

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----|
| Vorwort zur vierten Ausgabe | VII |
| Vorwort zur Deutschen Ausgabe | XIV |
| Ratschläge für die Leser | XI |
| Was ist Mathematik? | XIX |

Erstes Kapitel

Die natürlichen Zahlen

| | |
|--|----|
| Einleitung | 1 |
| § 1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen | 1 |
| 1. Gesetze der Arithmetik S. 1 – 2. Darstellung der positiven ganzen Zahlen S. 4 | |
| 3. Das Rechnen in nichtdezimalen Systemen S. 6 | |
| § 2. Die Unendlichkeit des Zahlensystems. Mathematische Induktion | 8 |
| 1. Das Prinzip der mathematischen Induktion S. 8 – 2. Die arithmetische Reihe S. 10 – 3. Die geometrische Reihe S. 11 – 4. Die Summe der ersten n Quadrate S. 12 – 5. Eine wichtige Ungleichung S. 13 – 6. Der binomische Satz S. 13 – 7. Weitere Bemerkungen zur mathematischen Induktion S. 15 | |
| Ergänzung zu Kapitel I. Zahlentheorie | 17 |
| Einleitung | 17 |
| § 1. Die Primzahlen | 17 |
| 1. Grundtatsachen S. 17 – 2. Die Verteilung der Primzahlen S. 20 – a) Formeln zur Konstruktion von Primzahlen S. 21 – b) Primzahlen in arithmetischen Folgen S. 21 – c) Der Primzahlsatz S. 22 – d) Zwei ungelöste Probleme, die Primzahlen betreffen S. 24 | |
| § 2. Kongruenzen | 26 |
| 1. Grundbegriffe S. 26 – 2. Der kleine Fermatsche Satz S. 30 – 3. Quadratische Reste S. 31 | |
| § 3. Pythagoreische Zahlen und großer Fermatscher Satz | 32 |
| § 4. Der euklidische Algorithmus | 34 |
| 1. Die allgemeine Theorie S. 34 – 2. Anwendung auf den Fundamentalsatz der Arithmetik S. 38 – 3. EULERS φ -Funktion. Nochmals kleiner Fermatscher Satz S. 39 – 4. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen S. 40 | |

Zweites Kapitel

Das Zahlensystem der Mathematik

| | |
|--|----|
| Einleitung | 42 |
| § 1. Die rationalen Zahlen | 42 |
| 1. Messen und Zählen S. 42 – 2. Die innere Notwendigkeit der rationalen Zahlen. Prinzip der Verallgemeinerung S. 44 – 3. Geometrische Deutung der rationalen Zahlen S. 46 | |
| § 2. Inkommensurable Strecken, irrationale Zahlen und der Grenzwertbegriff | 47 |
| 1. Einleitung S. 47 – 2. Unendliche Dezimalbrüche S. 49 – 3. Grenzwerte. Unendliche geometrische Reihen S. 51 – 4. Rationale Zahlen und periodische Dezimalbrüche S. 54 – 5. Allgemeine Definition der Irrationalzahlen durch Intervallschachtelungen S. 55 – 6. Andere Methoden zur Definition der irrationalen Zahlen. Dedekindsche Schnitte S. 57 | |

| | |
|--|----|
| § 3. Bemerkungen über analytische Geometrie | 58 |
| 1. Das Grundprinzip S. 58 – 2. Gleichungen von Geraden und Kurven S. 59 | |
| § 4. Die mathematische Analyse des Unendlichen | 62 |
| 1. Grundbegriffe S. 62 – 2. Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und die Nicht-abzählbarkeit des Kontinuums S. 63 – 3. CANTORs „Kardinalzahlen“ S. 67 | |
| 4. Die indirekte Beweismethode S. 68 – 5. Die Paradoxien des Unendlichen S. 69 | |
| 6. Die Grundlagen der Mathematik S. 70 | |
| § 5. Komplexe Zahlen | 71 |
| 1. Der Ursprung der komplexen Zahlen S. 71 – 2. Die geometrische Deutung der komplexen Zahlen S. 74 – 3. Die Moivresche Formel und die Einheitswurzeln S. 78 | |
| 4. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 80 | |
| § 6. Algebraische und transzendente Zahlen | 82 |
| 1. Definition und Existenz S. 82 – Der Liouvillesche Satz und die Konstruktion transzendenter Zahlen S. 83 | |
| Ergänzung zu Kapitel II. Mengenalgebra (Boolesche Algebra) | 86 |
| 1. Allgemeine Theorie S. 86 – 2. Anwendung auf die mathematische Logik S. 89 | |
| 3. Eine Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 91 | |

