

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	1
Kurzfassung	3
1 Einleitung	5
2 Grundlagen	9
2.1 Notationen	9
2.2 Hilfsmittel	14
3 Variationsmethoden	17
3.1 Prinzip der Galerkinapproximation	19
3.1.1 Finite-Element-Räume	21
3.2 Galerkinapproximation im stochastischen Fall	26
3.2.1 Pfadweise Galerkinapproximation	26
3.2.2 Stochastische Galerkinapproximation	30
3.2.3 Polynomiales Chaos	32
4 Entwicklung stochastischer Prozesse	39
4.1 Karhunen-Loève-Entwicklung	40
4.1.1 Grundlegende Eigenschaften	42
4.1.1.1 Allgemeine Prozesse	42

4.1.1.2	Gaußprozesse	45
4.1.2	Gleichmäßige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins	46
4.1.2.1	Allgemeine Prozesse	46
4.1.2.2	Gaußprozesse	47
4.1.2.2.1	Stetige Modifizierbarkeit	48
4.1.3	Beschränktheit	50
4.1.3.1	Allgemeine Prozesse	50
4.1.3.2	Gaußprozesse	51
4.1.3.2.1	Stützung	51
4.1.3.2.2	Einschränkung auf eine messbare Teilmenge Ω' von Ω	52
4.1.4	Der mittlere integrierte quadratische Fehler (MISE)	55
4.1.5	Schätzung der Kovarianzfunktion	56
4.1.5.1	Regressionsschätzung	57
4.1.5.1.1	L^2 -Konsistenz	57
4.1.5.1.2	Gleichmäßige Konsistenz	58
4.1.5.2	Die Karhunen-Loëve-Entwicklung nach Eigenfunktionen der geschätzten Kovarianzfunktion	60
4.2	Alternative Orthogonalentwicklung	69
4.2.1	Waveletentwicklung	71
4.2.1.1	Waveletbasen	71
4.2.1.2	Eigenschaften der Waveletentwicklungen	73
4.2.1.3	Wavelets auf einem kompakten Intervall	75
4.2.1.4	Entwicklung eines stochastischen Prozesses	76
5	Elliptische Differentialgleichungen	79
5.1	Deterministische Koeffizienten	79
5.1.1	Verallgemeinerte Lösungen	81
5.1.1.1	Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen	82

INHALTSVERZEICHNIS	iii
5.1.1.2 Koerzivität der Bilinearform	83
5.1.1.3 Regularität der Lösungen	85
5.2 Stochastische Koeffizienten	86
5.2.1 Approximation der Koeffizienten und Diskretisierung	86
5.2.2 Polynomiale Chaos-Lösung	101
5.2.3 Beispiel	103
5.3 Stochastische rechte Seite	114
6 Parabolische Differentialgleichungen	121
6.1 Deterministische Koeffizienten	121
6.1.1 Energiegleichung	122
6.1.1.1 Dirichletproblem	122
6.1.1.2 Zweites und drittes Randwertproblem	124
6.1.2 Verallgemeinerte Lösungen	124
6.1.3 Existenz einer eindeutigen Lösung	125
6.2 Stochastische Koeffizienten	128
6.2.1 Approximation der Koeffizienten	128
6.2.2 Semidiskrete polynomiale Chaos-Lösung	137
6.3 Stochastische rechte Seite und Anfangsbedingung	144
Literaturverzeichnis	147