folgen schlichter Funktionen . . . . .	214
§ 2 Topologie in Funktionenräumen . . . . .	216
1. Topologisierung von $C(U)$ . . . . .	216
2. Metrisierung von $C(U)$ . . . . .	217
3. Neuformulierung der Ergebnisse aus § 1 . . . . .	222
§ 3 Satz von Montel für holomorphe Funktionen . . . . .	223
1. Satz von Montel für Folgen . . . . .	223
2. Beschränkte Mengen in $H(U)$ . . . . .	225
3. Konvergenzkriterien für Folgen in $H(G)$ . . . . .	227

**Anhang. Topologische Hilfsmittel**

1. Topologische Räume . . . . .	230
2. Kompaktheit, Konvergenz . . . . .	232
3. Metrische Räume . . . . .	233
4. Banachräume und Banachalgebren . . . . .	236

Literatur . . . . .	239
Symbolverzeichnis . . . . .	240
Sachverzeichnis . . . . .	241