

Inhaltsverzeichnis

I Teil I. Elastostatik (oder: Festigkeitslehre)

1	Spannungen	3
1.1	Zulässige Spannungen	6
1.1.1	AbleSEN von zulässigen Spannungen	6
1.1.2	Wöhlerversuch	6
1.1.3	Smith-Diagramm (Dauerfestigkeitsschaubild)	8
1.1.4	Zeitliche Änderung der Spannungen	8
1.1.5	Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Zugversuch	9
1.1.6	Hooke'sches Gesetz	19
1.2	Vorhandene Spannungen und Festigkeitsnachweis	19
1.2.1	Grundlagen	19
1.3	Spannungsarten	20
1.3.1	Normalspannungen	20
1.3.2	Tangentialspannungen	20
1.4	Spannungsverteilung	20
1.4.1	Gleichmäßige Spannungsverteilung	20
1.4.2	Lineare Spannungsverteilung	21
1.5	Übungen	24
2	Zug- und Druckbeanspruchung	31
2.1	Druck- und Zugspannung	34
2.1.1	Bei konstantem Querschnitt	34
2.1.2	Bei variablem Querschnitt	41
2.1.3	Stab optimaler Druckspannung	45
2.2	Formänderung infolge Druck- und Zugbeanspruchung	48
2.2.1	Einzelstab, $A = \text{const.}$	48
2.2.2	Querdehnung, Querkontraktion	49
2.2.3	Kompressionsmodul	55
2.2.4	Lamé-Konstanten	55
2.2.5	Wärmeausdehnung	56
2.3	Einzelstab, etwas allgemeiner	63
2.3.1	Spannungsverhalten im Stab	63
2.3.2	Formänderung im Stab	64
2.3.3	Gleichung für die Verschiebung	64
2.4	Statisch bestimmte Stabsysteme	64
2.5	Statisch unbestimmte Stabsysteme	69
2.6	Finite Elemente Methode	73
2.6.1	Analytische Methode als Referenz	75
2.6.2	Näherungslösung	76
2.6.3	FEM	77
2.6.4	FEM-Simulation mit SolidWorks	79
2.6.5	Steifigkeitsmatrix für schräge Stäbe	81
2.7	Übungen	83

3	Kontaktmechanik	89
3.1	Flächenpressung auf ebene Flächen	92
3.2	Flächenpressung bei gleichsinnig gekrümmten Flächen:	92
3.2.1	Flächenpressung bei Wellenzapfen (Lagerzapfen)	92
3.2.2	Flächenpressung/Lochleibungsdruck bei Nieten und Bolzen:	93
3.2.3	Flächenpressung bei Gewindeflanken	93
3.3	Der reale Fall	94
3.4	Flächenpressung an gegenseitig gekrümmten Flächen – Hertz'sche Flächenpressung	95
3.4.1	Gleichungen	96
3.4.2	Fall: Kugel–Kugel; Kugel–Ebene	96
3.4.3	Fall: Zylinder–Zylinder; Zylinder– Ebene	96
3.5	Pressung mithilfe von FEM ermitteln	97
3.5.1	Bei gleichsinnigen Flächen	97
3.5.2	Bei gegensinnigen Flächen	97
3.6	Übungen	103
4	Flächen- und Widerstandsmomente	109
4.1	Widerstandsmoment	112
4.2	Flächenmomente, 1. Ordnung	112
4.3	Flächenmomente, 2. Ordnung	113
4.3.1	Axiales und polares Flächenmoment	113
4.3.2	Flächenmoment bekannter Flächen	114
4.3.3	Überblicke und Tabellen für I_A und I_P	119
4.4	Bredt'sche Formel	121
4.4.1	1. Bredt'sche Formel	121
4.4.2	2. Bredt'sche Formel	121
4.4.3	Anwendung: Torsion	121
4.5	Deviationsmoment	123
4.6	Satz von Steiner	123
4.7	Zusammengesetzte Flächen	124
4.8	Flächenmomente bezogen auf eine beliebige Schwerachse	124
4.9	Hauptachsen bei Flächenträgheitsmomente	126
4.9.1	Grundlagen	126
4.9.2	Berechnung der Hauptachsen	127
4.10	Ermittlung Computerunterstützt	129
4.10.1	Hauptträgheitsmomente und Trägheitswinkel	129
4.10.2	Trägheitsmoment mittels SolidWorks	130
4.11	Übungen	130
5	Abscher- und Schubbeanspruchung	147
5.1	Abscherung	149
5.1.1	Einfache Abscherung	149
5.1.2	Zulässige Abscherspannung	149
5.1.3	Formänderung	149
5.2	Schubspannungen infolge Querkraftbiegung	150
5.2.1	Satz zugeordneter Schubspannungen	150
5.2.2	Lage des Schubmittelpunktes	162
5.2.3	Arten von Belastungen auf Träger, Schub	163
5.2.4	Geschlitzte, dünnwandige offene Kreisquerschnitte	164
5.2.5	Bedeutung der Schubspannungen	166

