Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Baden-Württemberg

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analysis

Analytische Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur im Basisfach benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch den klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs, auch kurz vor dem Abitur.

- **Formeln** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Maßgeschnittene **Beispiele** verdeutlichen überall die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Allen Schülerinnen und Schülern wünschen wir eine gute Vorbereitung auf das Abitur und viel Erfolg bei der Prüfung!

Ihr Autorenteam
Attila Furdek, Matthias Benkeser, Diana Dragmann

Zahlreiche Beispielaufgaben mit vollständigen Lösungen für beide Teile der mündlichen Prüfung finden Sie im Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg – Mathematik Basisfach".

Ausführliche Erläuterungen sowie viele weitere Übungsaufgaben finden Sie in den Abitur-Trainingsbänden:
- Abitur-Training Analysis
- Abitur-Training Analytische Geometrie
- Abitur-Training Stochastik

3 Ableitung

Die Ableitung einer Funktion entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion.
Im Anwendungsbezug beschreibt die Ableitung die momentane Änderungsrate.

3.1 Ableitungen der Grundfunktionen

Es gilt die **Potenzregel**:

$f(x) = x^k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k \cdot x^{k-1}$

Ableitungen weiterer Grundfunktionen

$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

1. $f(x) = x^4$
   $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

2. $f(x) = 3$
   $f'(x) = 0$

3. $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
   $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
   $h'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

3.2 Ableitungsregeln

Zum Ableiten komplexerer Funktionen benötigt man weitere Regeln.

Faktorregel

$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$

Summenregel

$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Kettenregel

$f(x) = u(mx + c) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m \cdot u'(mx + c)$

Die wichtigsten Beispiele:

$f(x) = \sin(mx + c) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m \cdot \cos(mx + c)$

$f(x) = \cos(mx + c) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m \cdot (-\sin(mx + c))$

$f(x) = e^{mx + c} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m \cdot e^{mx + c}$

$f(x) = (mx + c)^k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k \cdot m \cdot (mx + c)^{k-1}$

Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Faktorregel

$f(x) = 5\cos x$

$f'(x) = 5 \cdot (-\sin x) = -5\sin x$

Summenregel

$f(x) = \sin x + x^2$

$f'(x) = \cos x + 2x$

Kettenregel bei Sinusfunktion

$f(x) = \sin(\mathbf{3}x - 1) \qquad g(x) = 5\sin(\mathbf{2}x + 3)$

$f'(x) = \mathbf{3}\cos(3x - 1) \qquad g'(x) = 5 \cdot \mathbf{2}\cos(2x + 3) = 10\cos(2x + 3)$

Kettenregel bei Kosinusfunktion

$f(x) = \cos(\mathbf{4}x - 3) \qquad g(x) = 2\cos(\mathbf{6}x + 7)$

$f'(x) = -\mathbf{4}\sin(4x - 3) \qquad g'(x) = 2 \cdot \mathbf{6} \cdot (-\sin(6x + 7)) = -12\sin(6x + 7)$

Kettenregel bei e-Funktion

$f(x) = e^{\mathbf{5}x} \qquad g(x) = 2e^{\mathbf{10}x}$

$f'(x) = \mathbf{5}e^{5x} \qquad g'(x) = 2 \cdot \mathbf{10}e^{10x} = 20e^{10x}$

Kettenregel bei Klammer mit Hochzahl

$f(x) = (\mathbf{4}x + 7)^5$

$f'(x) = 5 \cdot \mathbf{4} \cdot (4x + 7)^4 = 20 \cdot (4x + 7)^4$

$g(x) = 3 \cdot (\mathbf{2}x - 1)^4$

$g'(x) = 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{2} \cdot (2x - 1)^3 = 24 \cdot (2x - 1)^3$

Produktregel

$f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$

$f'(x) = (x^3)' \cdot \sin(x) + x^3 \cdot (\sin(x))' = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$

$g(x) = x^5 \cdot e^{2x}$

$g'(x) = (x^5)' \cdot e^{2x} + x^5 \cdot (e^{2x})' = 5x^4 \cdot e^{2x} + x^5 \cdot 2e^{2x}$

3.3 Tangente und Normale in einem Punkt des Graphen

Gleichung der Tangente

Die Ableitung $f'(u)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(u\,|\,f(u))$ an. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt lautet:

$t\colon\ y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Gleichung der Normale

Die Normale im Punkt $P(u\,|\,f(u))$ ist die Senkrechte zur Tangente. Für ihre Gleichung gilt:

$n\colon\ y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) \quad \text{mit} \quad f'(u) \neq 0$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(1\,|\,2)$ an den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3$.