Drittes Kapitel

Geometrische Konstruktionen. Die Algebra der Zahlkörper

| | |
|--|-----|
| Zahlkörper | 93 |
| Einleitung | 93 |
| I. Teil. Unmöglichkeitbeweise und Algebra | 95 |
| § 1. Grundlegende geometrische Konstruktionen | 95 |
| 1. Rationale Operationen und Quadratwurzeln S. 95 – 2. Regelmäßige Vielecke S. 97 – 3. Das Problem des Apollonius S. 99 | |
| § 2. Konstruierbare Zahlen und Zahlkörper | 101 |
| 1. Allgemeine Theorie S. 101 – 2. Alle konstruierbaren Zahlen sind algebraisch S. 106 | |
| § 3. Die Unlösbarkeit der drei griechischen Probleme | 107 |
| 1. Verdoppelung des Würfels S. 107 – 2. Ein Satz über kubische Gleichungen S. 108 – 3. Winkeldreiteilung S. 109 – 4. Das regelmäßige Siebeneck S. 111 | |
| 5. Bemerkungen zum Problem der Quadratur des Kreises S. 112 | |
| II. Teil. Verschiedene Konstruktionsmethoden | 112 |
| § 4. Geometrische Abbildungen. Die Inversion | 112 |
| 1. Allgemeine Bemerkungen S. 112 – 2. Eigenschaften der Inversion S. 113 | |
| 3. Geometrische Konstruktion inverser Punkte S. 115 – 4. Halbierung einer Strecke und Bestimmung des Kreismittelpunktes mit dem Zirkel allein S. 116 | |
| § 5. Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln. Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein | 117 |
| 1. Eine klassische Konstruktion zur Verdoppelung des Würfels S. 117 – Beschränkung auf die Benutzung des Zirkels allein S. 117 – 3. Das Zeichnen mit mechanischen Geräten. Mechanische Kurven. Zykloiden. S. 121 – 4. Gelenkmechanismen. PEAUCELLIERs und HARTs Inversoren. S. 123 | |
| § 6. Weiteres über die Inversion und ihre Anwendungen | 125 |
| 1. Invarianz der Winkel. Kreisscharen S. 125 – 2. Anwendung auf das Problem des APOLLONIUS S. 127 – 3. Mehrfache Reflexionen S. 128 | |

Viertes Kapitel

Projektive Geometrie. Axiomatik. Nichteuclidische Geometrien

| | |
|---|-----|
| § 1. Einleitung | 130 |
| 1. Klassifizierung geometrischer Eigenschaften. Invarianz bei Transformationen S. 130 – 2. Projektive Transformationen S. 131 | |