5.3	Verformungen infolge Schubbeanspruchung	167
5.3.1	Herleitung	167
5.3.2	Schubkorrekturfaktor	169
5.3.3	Beispiel	169
5.4	Balkentheorie nach Bernoulli und Timoschenko	171
5.4.1	Euler-Bernoulli-Balkentheorie	171
5.4.2	Timoschenko-Balkentheorie	172
5.5	Übungen	172
6	Spannungs- und Verzerrungszustand	183
6.1	Grundlagen	185
6.1.1	Hydrostatischer Spannungsanteil	185
6.1.2	Spannungsdeviator	186
6.2	Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	186
6.2.1	Cauchy'sches Fundamentaltheorem	186
6.2.2	Lokales Gleichgewicht	188
6.2.3	Verschiebung	189
6.2.4	Verzerrungs-Beziehungen	189
6.3	Koordinatentransformation	190
6.3.1	Grundlagen	190
6.3.2	Mohr'scher Spannungskreis	191
6.4	Dünnwandige Behälter, unter Innendruck	201
6.4.1	Träger unter Last	201
6.4.2	Kräfte in Druckbehälter	202
6.4.3	Zylindrischer Druckbehälter	203
6.4.4	Kugelförmiger Druckbehälter	204
6.4.5	Ermittlung durch FEM	204
6.5	Verzerrungszustand	207
6.5.1	Mehrachsiges Verzerrungszustand	208
6.6	Übungen	210
7	Biegebeanspruchung	225
7.1	Grundlagen der Biegung	230
7.1.1	Reine, gerade und schiefe Biegung	230
7.1.2	Plastische Stützwirkung	230
7.1.3	Herleitung der Biegespannungshauptgleichung	231
7.1.4	Biegespannungsformel	233
7.1.5	Ermittlung der Parameter in der Biegespannungsformel	233
7.1.6	Dimensionierung einer Welle	234
7.2	Schnittgrößen in der Ebene	234
7.2.1	Definitionen	234
7.2.2	Balken mit Einzellast (zweimal gelagert)	235
7.2.3	Diagramme	237
7.2.4	Maximales Biegemoment	245
7.2.5	Kragträger	247
7.2.6	Balken mit mehreren Kräften	247
7.2.7	Balken mit Streckenlasten (Rechtecklasten)	249
7.2.8	Eingeleitete Moment	251
7.2.9	Lagerverschiebung	252
7.3	Schnittgrößen im Raum	253
7.3.1	Momente als Momentenvektoren	253