$f(u) = f(1) = 2$

$f'(x) = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(u) = f'(1) = 6$

$t\colon\ y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

$t\colon\ y = 6 \cdot (x - 1) + 2 \quad \text{oder} \quad y = 6x - 4$

Alternativlösung:

$t\colon\ y = mx + c \ \text{ mit } \ m = f'(1) = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6x + c$

Punktprobe mit $P(1\,|\,2)$ liefert $2 = 6 \cdot 1 + c$, also $c = -4$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Normale im Punkt $P(1 | 5)$ an den Graphen der Funktion $f(x) = 5x^2$.

$f(u) = f(1) = 5$

$f'(x) = 10x \quad \Rightarrow \quad f'(u) = f'(1) = 10 \quad$ und $\quad -\frac{1}{f'(u)} = -\frac{1}{10} = -0{,}1$

$n\colon\ y = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + f(1)$

$n\colon\ y = -0{,}1 \cdot (x - 1) + 5 \quad$ oder $\quad y = -0{,}1x + 5{,}1$

Alternativlösung:

$n\colon\ y = mx + c$ mit $m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{10} = -0{,}1 \quad \Rightarrow \quad y = -0{,}1x + c$

Punktprobe mit $P(1 | 5)$ liefert $5 = -0{,}1 \cdot 1 + c$, also $c = 5{,}1$.

3.4 Grafisches Ermitteln der Steigung

Die Steigung lässt sich auch mithilfe eines Steigungsdreiecks ermitteln.

Vorgehensweise

Schritt 1: Einzeichnen der Tangente an den Graphen an der relevanten Stelle $x = x_0$ (*Hinweis:* Das Einzeichnen erfolgt näherungsweise.)

Schritt 2: Markieren eines geeigneten Steigungsdreiecks

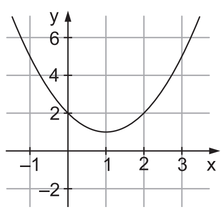
Schritt 3: Ermitteln der Steigung nach der Formel $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (bei steigender Tangente) bzw. $m = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (bei fallender Tangente)

Beachte: Mit Δx, Δy sind hier stets positive Differenzen gemeint.

Bestimmen Sie die Steigung des abgebildeten Graphen

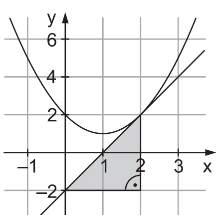
(1) an der Stelle $x = 2$;

(2) an der Stelle $x = 0$.

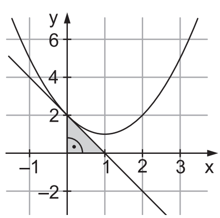


Schritt 1 und Schritt 2:

(1)



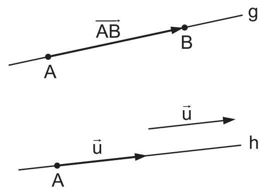
(2)



2 Geraden und Ebenen

2.1 Geraden

- Zwei Punkte A und B bestimmen eine Gerade g mit der Gleichung:
  g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$
- Ein Punkt A und ein Vektor $\vec{u}$ bestimmen eine Gerade h mit der Gleichung:
  h: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u}$



Dabei heißt A Stützpunkt und $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\vec{u}$ Richtungsvektor der Geraden.

Gleichung der Geraden g durch die Punkte A(1|7|4) und B(9|3|5):

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, führt man eine **Punktprobe** durch.

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte C(14|14|−17) und D(8|6|3).

