

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1 Notationen . . . . .	9
2.2 Hilfsmittel . . . . .	14
<b>3 Variationsmethoden</b>	<b>17</b>
3.1 Prinzip der Galerkinapproximation . . . . .	19
3.1.1 Finite-Element-Räume . . . . .	21
3.2 Galerkinapproximation im stochastischen Fall . . . . .	26
3.2.1 Pfadweise Galerkinapproximation . . . . .	26
3.2.2 Stochastische Galerkinapproximation . . . . .	30
3.2.3 Polynomiales Chaos . . . . .	32
<b>4 Entwicklung stochastischer Prozesse</b>	<b>39</b>
4.1 Karhunen-Loève-Entwicklung . . . . .	40
4.1.1 Grundlegende Eigenschaften . . . . .	42
4.1.1.1 Allgemeine Prozesse . . . . .	42

4.1.1.2	Gaußprozesse . . . . .	45
4.1.2	Gleichmäßige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins . .	46
4.1.2.1	Allgemeine Prozesse . . . . .	46
4.1.2.2	Gaußprozesse . . . . .	47
4.1.2.2.1	Stetige Modifizierbarkeit . . . . .	48
4.1.3	Beschränktheit . . . . .	50
4.1.3.1	Allgemeine Prozesse . . . . .	50
4.1.3.2	Gaußprozesse . . . . .	51
4.1.3.2.1	Stützung . . . . .	51
4.1.3.2.2	Einschränkung auf eine meßbare Teilmenge $\Omega'$ von $\Omega$ . . . . .	52
4.1.4	Der mittlere integrierte quadratische Fehler (MISE) . . . .	55
4.1.5	Schätzung der Kovarianzfunktion . . . . .	56
4.1.5.1	Regressionsschätzung . . . . .	57
4.1.5.1.1	$L^2$ -Konsistenz . . . . .	57
4.1.5.1.2	Gleichmäßige Konsistenz . . . . .	58
4.1.5.2	Die Karhunen-Loève-Entwicklung nach Eigenfunktionen der geschätzten Kovarianzfunktion . . . .	60
4.2	Alternative Orthogonalentwicklung . . . . .	69
4.2.1	Waveletentwicklung . . . . .	71
4.2.1.1	Waveletbasen . . . . .	71
4.2.1.2	Eigenschaften der Waveletentwicklungen . . . . .	73
4.2.1.3	Wavelets auf einem kompakten Intervall . . . . .	75
4.2.1.4	Entwicklung eines stochastischen Prozesses . . . .	76
<b>5</b>	<b>Elliptische Differentialgleichungen</b>	<b>79</b>
5.1	Deterministische Koeffizienten . . . . .	79
5.1.1	Verallgemeinerte Lösungen . . . . .	81
5.1.1.1	Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen .	82

5.1.1.2	Koerzivität der Bilinearform . . . . .	83
5.1.1.3	Regularität der Lösungen . . . . .	85
5.2	Stochastische Koeffizienten . . . . .	86
5.2.1	Approximation der Koeffizienten und Diskretisierung . . .	86
5.2.2	Polynomiale Chaos-Lösung . . . . .	101
5.2.3	Beispiel . . . . .	103
5.3	Stochastische rechte Seite . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Parabolische Differentialgleichungen</b>	<b>121</b>
6.1	Deterministische Koeffizienten . . . . .	121
6.1.1	Energiegleichung . . . . .	122
6.1.1.1	Dirichletproblem . . . . .	122
6.1.1.2	Zweites und drittes Randwertproblem . . . . .	124
6.1.2	Verallgemeinerte Lösungen . . . . .	124
6.1.3	Existenz einer eindeutigen Lösung . . . . .	125
6.2	Stochastische Koeffizienten . . . . .	128
6.2.1	Approximation der Koeffizienten . . . . .	128
6.2.2	Semidiskrete polynomiale Chaos-Lösung . . . . .	137
6.3	Stochastische rechte Seite und Anfangsbedingung . . . . .	144
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>147</b>