3.14 *Wie lauten die Ansätze für die Partialbrüche folgender Funktionen?*

(a) $\frac{5x^4+18x^3+11x^2+12x+8}{x(x-1)^2(x+2)^3}$, (b) $\frac{x}{(x^2+x+1)(x^2+1)^2}$, (c) $\frac{1}{x^2(2+x^2)^2}$.

(a) $$\frac{5x^4+18x^3+11x^2+12x+8}{x(x-1)^2(x+2)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2} + \frac{f}{(x+2)^3}.$$

(b) $$\frac{x}{(x^2+x+1)(x^2+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2},$$

x^2+1 und x^2+x+1 haben keine reellen Nullstellen!

(c) $$\frac{1}{x^2(2+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{2+x^2} + \frac{ex+f}{(2+x^2)^2}.$$

Bestimmung der Koeffizienten

Zur Bestimmung der Koeffizienten eignen sich folgende Methoden:

1. **Koeffizientenvergleich** (geht immer!)
2. **Zuhaltemethode** (nur für Linearfaktoren!)
3. **Einsetzmethode** (geht immer!)

Die Methoden unterscheiden sich durch einen verschieden großen Rechenaufwand. Die **Zuhaltemethode** ist am schnellsten. Sie liefert aber nur die Koeffizienten, die bei Linearfaktoren mit maximalen Exponenten stehen.

3.15 *Man zerlege in Partialbrüche:* (a) $\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$, (b) $\frac{3}{x^2+5x+4}$.

(a) Ansatz: $\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

Beide Koeffizienten a und b lassen sich mit der Zuhaltemethode bestimmen:

1.) Man multipliziert beide Seiten der Gleichung mit $x-1$ und kürzt:

$\frac{2x+3}{x+1} = a + \frac{b(x-1)}{x+1}$. Setzt man $x=1$, folgt $\frac{2+3}{2} = a + \frac{b}{1+1}\cdot 0$, also $\underline{a = \frac{5}{2}}$.

Man kann im Kopf kürzen, indem man auf der linken Seite $x-1$ im Nenner zuhält. Setzt man dann $x=1$ (die Nullstelle von $x-1$) ein, so bleibt rechts nur a stehen und links $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$.

2.) Man multipliziert mit $x+1$ (hält links im Nenner $(x+1)$ zu) und setzt $x=-1$. Rechts bleibt nur b stehen und links $\frac{-2+3}{-2}$. Also ist $\underline{b = -\frac{1}{2}}$.

Exakter: $a = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2}$ und $b = \lim\limits_{x\to -1}(x+1)\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}$.

Daher der Name: Zuhaltemethode oder auch Grenzwertmethode!

Partialbruchzerlegung: $\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{5/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1} = \underline{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}}$.

(b) Ansatz: $\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}$.

Die Zuhaltemethode liefert $a = \frac{3}{-1+4} = 1$ und $b = \frac{3}{-4+1} = -1$.

Partialbruchzerlegung $\frac{3}{x^2+5x+4} = \underline{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}}$.

Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz

Wegen $\operatorname{Im}\big(A\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}\big) = A\sin(\omega t+\varphi)$ und $\operatorname{Im}(z_1+z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$ gilt:

Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz

Superposition

Schwingungen $y = A\sin(\omega t+\varphi)$ lassen sich durch komplexe Zahlen (Zeiger) $A\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}$ darstellen.

Der Überlagerung von Schwingungen entspricht die Addition ihrer komplexen Amplituden (Zeiger):

$$A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\sin(\omega t+\varphi_2) = A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A_1\mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2\mathrm{e}^{i\varphi_2} = A\mathrm{e}^{i\varphi}$$

Schwingungen lassen sich also durch komplexe Zahlen (Zeiger) darstellen. Der Überlagerung von Schwingungen entspricht die Addition ihrer Zeiger:

Die **komplexe Amplitude $\boldsymbol{A\mathrm{e}^{i\varphi}}$** enthält $\begin{cases}\text{die reelle Amplitude } \boldsymbol{A} \\ \text{und die Phasenverschiebung } \boldsymbol{\varphi}.\end{cases}$

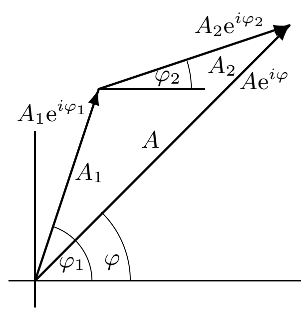
Zeigerdiagramm

Die Addition (Überlagerung) zweier Schwingungen gleicher Frequenz ergibt wieder eine Schwingung der gleichen Frequenz.