| | |
|---|-----|
| § 2. Grundlegende Begriffe | 132 |
| 1. Die Gruppe der projektiven Transformationen S. 132 – 2. Der Satz von DESARGUES S. 134 | |
| § 3. Das Doppelverhältnis | 135 |
| 1. Definition und Beweis der Invarianz S. 135 – 2. Anwendung auf das vollständige Vierseit S. 139 | |
| § 4. Parallelität und Unendlichkeit | 140 |
| 1. Unendlich ferne Punkte als „uneigentliche Punkte“ S. 140 – 2. Uneigentliche Elemente und Projektion S. 143 – 3. Doppelverhältnisse mit unendlich fernem Elementen S. 144 | |
| § 5. Anwendungen | 144 |
| 1. Vorbereitende Bemerkungen S. 144 – 2. Beweis des Desarguesschen Satzes in der Ebene S. 145 – 3. Der Pascalsche Satz S. 146 – 4. Der Satz von BRIANCHON S. 147 | |
| 5. Das Dualitätssprinzip S. 147 | |
| § 6. Analytische Darstellung | 148 |
| 1. Einleitende Bemerkungen S. 148 – 2. Homogene Koordinaten. Die algebraische Grundlage der Dualität S. 149 | |
| § 7. Aufgaben über Konstruktionen mit dem Lineal allein | 152 |
| § 8. Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung | 153 |
| 1. Elementare metrische Geometrie der Kegelschnitte S. 153 – 2. Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte S. 156 – 3. Kegelschnitte als Hüllkurven S. 158 | |
| 4. Pascals und Brianchons allgemeine Sätze für Kegelschnitte S. 161 – 5. Das Hyperboloid S. 162 | |
| § 9. Axiomatik und nichteuklidische Geometrie | 163 |
| 1. Die axiomatische Methode S. 163 – 2. Hyperbolische nichteuklidische Geometrie S. 166 – 3. Geometrie und Wirklichkeit S. 170 – 4. Poincarés Modell S. 171 | |
| 5. Elliptische oder Riemannsche Geometrie S. 172 | |
| Anhang. Geometrie in mehr als drei Dimensionen | 174 |
| 1. Einleitung S. 174 – 2. Die analytische Definition S. 174 – 3. Die geometrische oder kombinatorische Definition S. 176 | |

Fünftes Kapitel

Topologie

| | |
|---|-----|
| Einleitung | 180 |
| § 1. Die Eulersche Polyederformel | 181 |
| § 2. Topologische Eigenschaften von Figuren | 184 |
| 1. Topologische Eigenschaften S. 184 – 2. Zusammenhang S. 185 | |
| § 3. Andere Beispiele topologischer Sätze | 186 |
| 1. Der Jordansche Kurvensatz S. 186 – 2. Das Vierfarbenproblem S. 188 – 3. Der Begriff der Dimension S. 189 – 4. Ein Fixpunktsatz S. 192 – 5. Knoten S. 195 | |
| § 4. Topologische Klassifikation der Flächen | 195 |
| 1. Das Geschlecht einer Fläche S. 195 – 2. Die Eulersche Charakteristik einer Fläche S. 197 – 3. Einseitige Flächen S. 198 | |
| Anhang | 200 |
| 1. Der Fünffarbensatz S. 200 – 2. Der Jordansche Kurvensatz für Polygone S. 202 | |
| 3. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 204 | |

Sechstes Kapitel

Funktionen und Grenzwerte

| | |
|---|-----|
| Einleitung | 207 |
| § 1. Variable und Funktion | 208 |
| 1. Definitionen und Beispiele S. 208 – 2. Das Bogenmaß eines Winkels S. 211 | |
| 3. Graphische Darstellung einer Funktion. Inverse Funktionen S. 212 – 4. Zusammengesetzte Funktionen S. 214 – 5. Stetigkeit S. 215 – 6. Funktionen von mehreren Veränderlichen S. 217 – 7. Funktionen und Transformationen S. 219 | |