7.3.2	Verschiebung	253
7.3.3	Kontrolle	253
7.3.4	Beispiele	253
7.4	Spezielle Tragwerke	257
7.4.1	Dreieckslast	257
7.4.2	Trapezlast	258
7.4.3	Parabellast	259
7.4.4	Elliptische Last	259
7.4.5	Bogen	259
7.4.6	Zusammengesetzte Tragwerke	260
7.5	Biegung bei veränderlichem Querschnitt	263
7.6	Träger gleicher Biegespannung	264
7.6.1	Anformgleichung	264
7.6.2	Freiträger, Kreisquerschnitt, Einzellast	265
7.6.3	Freiträger, Rechteckquerschnitt, $b = \text{const.}$, Einzellast	269
7.6.4	Freiträger, Rechteckquerschnitt, konstante Höhe, Einzellast	269
7.6.5	Freiträger, Rechteckquerschnitt, konstante Höhe, Streckenlast	270
7.6.6	Freiträger, Rechteckquerschnitt, $d = \text{const.}$, Dreieckslast	271
7.7	Grundlagen Formänderung	271
7.7.1	Krümmungsradius ρ_x	271
7.7.2	Krümmung κ	272
7.7.3	Durchbiegung f und Neigungswinkel der Endtangente α	272
7.7.4	Weiteres zum Schubmittelpunkt.	273
7.8	Zweiachsige – oder schiefe Biegung	273
7.8.1	Darstellungsbeispiel von schiefer Biegung	273
7.8.2	Spannungen bei schiefer Biegung	273
7.8.3	Berechnung der Spannungen bei schiefer Biegung	274
7.8.4	Bestimmung der Nulllinie	275
7.8.5	Doppelte Biegung	276
7.9	Verläufe eines Gerberträgers	276
7.10	Statisch unbestimmte Systeme	280
7.10.1	Anwendungsbeispiel: dreifach gelagerter Träger, Biegeträger	280
7.10.2	Ergänzung	282
7.11	Die elastische Linie	282
7.11.1	Krümmung	282
7.11.2	Differentialgleichung der Biegelinie, vereinfacht.	285
7.11.3	Durchbiebungsgleichung statisch bestimmt, am Kragträger	285
7.11.4	Durchbiebungsgleichungen statisch bestimmt, Stützträger	291
7.11.5	Durchbiebungsgleichungen zusammengesetzter Systeme	299
7.11.6	L-Rahmen mit Streckenlast $I \cdot E = \text{const.}$	302
7.11.7	L-Rahmen mit Streckenlast $I \cdot E \neq \text{const.}$	302
7.11.8	Interpretation der Durchbiebungsgleichungen	303
7.11.9	Durchbiegung, wenn $EI \neq \text{const.}$	303
7.11.10	Durchbiebungsgleichungen (statisch unbestimmt)	304
7.11.11	Computergestützte Methode	307
7.11.12	Klammersymbol von Föppl	310
7.11.13	Verformungen infolge schiefer Biegung	313
7.11.14	Gleichungen einiger Balken	315
7.12	Elastisch gebetteter Träger	317
7.12.1	Analytische Lösung	317
7.12.2	Differenzenverfahren	326

7.13	Der gekrümmte Träger	336
7.13.1	Schnittgrößen	336
7.13.2	Spannungen beim gekrümmten Träger	339
7.13.3	Verschiebungen	344
7.14	Übungen	348
8	Torsionsbeanspruchung	363
8.1	Grundlagen	365
8.1.1	Herleitung der Grundformel	366
8.1.2	Formänderung infolge Torsionsbeanspruchung	367
8.1.3	Zulässige Verdrehwinkel	367
8.1.4	Formänderungsarbeit bei Torsion	368
8.1.5	Festigkeitsnachweis bei Torsion	368
8.1.6	Verlauf bei Torsionsbeanspruchung	369
8.1.7	Torsionsfederkonstanten	369
8.1.8	Beispiel einer Getriebewelle	369
8.2	Torsion nach St. Venant	375
8.2.1	St.-Venant'sche Torsionstheorie	376
8.2.2	Dünne, geschlossene Querschnitte	378
8.2.3	Dünne, offene Querschnitte	380
8.3	Wölbkrafttorsion	385
8.3.1	St. Venant'sche Torsion-Grundgleichungen und Erweiterungen	387
8.3.2	Querkraftschub	387
8.3.3	Potentialgleichung und deren Lösung	388
8.3.4	Potentialgleichung und deren Lösung	389
8.3.5	Lösungsansatz und Gleichung des tordierten Stabes	390
8.3.6	Bestimmung der sekundären Schubspannungen	391
8.4	Übungen	393
9	Zusammengesetzte Beanspruchungen	397
9.1	Gleichartige Beanspruchung	399
9.1.1	Allgemeines	399
9.1.2	Normalspannungen (1, 2, 3)	399
9.1.3	Schubspannungen (4, 5, 6)	402
9.2	Ungleichartige Beanspruchung	404
9.2.1	Hypothese der größten Gestaltänderungsarbeit	404
9.2.2	Hypothese der größten Normalspannung (Rankine)	405
9.2.3	Hypothese der größten Schubspannung	406
9.2.4	Zusammenfassung	406
9.2.5	MISES Vergleichsspannung	406
9.2.6	TRESCA Vergleichsspannung	406
9.2.7	Beispiel	406
9.3	Spannungsraum und Fließbedingungen	410
9.3.1	Fließbedingungen	410
9.3.2	Fließbedingung nach von Mises (Gestaltänderungsenergiehypothese)	410
9.3.3	Fließbedingung nach Tresca (Schubspannungshypothese)	411
9.3.4	Fließbedingung nach Burzyński-Yagn	411
9.3.5	Fließbedingung nach Huber	412
9.3.6	Fließbedingung nach Mao-Hong Yu	412
9.4	Übungen	413