Die komplexe Amplitude der Überlagerung ist die Summe der komplexen Amplituden der beiden Schwingungen:

$$A\mathrm{e}^{i\varphi} = A_1\mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2\mathrm{e}^{i\varphi_2}$$

Die Amplituden sind komplexe Zahlen, deren Addition die gewöhnliche Vektoraddition ist.



$$A\mathrm{e}^{i\varphi} = A_1\mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2\mathrm{e}^{i\varphi_2}$$

Addition der komplexen Amplituden

Zeigerdiagramm

3.32 *Es sei* $A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\sin(\omega t+\varphi_2) = A\sin(\omega t+\varphi)$.
Man berechne A *und* $\tan\varphi$ *aus* $A_1,\ A_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2$.

(1) Komplexe Rechnung: Aus dem Zeigerdiagramm ergibt sich:

4.5 Wurzeln aus komplexen Zahlen, Formel von Moivre

Die komplexe Zahl a heißt eine **n–te Wurzel** der komplexen Zahl b, wenn $a^n = b$ ist.
Aus der Eulerschen Darstellung $b = re^{i\varphi}$ mit $r = |b|$ und $\varphi = \arg(b)$ sieht man, daß $a = \sqrt[n]{r}\, \mathrm{e}^{i\varphi/n}$ *eine* n–te Wurzel aus b ist.

Formel von Moivre

Für jede komplexe Zahl $b \neq 0$ hat die Gleichung $z^n = b = re^{i\varphi}$ genau n verschiedene Lösungen, nämlich die n n–ten Wurzeln aus b.

Man berechnet sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r}\,(\cos(\varphi/n + k\cdot 2\pi/n) + i\sin(\varphi/n + k\cdot 2\pi/n)) \\ z_k &= \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i(\varphi/n + k\cdot 2\pi/n)} \\ z_k &= \mathrm{e}^{ik\cdot 2\pi/n}\cdot \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\varphi/n} \qquad \text{für } k = 0,\ldots,n-1 \end{aligned}$$

Die n–ten Wurzeln aus b liegen auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt. Sie bilden ein **regelmäßiges n–Eck**.

Die n komplexen Zahlen, deren n–te Potenz gleich 1 ist, nennt man die **n–ten Einheitswurzeln**. Sie liegen auf dem Einheitskreis und sind die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ bzw. die Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$.

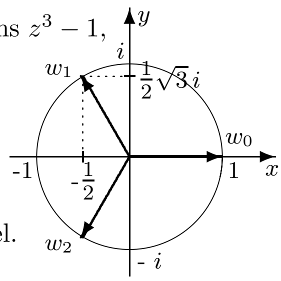
Aus der Formel von Moivre (mit $r = 1$ und $\varphi = 0$) erhält man für die n–ten Einheitswurzeln $w_0, \ldots, w_{n-1}$:

$$\begin{aligned} w_k &= \cos(k\cdot 2\pi/n) + i\sin(k\cdot 2\pi/n) \\ w_k &= \mathrm{e}^{ik\cdot 2\pi/n} = (\mathrm{e}^{i2\pi/n})^k \qquad \text{für } k = 0,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Alle n–ten Einheitswurzeln erhält man also durch Potenzieren aus der n–ten Einheitswurzel mit kleinstem positiven Winkel, also aus $w_1 = \mathrm{e}^{i2\pi/n}$

4.20 *Man berechne und skizziere:* (a) *die 3–ten Einheitswurzeln*
(b) *die 3–ten Wurzeln aus* -1.

