

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Ausgabe	VII
Vorwort zur Deutschen Ausgabe	XIV
Ratschläge für die Leser	XI
Was ist Mathematik?	XIX

Erstes Kapitel

Die natürlichen Zahlen

Einleitung	1
§ 1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen	1
1. Gesetze der Arithmetik S. 1 – 2. Darstellung der positiven ganzen Zahlen S. 4	
3. Das Rechnen in nichtdezimalen Systemen S. 6	
§ 2. Die Unendlichkeit des Zahlensystems. Mathematische Induktion	8
1. Das Prinzip der mathematischen Induktion S. 8 – 2. Die arithmetische Reihe	
S. 10 – 3. Die geometrische Reihe S. 11 – 4. Die Summe der ersten n Quadrate	
S. 12 – 5. Eine wichtige Ungleichung S. 13 – 6. Der binomische Satz S. 13 – 7. Wei-	
tere Bemerkungen zur mathematischen Induktion S. 15	

Ergänzung zu Kapitel I. Zahlentheorie	17
---	----

Einleitung	17
§ 1. Die Primzahlen	17
1. Grundtatsachen S. 17 – 2. Die Verteilung der Primzahlen S. 20 – a) Formeln	
zur Konstruktion von Primzahlen S. 21 – b) Primzahlen in arithmetischen Folgen	
S. 21 – c) Der Primzahlsatz S. 22 – d) Zwei ungelöste Probleme, die Primzahlen	
betreffen S. 24	
§ 2. Kongruenzen	26
1. Grundbegriffe S. 26 – 2. Der kleine Fermatsche Satz S. 30 – 3. Quadratische	
Reste S. 31	
§ 3. Pythagoreische Zahlen und großer Fermatscher Satz	32
§ 4. Der euklidische Algorithmus	34
1. Die allgemeine Theorie S. 34 – 2. Anwendung auf den Fundamentalsatz der	
Arithmetik S. 38 – 3. EULERS φ -Funktion. Nochmals kleiner Fermatscher Satz	
S. 39 – 4. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen S. 40	

Zweites Kapitel

Das Zahlensystem der Mathematik

Einleitung	42
§ 1. Die rationalen Zahlen	42
1. Messen und Zählen S. 42 – 2. Die innere Notwendigkeit der rationalen Zahlen.	
Prinzip der Verallgemeinerung S. 44 – 3. Geometrische Deutung der rationalen	
Zahlen S. 46	
§ 2. Inkommensurable Strecken, irrationale Zahlen und der Grenzwertbegriff . . .	47
1. Einleitung S. 47 – 2. Unendliche Dezimalbrüche S. 49 – 3. Grenzwerte, Unend-	
liche geometrische Reihen S. 51 – 4. Rationale Zahlen und periodische Dezimal-	
brüche S. 54 – 5. Allgemeine Definition der Irrationalzahlen durch Intervall-	
schachtelungen S. 55 – 6. Andere Methoden zur Definition der irrationalen Zahlen.	
Dedekindsche Schnitte S. 57	

§ 3. Bemerkungen über analytische Geometrie	58
1. Das Grundprinzip S. 58 – 2. Gleichungen von Geraden und Kurven S. 59	
§ 4. Die mathematische Analyse des Unendlichen	62
1. Grundbegriffe S. 62 – 2. Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und die Nicht-abzählbarkeit des Kontinuums S. 63 – 3. CANTORs „Kardinalzahlen“ S. 67	
4. Die indirekte Beweismethode S. 68 – 5. Die Paradoxien des Unendlichen S. 69	
6. Die Grundlagen der Mathematik S. 70	
§ 5. Komplexe Zahlen	71
1. Der Ursprung der komplexen Zahlen S. 71 – 2. Die geometrische Deutung der komplexen Zahlen S. 74 – 3. Die Moivresche Formel und die Einheitswurzeln S. 78	
4. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 80	
§ 6. Algebraische und transzendente Zahlen	82
1. Definition und Existenz S. 82 – Der Liouvillesche Satz und die Konstruktion transzendenter Zahlen S. 83	
Ergänzung zu Kapitel II. Mengenalgebra (Boolesche Algebra)	86
1. Allgemeine Theorie S. 86 – 2. Anwendung auf die mathematische Logik S. 89	
3. Eine Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 91	