10	Stabilitätsprobleme	415
10.1	Biegeknickung	419
10.1.1	Ursachen von Knickung	419
10.1.2	Euler'sche Knickfälle	419
10.1.3	Dimensionierung bei Knickung	423
10.1.4	Grenzschlankheitsgrad λ_0	423
10.1.5	Eulerbedingung	423
10.1.6	Elastische Biegeknickung	424
10.1.7	Überprüfung von Knickung	425
10.1.8	Anwendungsbeispiel zu Knickung	426
10.1.9	Knickung mittels FEM	426
10.2	Zweiachsiges Biegeknicken	435
10.3	Biegedrillknicken (Kippen)	435
10.3.1	Auftreten von Kippen	435
10.3.2	Herleitung der Kippformel	435
10.3.3	Herleitung der Kippformel	437
10.3.4	Übersicht Kippen	438
10.3.5	Kippen mittels FEM	440
10.4	Beulen	442
10.4.1	Grundlagen	442
10.4.2	Schalenbeulen	443
10.4.3	Beulgleichung	443
10.4.4	Lösung der Beulgleichung	444
10.4.5	Beulen mittels FEM	446
10.5	Übungen	452
11	Arbeitsbegriff in der Elastostatik	457
11.1	Differentielle Arbeit	458
11.1.1	Arbeitssatz der Statik	458
11.1.2	Formänderungsarbeit	459
11.2	Sätze von Castigliano und Menabrea	459
11.2.1	Satz von Castigliano	459
11.2.2	Satz von Menabrea	461
11.2.3	Anwendung	461
11.3	Sätze von Betti und Maxwell	462
11.3.1	Voraussetzungen und Anwendung	462
11.3.2	Satz von Betti	463
11.3.3	Satz von Maxwell	463
11.3.4	Anwendung	463
11.4	Übungen	465

**II Teil II. Grundlagen der Höheren Mechanik:
Kontinuumsmechanik in der Elastostatik**

12	Tensoren und Grundlagen der Tensorrechnung	469
12.1	Tensorbegriff	471
12.1.1	Levi-Civita-Symbol	471
12.1.2	Symbolische Darstellung	471
12.1.3	Orthonormierte Basisvektoren als Tensorbasis	471
12.2	Tensoralgebra	472
12.2.1	Tensoraddition	472
12.2.2	Tensormultiplikation	472
12.2.3	Einfaches Skalarprodukt (inneres Produkt)	472
12.2.4	Doppeltes Skalarprodukt	473
12.3	Tensorkoordinatentransformation	473
12.3.1	Drehtransformation eines Punktes	473
12.3.2	Drehtransformation eines Tensors	475
12.3.3	Transformation Tensoren zweiter Stufe	476
12.4	Hauptspannungen und Hauptachsensystem	477
12.4.1	Hauptspannungstransformation von Hauptspannungen	479
12.4.2	Invarianten	479
12.4.3	Maximale Schnittspannungen	480
12.4.4	Maximale Schubspannungen	480
12.4.5	Zusammenfassung	481
12.4.6	Anwendung in SolidWorks	481
12.5	Tensorfelder und Differenzialoperatoren	482
12.5.1	Nabla-Operator ∇	482
12.5.2	Gauß'scher Integralsatz	483
12.6	Übungen	484
13	Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	493
13.1	Stoffunabhängige Gleichungen	495
13.1.1	Wiederholung: Cauchy'sches Fundamentaltheorem, lokales Gleichgewicht und Verschiebung	495
13.1.2	St.-Venant'sche Kompatibilitätsbedingungen	496
13.2	Stoffabhängige Gleichungen	498
13.2.1	Elastizität im technischen Sinne	498
13.2.2	Lineare Elastizität	498
13.2.3	Interpretation der Elastizitätskonstanten	500
13.2.4	Spezielle Elastizitätsgesetze	501
13.3	Thermoelastizität	504
13.4	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz mit Thermoelastizität bei Isotropie	508
13.5	Übungen	508
14	Spezielle Randwertprobleme	513
14.1	2D-Vereinfachung mittels FEM	515
14.1.1	2D Vereinfachung: ebener Spannungszustand	515
14.1.2	2D Vereinfachung: ebener Verzerrungszustand	517
14.1.3	2D Vereinfachung: Axialsymmetrie	517
14.1.4	Hinterlegte Gleichungen bei der FEM Analyse	519

