

# Inhaltsverzeichnis

<b>Hinweise für den Leser</b>	<b>9</b>
<b>Vorwort</b>	<b>11</b>
<b>0 Einleitung</b>	<b>13</b>
0.1 BERNHARD RIEMANN in seiner Zeit	13
0.1.1 Zum Verlauf des Lebens und zur Entwicklung der Persönlichkeit	13
0.1.2 Zur politischen und wirtschaftlichen Situation	15
0.1.3 Erziehung und Bildung	17
0.1.4 Zu RIEMANNs Heimat	21
0.1.5 Göttingen und Berlin als Studienorte	29
0.1.6 Professor ordinarius 1859–1866	34
0.2 Die Goldenen Fünfziger Jahre in Göttingen: von GAUSS und DIRICHLET zu RIEMANN und DEDEKIND	36
0.2.1 RIEMANN und DEDEKIND: Persönliche Umstände	36
0.2.2 Hin zum Wandel in der Mathematik	43
0.2.3 Momentaufnahmen eines englischen Beobachters	47
0.3 Wirkungen in den letzten Jahren: RIEMANN zwischen Deutschland und Italien	50
0.4 Konkurrierende Auffassungen der Analysis vor RIEMANN	55
0.4.1 RIEMANN in der historischen Entwicklung der Analysis: Ein Überblick	55
0.4.2 Algebraische Analysis	57
0.4.3 Die <i>Infinitesimalanalysis</i>	63
0.4.4 Geometrische Überlegungen: FOURIER	65
0.4.5 Die Grenzwertauffassung: NEWTON	67
0.4.6 Hin zur Epsilonantik: CAUCHY und DIRICHLET	68
<b>1 Komplexe Analysis</b>	<b>75</b>
1.1 Die Genese der komplexen Analysis bis zur Zeit RIEMANNs	75
1.1.1 Vorbemerkungen	75
1.1.2 Die komplexen Zahlen	76
1.1.3 Komplexe Funktionen und ihre Ableitungen	79
1.1.4 Integration	84

1.1.5	Potenzreihen	87
1.1.6	Weitere Anwendungen	95
1.1.7	Mehrwertige Funktionen und RIEMANNSche Flächen	98
1.1.8	Doppeltperiodische Funktionen	102
1.2	Die Dissertation von 1851	107
1.2.1	RIEMANNS Sicht von den Motiven für die Arbeit: Der Artikel 20 der Dissertation, Teil 1	107
1.2.2	Der Inhalt der Dissertation, eine Kurzfassung	108
1.2.3	RIEMANNS Zusammenfassung der Dissertation und das Programm: Artikel 20, zweiter Teil und Artikel 22	110
1.2.4	Zur Vorgeschichte der Dissertation	114
1.2.5	Die Wirkung der Dissertation	124
1.3	Die Ausgestaltungen	130
1.3.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen	130
1.3.2	Die Entstehung der Topologie aus der Analysis	136
1.3.3	Das ABELSche Theorem	138
1.3.4	Die algebraischen Kurven	145
1.3.5	Minimalflächen	147
1.3.6	Studenten bei RIEMANN und ihre Notizen zur Funktionentheorie	149
1.3.7	Spätere Einschätzungen	152
1.3.8	DEDEKIND und die Algebraisierung der Funktionentheorie	156
1.4	Die Zetafunktion und die Primzahlverteilung	164
1.4.1	Vorbemerkungen	164
1.4.2	Ein Zugang	165
1.4.3	Die Funktionalgleichung	171
1.4.4	RIEMANNS explizite Formel für die Primzahlfunktion	175
1.4.5	Die Nullstellen und die RIEMANNSche Vermutung	177
1.4.6	Der Nachlass	179
1.4.7	Die Einschätzungen	180
<b>2</b>	<b>Reelle Analysis</b>	<b>183</b>
2.1	Grundlagen der reellen Analysis	183
2.1.1	Der Integralbegriff	183
2.1.2	Die «Strenge» in der Analysis	187
2.1.3	Der neue Status der Einzelfälle: Beispiele und Gegenbeispiele	189
2.2	Trigonometrische Reihen vor RIEMANN	192
2.2.1	Vorbemerkungen	192
2.2.2	Von EULER bis FOURIER	194
2.2.3	Zur Entwicklung der Funktionsauffassungen	198
2.2.4	Von FOURIER zu DIRICHLET	200