Untersuchen Sie, ob die Punkte auf der Geraden g liegen.

Punktprobe für Punkt C:

$$\left.\begin{array}{rclcrclcl} 5+3t &=& 14 & \Rightarrow & 3t &=& 9 & \Rightarrow & t=3 \\ 2+4t &=& 14 & \Rightarrow & 4t &=& 12 & \Rightarrow & t=3 \\ -2-5t &=& -17 & \Rightarrow & -5t &=& -15 & \Rightarrow & t=3 \end{array}\right\} \; 3=3=3$$

Der Punkt C liegt auf der Geraden g.

Punktprobe für Punkt D:

$$\left.\begin{array}{rclcrclcl} 5+3t &=& 8 & \Rightarrow & 3t &=& 3 & \Rightarrow & t=1 \\ 2+4t &=& 6 & \Rightarrow & 4t &=& 4 & \Rightarrow & t=1 \\ -2-5t &=& 3 & \Rightarrow & -5t &=& 5 & \Rightarrow & t=-1 \end{array}\right\} \; 1 \neq -1$$

Der Punkt D liegt nicht auf der Geraden g.

Merke: Ein Punkt liegt dann auf einer Geraden, wenn bei der Punktprobe alle drei Parameterwerte gleich sind.
Wenn bei der Punktprobe nicht alle drei Parameterwerte gleich sind, liegt der Punkt *nicht* auf der Geraden.

Die Geradengleichungen für die **Koordinatenachsen** lauten:

x_1-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(x_2 = 0 \text{ und } x_3 = 0)$

x_2-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(x_1 = 0 \text{ und } x_3 = 0)$

x_3-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0)$

Besondere Lage einer Geraden g im Koordinatensystem

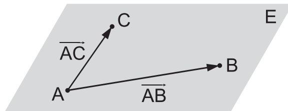
Wenn im Richtungsvektor einer Geraden **zwei** Koordinaten null sind, dann verläuft die Gerade **parallel** zu einer **Koordinatenachse**.

Wenn im Richtungsvektor einer Geraden **eine** Koordinate null ist, dann verläuft die Gerade **parallel** zu einer **Koordinatenebene**.

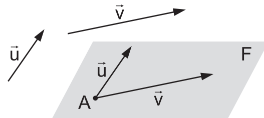
- Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_2-Achse.
- Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1-Achse.
- Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_3-Achse.
- Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene.
- Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_3-Ebene.
- Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_2x_3-Ebene.

2.2 Parametergleichung einer Ebene

- Drei Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E mit der Gleichung:
  E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
  (Parametergleichung)



- Ein Punkt A und zwei nicht parallele Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bestimmen eine Ebene F mit der Gleichung:
  F: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$



Dabei heißt A Stützpunkt der Ebene und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen Spannvektoren der Ebene.

Die drei Punkte A(1 | 4 | 2), B(3 | 1 | 6) und C(7 | 8 | 4) legen die Ebene E fest mit der Gleichung:

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.3 Koordinatengleichung einer Ebene

Ein Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf einer Ebene E steht, heißt **Normalenvektor** der Ebene E.

Bei gegebenem Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ lässt sich die **Koordinatengleichung** der Ebene aufstellen:

E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

Die Zahl d auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Ebene E (Punktprobe).

Umgekehrt lässt sich an der Koordinatengleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ einer Ebene der Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ablesen.

2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen

2.1 Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird mit P(A) bezeichnet. Eine Wahrscheinlichkeit ist immer eine Zahl zwischen 0 und 1. Je größer diese Zahl ist, desto höher ist die Chance, dass das Ereignis eintritt.

Die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses und des zugehörigen Gegenereignisses ergeben zusammen immer 1:

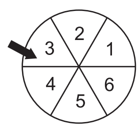
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ und daher $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2.2 Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißt **Laplace-Experiment**.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A erhält man in diesem Fall, indem man die Anzahl der günstigen Fälle durch die Anzahl der möglichen Fälle teilt:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Geben Sie die Ergebnismenge an und begründen Sie, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt.
Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfeil auf einer geraden Zahl stehen bleibt.