14.2	Ebener Spannungszustand	520
14.2.1	Voraussetzungen	520
14.2.2	Definitionen	520
14.2.3	Wann darf der ebene Spannungszustand verwendet werden?	521
14.2.4	Abschluss und Folgerungen	526
14.3	Ebener Verzerrungszustand	526
14.3.1	Definitionen	526
14.3.2	Hooke'sches Gesetz	526
14.3.3	Kompatibilitätsbedingungen	527
14.3.4	Abschluss und Folgerungen	527
14.4	Lineare Elastizitätstheorie in Polarkoordinaten	527
14.4.1	Koordinatentransformation	528
14.4.2	Axialsymmetrisches Problem	528
14.4.3	Ebener Spannungszustand bei Axialsymmetrie	529
14.4.4	Ebener Verzerrungszustand bei Rotationssymmetrie	530
14.5	St. Venant'sche Torsion	532
14.5.1	Spannungs-Dehnungs-Beziehungen	533
14.5.2	Prandtl'sche Spannungsfunktion	533
14.5.3	Gleichgewichtsbedingung für das Torsionsmoment	533
14.6	Prinzip von St. Venant	534
14.7	Übungen	534
15	FEM zur Lösung des Feldproblems	543
15.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	545
15.1.1	Arbeitssatz der Elastizitätstheorie	545
15.1.2	Virtuelle Verrückung	546
15.1.3	Verzerrung	547
15.1.4	Matrizenschreibweise	547
15.1.5	Rayleigh-Ritz-Verfahren	547
15.2	Methode der finiten Elemente (FEM)	550
15.2.1	Die „finiten Elemente“	550
15.2.2	Anwendung des Ritz'schen Verfahrens auf ein Element	551
15.2.3	2D-Scheibenelement	552
15.2.4	Zusammenbau der Elemente	552
15.2.5	Auswertung der anderen Feldgrößen auf Elementebene	553
15.2.6	The Principle of Minimum Potential Energy	553
	Serviceteil	555
	Formelsammlung Elastostatik	556
A.1	Grundlagen der Spannungen	556
A.2	Druck- und Zugspannung	559
A.3	Kontaktmechanik	561
A.4	Flächen- und Widerstandsmomente	562
A.4.1	Widerstandsmoment	562
A.4.2	Flächenmomente	563
A.5	Abscher- und Schubbeanspruchung	564
A.6	Spannungs- und Verzerrungszustand	567
A.7	Biegebeanspruchung	571
A.7.1	Grundlagen der Biegung	571
A.7.2	Schnittgrößen in der Ebene	571
A.7.3	Schnittgrößen im Raum	572

A.7.4	Spezielle Tragwerke	573
A.7.5	Biegung bei veränderlichem Querschnitt	573
A.7.6	Träger gleicher Biegespannung	574
A.7.7	Grundlagen Formänderung	574
A.7.8	Zweiachsige – oder schiefe Biegung	574
A.7.9	Statisch unbestimmte Systeme	574
A.7.10	Die elastische Linie	575
A.7.11	Elastisch gebetteter Träger	578
A.7.12	Der gekrümmte Träger	580
A.8	Torsionsbeanspruchung	581
A.8.1	Einfache Torsionstheorie	581
A.8.2	Torsion nach St. Venant	582
A.8.3	Wölbkrafttorsion	583
A.9	Zusammengesetzte Beanspruchungen	584
A.9.1	Gleichartige Beanspruchung	584
A.9.2	Ungleichartige Beanspruchung	585
A.9.3	Spannungsraum und Fließbedingungen	585
A.10	Stabilitätsprobleme	586
A.10.1	Biegeknickung	586
A.10.2	Zweiachsige Biegeknickung	589
A.10.3	Biegedrillknicken (Kippen)	589
A.10.4	Übersicht Kippen	589
A.10.5	Beulen	589
A.11	Arbeitsbegriff in der Elastostatik	589
A.12	Tensoren und Grundlagen der Tensorrechnung	591
A.13	Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	593
A.13.1	Stoffunabhängige Gleichungen	593
A.13.2	Stoffabhängige Gleichungen	593
A.13.3	Spezielle Elastizitätsgesetze	593
A.13.4	Thermoelastizität	594
A.13.5	Verallgemeinertes Hooke'sches mit Thermoelastizität bei Isotropie	594
A.14	Spezielle Randwertprobleme	594
A.14.1	Ebener Spannungszustand	594
A.14.2	Ebener Verzerrungszustand	595
A.14.3	Lineare Elastizitätstheorie in Polarkoordinaten	595
A.14.4	St. Venant'sche Torsion	596
A.15	FEM zur Lösung des Feldproblems	596
A.15.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	596
A.15.2	Die „finiten Elemente“	597
	Literatur	598
	Personenverzeichnis	603
	Stichwortverzeichnis	605