| | |
|---|-----|
| § 2. Grenzwerte | 220 |
| 1. Der Grenzwert einer Folge a_n S. 220 – 2. Monotone Folgen S. 224 – 3. Die Eulersche Zahl e S. 226 – 4. Die Zahl π S. 227 – 5. Kettenbrüche S. 229 | |
| § 3. Grenzwerte bei stetiger Annäherung | 231 |
| 1. Einleitung. Allgemeine Definition S. 231 – 2. Bemerkungen zum Begriff des Grenzwertes S. 232 – 3. Der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ S. 234 – 4. Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$ S. 235 | |
| § 4. Genaue Definition der Stetigkeit | 236 |
| § 5. Zwei grundlegende Sätze über stetige Funktionen | 237 |
| 1. Der Satz von BOLZANO S. 237 – 2. Beweis des Bolzanoschen Satzes S. 238 – 3. Der Satz von WEIERSTRASS über Extremwerte S. 239 – 4. Ein Satz über Zahlenfolgen. Kompakte Mengen S. 240 | |
| § 6. Einige Anwendungen des Satzes von BOLZANO | 241 |
| 1. Geometrische Anwendungen S. 241 – 2. Anwendung auf ein mechanisches Problem S. 243 | |
| Ergänzung zu Kapitel VI. Weitere Beispiele für Grenzwerte und Stetigkeit | 245 |
| § 1. Beispiele von Grenzwerten | 245 |
| 1. Allgemeine Bemerkungen S. 245 – 2. Der Grenzwert von q^n S. 245 – 3. Der Grenzwert von $\sqrt[n]{p}$ S. 246 – 4. Unstetige Funktionen als Limites stetiger Funktionen S. 247 – 5. Grenzwerte durch Iteration S. 248 | |
| § 2. Ein Beispiel für Stetigkeit | 249 |
| Siebentes Kapitel | |
| Maxima und Minima | |
| Einleitung | 251 |
| § 1. Probleme aus der elementaren Geometrie | 252 |
| 1. Die maximale Fläche eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten S. 252 – 2. Der Satz des Heron. Extremaleigenschaften von Lichtstrahlen S. 252 – 3. Anwendungen auf Probleme für Dreiecke S. 253 – 4. Tangentialeigenschaften der Ellipse und Hyperbel. Entsprechende Extremaleigenschaften S. 254 – 5. Extreme Abstände von einer gegebenen Kurve S. 256 | |
| § 2. Ein allgemeines Prinzip bei Extremalproblemen | 258 |
| 1. Das Prinzip S. 258 – 2. Beispiele S. 259 | |
| § 3. Stationäre Punkte und Differentialrechnung | 260 |
| 1. Extremwerte und stationäre Punkte S. 260 – 2. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variablen. Sattelpunkte S. 261 – 3. Minimaxpunkte und Topologie S. 262 – 4. Der Abstand eines Punktes von einer Fläche S. 263 | |
| § 4. Das Schwarzsche Dreiecksproblem | 264 |
| 1. Der Schwarzsche Spiegelungsbeweis S. 264 – 2. Ein zweiter Beweis S. 265 | |
| 3. Stumpfwinklige Dreiecke S. 267 – 4. Dreiecke aus Lichtstrahlen S. 267 – 5. Bemerkungen über Reflexionsprobleme und ergodische Bewegung S. 268 | |
| § 5. Das Steinersche Problem | 269 |
| 1. Das Problem und seine Lösung S. 269 – 2. Diskussion der beiden Alternativen S. 270 – 3. Ein komplementäres Problem S. 272 – 4. Bemerkungen und Übungen S. 272 – 5. Verallgemeinerung auf das Straßennetz-Problem S. 273 | |
| § 6. Extrema und Ungleichungen | 274 |
| 1. Das arithmetische und geometrische Mittel zweier positiver Größen S. 274 | |
| 2. Verallgemeinerung auf n Variablen S. 275 – 3. Die Methode der kleinsten Quadrate S. 276 | |
| § 7. Die Existenz eines Extremums. Das Dirichletsche Prinzip | 277 |
| 1. Allgemeine Bemerkungen S. 277 – 2. Beispiele S. 279 – 3. Elementare Extremalprobleme S. 280 – 4. Schwierigkeiten bei komplizierteren Problemen S. 282 | |
| § 8. Das isoperimetrische Problem | 283 |

§ 9. Extremalprobleme mit Randbedingungen. Zusammenhang zwischen dem Steiner-
schen Problem und dem isoperimetrischen Problem 285

§ 10. Die Variationsrechnung 288

1. Einleitung S. 288 – 2. Die Variationsrechnung. Das Fermatsche Prinzip in der
Optik S. 289 – 3. BERNOULLI'S Behandlung des Problems der Brachystochrone
S. 290 – 4. Geodätische Linien auf einer Kugel. Geodätische Linien und Maxi-
Minima S. 291