Drittes Kapitel

Geometrische Konstruktionen. Die Algebra der Zahlkörper

Zahlkörper	93
Einleitung	93
I. Teil. Unmöglichkeitbeweise und Algebra	95
§ 1. Grundlegende geometrische Konstruktionen	95
1. Rationale Operationen und Quadratwurzeln S. 95 – 2. Regelmäßige Vielecke S. 97 – 3. Das Problem des Apollonius S. 99	
§ 2. Konstruierbare Zahlen und Zahlkörper	101
1. Allgemeine Theorie S. 101 – 2. Alle konstruierbaren Zahlen sind algebraisch S. 106	
§ 3. Die Unlösbarkeit der drei griechischen Probleme	107
1. Verdoppelung des Würfels S. 107 – 2. Ein Satz über kubische Gleichungen S. 108 – 3. Winkeldreiteilung S. 109 – 4. Das regelmäßige Siebeneck S. 111	
5. Bemerkungen zum Problem der Quadratur des Kreises S. 112	
II. Teil. Verschiedene Konstruktionsmethoden	112
§ 4. Geometrische Abbildungen. Die Inversion	112
1. Allgemeine Bemerkungen S. 112 – 2. Eigenschaften der Inversion S. 113	
3. Geometrische Konstruktion inverser Punkte S. 115 – 4. Halbierung einer Strecke und Bestimmung des Kreismittelpunktes mit dem Zirkel allein S. 116	
§ 5. Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln. Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein	117
1. Eine klassische Konstruktion zur Verdoppelung des Würfels S. 117 – Beschränkung auf die Benutzung des Zirkels allein S. 117 – 3. Das Zeichnen mit mechanischen Geräten. Mechanische Kurven. Zykloiden. S. 121 – 4. Gelenkmechanismen. PEAUCELLIERs und HARTs Inversoren. S. 123	
§ 6. Weiteres über die Inversion und ihre Anwendungen	125
1. Invarianz der Winkel. Kreisscharen S. 125 – 2. Anwendung auf das Problem des APOLLONIUS S. 127 – 3. Mehrfache Reflexionen S. 128	

Viertes Kapitel

Projektive Geometrie. Axiomatik. Nichteuclidische Geometrien

§ 1. Einleitung	130
1. Klassifizierung geometrischer Eigenschaften. Invarianz bei Transformationen S. 130 – 2. Projektive Transformationen S. 131	

§ 2. Grundlegende Begriffe	132
1. Die Gruppe der projektiven Transformationen S. 132 – 2. Der Satz von DESARGUES S. 134	
§ 3. Das Doppelverhältnis	135
1. Definition und Beweis der Invarianz S. 135 – 2. Anwendung auf das vollständige Vierseit S. 139	
§ 4. Parallelität und Unendlichkeit	140
1. Unendlich ferne Punkte als „uneigentliche Punkte“ S. 140 – 2. Uneigentliche Elemente und Projektion S. 143 – 3. Doppelverhältnisse mit unendlich fernen Elementen S. 144	
§ 5. Anwendungen	144
1. Vorbereitende Bemerkungen S. 144 – 2. Beweis des Desarguesschen Satzes in der Ebene S. 145 – 3. Der Pascalsche Satz S. 146 – 4. Der Satz von BRIANCHON S. 147 – 5. Das Dualitätsprinzip S. 147	
§ 6. Analytische Darstellung	148
1. Einleitende Bemerkungen S. 148 – 2. Homogene Koordinaten. Die algebraische Grundlage der Dualität S. 149	
§ 7. Aufgaben über Konstruktionen mit dem Lineal allein	152
§ 8. Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung	153
1. Elementare metrische Geometrie der Kegelschnitte S. 153 – 2. Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte S. 156 – 3. Kegelschnitte als Hüllkurven S. 158 – 4. Pascals und Brianchons allgemeine Sätze für Kegelschnitte S. 161 – 5. Das Hyperboloid S. 162	
§ 9. Axiomatik und nichteuklidische Geometrie	163
1. Die axiomatische Methode S. 163 – 2. Hyperbolische nichteuklidische Geometrie S. 166 – 3. Geometrie und Wirklichkeit S. 170 – 4. Poincarés Modell S. 171 – 5. Elliptische oder Riemannsche Geometrie S. 172	
Anhang. Geometrie in mehr als drei Dimensionen	174
1. Einleitung S. 174 – 2. Die analytische Definition S. 174 – 3. Die geometrische oder kombinatorische Definition S. 176	

Fünftes Kapitel

Topologie

Einleitung	180
§ 1. Die Eulersche Polyederformel	181
§ 2. Topologische Eigenschaften von Figuren	184
1. Topologische Eigenschaften S. 184 – 2. Zusammenhang S. 185	
§ 3. Andere Beispiele topologischer Sätze	186
1. Der Jordansche Kurvensatz S. 186 – 2. Das Vierfarbenproblem S. 188 – 3. Der Begriff der Dimension S. 189 – 4. Ein Fixpunktsatz S. 192 – 5. Knoten S. 195	
§ 4. Topologische Klassifikation der Flächen	195
1. Das Geschlecht einer Fläche S. 195 – 2. Die Eulersche Charakteristik einer Fläche S. 197 – 3. Einseitige Flächen S. 198	
Anhang	200
1. Der Fünffarbensatz S. 200 – 2. Der Jordansche Kurvensatz für Polygone S. 202 – 3. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 204	