(a) Die 3–ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms $z^3 - 1$, also die Lösungen der Gleichung $z^3 - 1 = 0$, d.h. $z^3 = 1$:



$$\begin{aligned} w_0 &= \mathrm{e}^{i0\cdot 2\pi/3} = \cos 0 + i\sin 0 &&= 1 \\ w_1 &= \mathrm{e}^{i1\cdot 2\pi/3} = \cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3 &&= -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ w_2 &= \mathrm{e}^{i2\cdot 2\pi/3} = \cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3 &&= -1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

w_1 ist die 3–te Einheitswurzel mit kleinstem positiven Winkel.

Es gilt: $w_1^2 = w_2$, $w_1^3 = w_0 = 1$, $w_1 \cdot w_2 = 1$, $w_1^{-1} = w_2$, $\overline{w_1} = w_2$.

4.28 *Man bestimme alle Nullstellen des Polynoms* $z^6 + (2-6i)z^3 - 11 - 2i$:

Um $z^6 + (2-6i)z^3 - 11 - 2i = 0$ zu lösen, setzt man $x := z^3$ und erhält die quadratische Gleichung $x^2 + (2-6i)x - 11 - 2i = 0$ mit den Lösungen

$$x_{1,2} = -1 + 3i \pm \sqrt{(1-3i)^2 + 11 + 2i} = -1 + 3i \pm \sqrt{3-4i}\,.$$

Berechnung *einer* 2-ten Wurzel w aus $3-4i$:

$|3-4i| = 5$, $\arg(3-4i) = \arctan(-4/3) \approx -0.93 \approx -53^0$ (4. Quadrant!)
$\Longrightarrow \quad w^2 = 5(\cos(-0.93) + i\sin(-0.93))$
$\Longrightarrow \quad w = \sqrt{5}\,(\cos(-0.93/2) + i\sin(-0.93/2)) = 2 - i$
$\Longrightarrow \quad x_{1,2} = -1 + 3i \pm (2-i) \quad \Longrightarrow \quad \underline{x_1 = 1 + 2i}$, $\underline{x_2 = -3 + 4i}$.

Wir hatten $x := z^3$ gesetzt. Die Nullstellen obigen Polynoms sind also die 3-ten Wurzeln aus $1 + 2i$ und aus $-3 + 4i$.

(i) Berechnung der 3-ten Wurzeln aus $\underline{x_1 = 1 + 2i}$:

Die drei Wurzeln liegen auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[6]{5}$ um den Nullpunkt.
$z_1^3 = 1 + 2i$ mit $|1+2i| = \sqrt{5}$, $\arg(1+2i) \approx 1.11 \approx 63^0$
$z_1^3 = \sqrt{5}\,(\cos 1.11 + i\sin 1.11)$. Moivre ergibt nun:

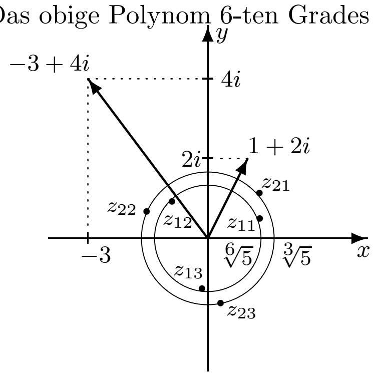
$$\begin{aligned}
z_{1,1} &= \sqrt[6]{5}\,(\cos(\tfrac{1.11}{3} + 0\cdot\tfrac{2\pi}{3}) + \sin(\tfrac{1.11}{3} + 0\cdot\tfrac{2\pi}{3})) &\approx& \quad 1.22 + 0.47i,\\
z_{1,2} &= \sqrt[6]{5}\,(\cos(\tfrac{1.11}{3} + 1\cdot\tfrac{2\pi}{3}) + \sin(\tfrac{1.11}{3} + 1\cdot\tfrac{2\pi}{3})) &\approx& \quad -1.02 + 0.82i,\\
z_{1,3} &= \sqrt[6]{5}\,(\cos(\tfrac{1.11}{3} + 2\cdot\tfrac{2\pi}{3}) + \sin(\tfrac{1.11}{3} + 2\cdot\tfrac{2\pi}{3})) &\approx& \quad -0.20 - 1.29i.
\end{aligned}$$