$S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Es ist ein Laplace-Experiment, da die einzelnen Sektoren des Rades gleich groß sind und somit jede Zahl gleich wahrscheinlich ist.

A: Der Pfeil zeigt auf eine gerade Zahl.
Es gibt 6 mögliche Fälle (1, 2, 3, 4, 5, 6) und 3 günstige Fälle (2, 4, 6).
Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

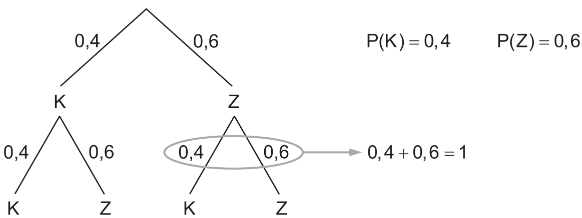
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2.3 Baumdiagramme und Pfadregeln

Mehrstufige Zufallsexperimente können mit einem Baumdiagramm dargestellt werden. Durchläuft man ein Baumdiagramm, indem man sich an jeder Gabelung für einen Ast entscheidet, erhält man einen **Pfad**. Jeder Pfad entspricht einem Ergebnis des zugrunde liegenden Zufallsexperiments.

Für jede Gabelung innerhalb eines Baumdiagramms gilt:
Zählt man die Wahrscheinlichkeiten an allen Ästen der Gabelung zusammen, erhält man stets 1.

Zweimaliges Werfen einer verbeulten Münze, die nur bei 40 % aller Würfe auf Kopf fällt.



Pfade bzw. Ergebnisse: KK, KZ, ZK, ZZ

1. Pfadregel
Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades werden multipliziert.

Im Beispiel oben wird folgendes Ereignis betrachtet:

A: Im ersten Wurf erhält man Zahl, im zweiten Wurf Kopf.

Dieses Ereignis entspricht dem Ergebnis ZK. Mit der Pfadregel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

$P(A) = \underbrace{0,6}_{Z} \cdot \underbrace{0,4}_{K} = 0,24$

2. Pfadregel (Summenregel)
Die Wahrscheinlichkeiten mehrerer Pfade werden addiert.

Im Beispiel der vorherigen Seite wird folgendes Ereignis betrachtet:

B: Bei beiden Würfen fällt die Münze auf dieselbe Seite.

Dieses Ereignis besteht aus den zwei Ergebnissen KK und ZZ. Mit der Summenregel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

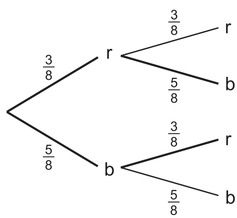
$$P(B) = \underbrace{0{,}4}_{K} \cdot \underbrace{0{,}4}_{K} + \underbrace{0{,}6}_{Z} \cdot \underbrace{0{,}6}_{Z} = 0{,}16 + 0{,}36 = 0{,}52$$

Mehrstufige Zufallsexperimente können durch das Ziehen von Kugeln aus einer Urne veranschaulicht werden. Dabei unterscheidet man, ob *mit* oder *ohne* Zurücklegen der Kugeln gezogen wird.

In einer Urne befinden sich drei rote und fünf blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen. Zeichnen Sie jeweils ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der beiden Kugeln rot ist.

Ziehen mit Zurücklegen

In der Urne befinden sich insgesamt 8 Kugeln. Da die Kugeln zurückgelegt werden, bleiben die einzelnen Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich.

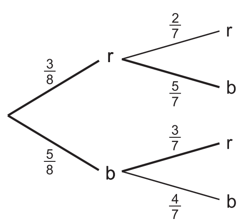


A: Genau eine der beiden Kugeln ist rot.

$$P(A) = \underbrace{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}}_{r\,b} + \underbrace{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}}_{b\,r} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

Ziehen ohne Zurücklegen

Da die Kugeln nicht zurückgelegt werden, sind beim zweiten Ziehen nur noch 7 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten ändern sich.



A: Genau eine der beiden Kugeln ist rot.

$$P(A) = \underbrace{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}}_{r\,b} + \underbrace{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}}_{b\,r} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$