2.3	RIEMANNs Ergebnisse	206
2.3.1	Anwendung des Integralbegriffs auf die FOURIER-Koeffizienten	206
2.3.2	RIEMANNs assoziierte Funktion $F(x)$	207
2.4	Trigonometrische Reihen nach RIEMANN	210
2.4.1	Von den trigonometrischen Reihen zur Mengenlehre	210
2.4.2	Zur weiteren Entwicklung der trigonometrischen Reihen: über die Arithmetisierung der Funktionen hin zu ihrer Verselbständigung in der Funktionalanalysis	212
2.5	Ein Kapitel für sich: GAUSS, RIEMANN und die Göttinger Atmosphäre	214
<b>3</b>	<b>Geometrie, Physik, Philosophie</b>	<b>219</b>
3.1	Geometrie	223
3.1.1	Von EUKLID zu DESCARTES und zur «nichteuclidischen» Geometrie	223
3.1.2	Die Flächentheorie von GAUSS (1827)	225
3.1.3	Die $n$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit	229
3.1.4	Die Massbestimmungen	232
3.1.5	Die Krümmung	234
3.1.6	Wirkungen in Geometrie und Physik in den ersten 50 Jahren nach RIEMANN	236
3.1.7	Die algorithmischen Entwicklungen	239
3.1.8	Der Einfluss von FELIX KLEIN	244
3.1.9	DEDEKIND: Analytische Untersuchungen zu BERNHARD RIEMANNs Abhandlung über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen	250
3.2	Physik	251
3.2.1	Das Interesse an der Physik	251
3.2.2	Physik als Feldtheorie	253
3.2.3	Mathematische Methoden für die Physik	259
3.2.4	RIEMANNs Elektrodynamik aus der Sicht der Physiker	263
3.2.5	Die RIEMANNsche Geometrie in der Physik des 20. Jahrhunderts: EINSTEIN und WEYL	266
3.3	Zur Philosophie	271
3.3.1	Vorbemerkungen	271
3.3.2	Zur geistigen Atmosphäre 1853/54: Der Materialismusstreit	273
3.3.3	Neue mathematische Prinzipien der Naturphilosophie	275
3.3.4	Die Rolle der Philosophie HERBARTs	281
<b>4</b>	<b>Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik</b>	<b>285</b>
4.1	Die Suche der Historiker nach Revolutionen in der Mathematik	285

4.2	Der Wendepunkt in der Auffassung des Unendlichen in der Mathematik	288
4.3	Wendepunkt der Methode: Denken statt Rechnen	293
4.4	Der Wendepunkt in der Ontologie: Mathematik als Denken in Begriffen	296
4.4.1	Allgemeine Begriffe und ihre Bestimmungsweisen	296
4.4.2	Der Primat des Kontinuums gegenüber dem Diskretum in RIEMANNS Mathematik	298
4.4.3	RIEMANNS Mannigfaltigkeitsbegriff in der philosophischen Tradition	299
4.4.4	Denken in mathematischen Begriffen vor RIEMANN	301
4.5	Ontologie und Methodologie der Mathematik in der Zeit nach RIEMANN	303
4.5.1	Der Primat der Zahl bei DEDEKIND	303
4.5.2	Von der Arithmetisierung zur Axiomatisierung: HILBERT 1897/1899	307
4.5.3	Die Rolle GEORG CANTORS	311
4.5.4	Die Berliner Tradition	314
4.6	Schlussbemerkungen	317
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>329</b>
	<b>Namenverzeichnis</b>	<b>335</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>345</b>