Sechstes Kapitel

Funktionen und Grenzwerte

Einleitung	207
§ 1. Variable und Funktion	208
1. Definitionen und Beispiele S. 208 – 2. Das Bogenmaß eines Winkels S. 211 – 3. Graphische Darstellung einer Funktion. Inverse Funktionen S. 212 – 4. Zusammengesetzte Funktionen S. 214 – 5. Stetigkeit S. 215 – 6. Funktionen von mehreren Veränderlichen S. 217 – 7. Funktionen und Transformationen S. 219	

§ 2. Grenzwerte	220
1. Der Grenzwert einer Folge a_n S. 220 – 2. Monotone Folgen S. 224 – 3. Die Eulersche Zahl e S. 226 – 4. Die Zahl π S. 227 – 5. Kettenbrüche S. 229	
§ 3. Grenzwerte bei stetiger Annäherung	231
1. Einleitung. Allgemeine Definition S. 231 – 2. Bemerkungen zum Begriff des Grenzwertes S. 232 – 3. Der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ S. 234 – 4. Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$ S. 235	
§ 4. Genaue Definition der Stetigkeit	236
§ 5. Zwei grundlegende Sätze über stetige Funktionen	237
1. Der Satz von BOLZANO S. 237 – 2. Beweis des Bolzanoschen Satzes S. 238 – 3. Der Satz von WEIERSTRASS über Extremwerte S. 239 – 4. Ein Satz über Zahlenfolgen. Kompakte Mengen S. 240	
§ 6. Einige Anwendungen des Satzes von BOLZANO	241
1. Geometrische Anwendungen S. 241 – 2. Anwendung auf ein mechanisches Problem S. 243	
Ergänzung zu Kapitel VI. Weitere Beispiele für Grenzwerte und Stetigkeit	245
§ 1. Beispiele von Grenzwerten	245
1. Allgemeine Bemerkungen S. 245 – 2. Der Grenzwert von q^n S. 245 – 3. Der Grenzwert von $\sqrt[n]{p}$ S. 246 – 4. Unstetige Funktionen als Limites stetiger Funktionen S. 247 – 5. Grenzwerte durch Iteration S. 248	
§ 2. Ein Beispiel für Stetigkeit	249
Siebentes Kapitel	
Maxima und Minima	
Einleitung	251
§ 1. Probleme aus der elementaren Geometrie	252
1. Die maximale Fläche eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten S. 252 – 2. Der Satz des Heron. Extremaleigenschaften von Lichtstrahlen S. 252 – 3. Anwendungen auf Probleme für Dreiecke S. 253 – 4. Tangentialeigenschaften der Ellipse und Hyperbel. Entsprechende Extremaleigenschaften S. 254 – 5. Extreme Abstände von einer gegebenen Kurve S. 256	
§ 2. Ein allgemeines Prinzip bei Extremalproblemen	258
1. Das Prinzip S. 258 – 2. Beispiele S. 259	
§ 3. Stationäre Punkte und Differentialrechnung	260
1. Extremwerte und stationäre Punkte S. 260 – 2. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variabeln. Sattelpunkte S. 261 – 3. Minimumpunkte und Topologie S. 262 – 4. Der Abstand eines Punktes von einer Fläche S. 263	
§ 4. Das Schwarzsche Dreiecksproblem	264
1. Der Schwarzsche Spiegelungsbeweis S. 264 – 2. Ein zweiter Beweis S. 265 – 3. Stumpfwinklige Dreiecke S. 267 – 4. Dreiecke aus Lichtstrahlen S. 267 – 5. Bemerkungen über Reflexionsprobleme und ergodische Bewegung S. 268	
§ 5. Das Steinersche Problem	269
1. Das Problem und seine Lösung S. 269 – 2. Diskussion der beiden Alternativen S. 270 – 3. Ein komplementäres Problem S. 272 – 4. Bemerkungen und Übungen S. 272 – 5. Verallgemeinerung auf das Straßennetz-Problem S. 273	
§ 6. Extrema und Ungleichungen	274
1. Das arithmetische und geometrische Mittel zweier positiver Größen S. 274 – 2. Verallgemeinerung auf n Variablen S. 275 – 3. Die Methode der kleinsten Quadrate S. 276	
§ 7. Die Existenz eines Extremums. Das Dirichletsche Prinzip	277
1. Allgemeine Bemerkungen S. 277 – 2. Beispiele S. 279 – 3. Elementare Extremalprobleme S. 280 – 4. Schwierigkeiten bei komplizierteren Problemen S. 282	
§ 8. Das isoperimetrische Problem	283