§ 11. Experimentelle Lösungen von Minimumproblemen. Seifenhautexperimente . . . 292

1. Einführung S. 292 – 2. Seifenhautexperimente S. 293 – 3. Neue Experimente zum
Plateauschen Problem S. 294 – 4. Experimentelle Lösungen anderer mathemati-
scher Probleme S. 297

Achtes Kapitel

Die Infinitesimalrechnung

Einleitung 302

§ 1. Das Integral 303

1. Der Flächeninhalt als Grenzwert S. 303 – 2. Das Integral S. 304 – 3. Allgemeine
Bemerkungen zum Integralbegriff. Endgültige Definition S. 307 – 4. Beispiele. In-
tegration von x^n S. 308 – 5. Regeln der Integralrechnung S. 312

§ 2. Die Ableitung 315

1. Die Ableitung als Steigung S. 315 – 2. Die Ableitung als Grenzwert S. 316
3. Beispiele S. 317 – 4. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen S. 320
5. Differentiation und Stetigkeit S. 320 – 6. Ableitung und Geschwindigkeit. Zweite
Ableitung und Beschleunigung S. 321 – 7. Die geometrische Bedeutung der zweiten
Ableitung S. 323 – 8. Maxima und Minima S. 324

§ 3. Die Technik des Differenzierens 324

§ 4. Die Leibnizsche Schreibweise und das „Unendlich Kleine“ 329

§ 5. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung 331

1. Der Fundamentalsatz S. 331 – 2. Erste Anwendungen. Integration von x^r , $\cos x$,
 $\sin x$, $\arctan x$ S. 334 – 3. Die Leibnizsche Formel für π S. 336

§ 6. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus 337

1. Definition und Eigenschaften des Logarithmus. Die Eulersche Zahl e S. 337 – 2.
Die Exponentialfunktion S. 339 – 3. Differentiationsformeln für e^x , a^x , x^a S. 341
4. Explizite Ausdrücke für e , e^x und $\ln x$ als Limites S. 342 – 5. Unendliche Reihen
für den Logarithmus. Numerische Berechnung S. 344

§ 7. Differentialgleichungen 346

1. Definition S. 346 – 2. Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion. Radio-
aktiver Zerfall. Wachstumsgesetz. Zinseszins S. 346 – 3. Weitere Beispiele. Ein-
fachste Schwingungen S. 349 – 4. NEWTON'S Grundgesetz der Dynamik S. 351

Ergänzung zu Kapitel VIII 353

§ 1. Grundsätzliche Fragen 353

1. Differenzierbarkeit S. 353 – 2. Das Integral S. 355 – 3. Andere Anwendungen
des Integralbegriffes. Arbeit. Länge S. 355

§ 2. Größenordnungen 358

1. Die Exponentialfunktion und die Potenzen von x S. 358 – 2. Die Größenordnung
von $\ln(n!)$ S. 360

§ 3. Unendliche Reihen und Produkte 361

1. Unendliche Reihen von Funktionen S. 361 – 2. Die Eulersche Formel $\cos x +$
 $i \sin x = e^{ix}$ S. 365 – 3. Die harmonische Reihe und die Zeta-Funktion. Das
Eulersche Produkt für den Sinus S. 367

§ 4. Ableitung des Primzahlsatzes mit statistischen Methoden 369

Anhang

| | |
|---|-----|
| Ergänzungen, Probleme und Übungsaufgaben | 373 |
| Arithmetik und Algebra | 373 |
| Analytische Geometrie | 374 |
| Geometrische Konstruktionen | 379 |
| Projektive und nichteuklidische Geometrie | 380 |
| Topologie | 381 |
| Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit. | 384 |
| Maxima und Minima | 384 |
| Infinitesimalrechnung | 386 |
| Integrationstechnik | 388 |
| Hinweise auf weiterführende Literatur | 392 |
| Namen- und Sachverzeichnis | 394 |