§ 9. Extremalprobleme mit Randbedingungen. Zusammenhang zwischen dem Steiner- schen Problem und dem isoperimetrischen Problem	285
§ 10. Die Variationsrechnung	288
1. Einleitung S. 288 – 2. Die Variationsrechnung. Das Fermatsche Prinzip in der Optik S. 289 – 3. <i>BERNOULLI</i> s Behandlung des Problems der Brachystochrone S. 290 – 4. Geodätische Linien auf einer Kugel. Geodätische Linien und Maxi- minima S. 291	
§ 11. Experimentelle Lösungen von Minimumproblemen. Seifenhautexperimente . . .	292
1. Einführung S. 292 – 2. Seifenhautexperimente S. 293 – 3. Neue Experimente zum Plateauschen Problem S. 294 – 4. Experimentelle Lösungen anderer mathemati- scher Probleme S. 297	

Achstes Kapitel

Die Infinitesimalrechnung

Einleitung	302
§ 1. Das Integral	303
1. Der Flächeninhalt als Grenzwert S. 303 – 2. Das Integral S. 304 – 3. Allgemeine Bemerkungen zum Integralbegriff. Endgültige Definition S. 307 – 4. Beispiele. In- tegration von x^n S. 308 – 5. Regeln der Integralrechnung S. 312	
§ 2. Die Ableitung.	315
1. Die Ableitung als Steigung S. 315 – 2. Die Ableitung als Grenzwert S. 316 3. Beispiele S. 317 – 4. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen S. 320 5. Differentiation und Stetigkeit S. 320 – 6. Ableitung und Geschwindigkeit. Zweite Ableitung und Beschleunigung S. 321 – 7. Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung S. 323 – 8. Maxima und Minima S. 324	
§ 3. Die Technik des Differenzierens	324
§ 4. Die Leibnizsche Schreibweise und das „Unendlich Kleine“	329
§ 5. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	331
1. Der Fundamentalsatz S. 331 – 2. Erste Anwendungen. Integration von x^x , $\cos x$, $\sin x$, $\arctan x$ S. 334 – 3. Die Leibnizsche Formel für π S. 336	
§ 6. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus	337
1. Definition und Eigenschaften des Logarithmus. Die Eulersche Zahl e S. 337 – 2. Die Exponentialfunktion S. 339 – 3. Differentiationsformeln für e^x , a^x , x^a S. 341 4. Explizite Ausdrücke für e , e^x und $\ln x$ als Limites S. 342 – 5. Unendliche Reihen für den Logarithmus. Numerische Berechnung S. 344	
§ 7. Differentialgleichungen	346
1. Definition S. 346 – 2. Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion. Radio- aktiver Zerfall. Wachstumsgesetz. Zinseszins S. 346 – 3. Weitere Beispiele. Ein- fachste Schwingungen S. 349 – 4. <i>NEWTON</i> s Grundgesetz der Dynamik S. 351	
Ergänzung zu Kapitel VIII	353
§ 1. Grundsätzliche Fragen	353
1. Differenzierbarkeit S. 353 – 2. Das Integral S. 355 – 3. Andere Anwendungen des Integralbegriffes. Arbeit. Länge S. 355	
§ 2. Größenordnungen	358
1. Die Exponentialfunktion und die Potenzen von x S. 358 – 2. Die Größenordnung von $\ln(n!)$ S. 360	
§ 3. Unendliche Reihen und Produkte	361
1. Unendliche Reihen von Funktionen S. 361 – 2. Die Eulersche Formel $\cos x +$ $i \sin x = e^{ix}$ S. 365 – 3. Die harmonische Reihe und die Zeta-Funktion. Das Eulersche Produkt für den Sinus S. 367	
§ 4. Ableitung des Primzahlsatzes mit statistischen Methoden	369

Anhang

Ergänzungen, Probleme und Übungsaufgaben	373
Arithmetik und Algebra	373
Analytische Geometrie	374
Geometrische Konstruktionen	379
Projektive und nichteuklidische Geometrie	380
Topologie	381
Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit.	384
Maxima und Minima	384
Infinitesimalrechnung	386
Integrationstechnik	388
Hinweise auf weiterführende Literatur	392
Namen- und Sachverzeichnis	394