(ii) Berechnung der 3-ten Wurzeln aus $\underline{x_2 = -3 + 4i}$:

Die drei Wurzeln liegen auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[3]{5}$ um den Nullpunkt.
$z_2^3 = -3 + 4i$ mit $|-3+4i| = 5$, $\arg(-3+4i) \approx -0.93 + \pi \approx 2.21 \approx 127^0$,
$z_2^3 = 5(\cos 2.21 + i\sin 2.21)$. Moivre ergibt nun:

$$\begin{aligned}
z_{2,1} &= \sqrt[3]{5}\,(\cos(\tfrac{2.21}{3} + 0\cdot\tfrac{2\pi}{3} + \sin(\tfrac{2.21}{3} + 0\cdot\tfrac{2\pi}{3})) &\approx& \quad 1.26 + 1.15i,\\
z_{2,2} &= \sqrt[3]{5}\,(\cos(\tfrac{2.21}{3} + 1\cdot\tfrac{2\pi}{3} + \sin(\tfrac{2.21}{3} + 1\cdot\tfrac{2\pi}{3})) &\approx& \quad -1.63 + 0.52i,\\
z_{2,3} &= \sqrt[3]{5}\,(\cos(\tfrac{2.21}{3} + 2\cdot\tfrac{2\pi}{3} + \sin(\tfrac{2.21}{3} + 2\cdot\tfrac{2\pi}{3})) &\approx& \quad 0.36 - 1.67i.
\end{aligned}$$

Das obige Polynom 6-ten Grades hat also folgende 6 Nullstellen:



$z_{i,j}$	$x + iy$	φ	r
$z_{1,1}$	$1.22 + 0.47i$	21^0	$\sqrt[6]{5}$
$z_{1,2}$	$-1.02 + 0.82i$	141^0	$\sqrt[6]{5}$
$z_{1,3}$	$-0.20 - 1.29i$	261^0	$\sqrt[6]{5}$
$z_{2,1}$	$1.26 + 1.15i$	42^0	$\sqrt[3]{5}$
$z_{2,2}$	$-1.63 + 0.52i$	162^0	$\sqrt[3]{5}$
$z_{2,3}$	$0.36 - 1.67i$	282^0	$\sqrt[3]{5}$

Da man grundsätzlich zwei Möglichkeiten hat, eine Ebene darzustellen, interessiert es, diese beiden Darstellungen ineinander zu überführen:

Umformung
von Ebenendarstellungen

Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Parameterdarstellung}\\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}\end{array}} \xrightarrow[\substack{\text{Multiplikation mit}\\ \vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}=(a,b,c)}]{} \boxed{\begin{array}{c}\text{Koordinatendarstellung}\\ \vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{a}=\\ ax+by+cz=d\end{array}}$$

Man multipliziert die Parameterdarstellung mit einem Vektor $\vec{n}$, der auf den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht (**Normalenvektor**), z.B. mit $\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}$.

Koordinatendarstellung in Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Koordinatendarstellung}\\ ax+by+cz=d\end{array}} \xrightarrow[\substack{\text{Lösen des LGS}\\ \text{1 Gleichung, 3 Unbekannte}}]{} \boxed{\begin{array}{c}\text{Parameterdarstellung}\\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}\end{array}}$$

Man löst das LGS $ax+by+cz=d$.
Z.B., indem man, falls $a\neq 0$ ist, $y=r$ und $z=s$ setzt und nach x auflöst.
Das Ergebnis schreibt man vektoriell: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d/a\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-b/a\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-c/a\\0\\1\end{pmatrix}$
und erhält die Ebene in Parameterform (siehe z.B. BEI 5.45).

5.1 *Man bestimme eine Koordinatendarstellung der Ebene* $E:\vec{x}=(2,5,-1)+r(4,0,-3)+s(-1,1,1)$.

$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E.

Multiplikation der Parameterdarstellung mit $\vec{n}=(3,-1,4)$ ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{x} &= \vec{n}\cdot(2,5,-1)+r\,\underbrace{\vec{n}\cdot(4,0,-3)}_{=0}+s\,\underbrace{\vec{n}\cdot(-1,1,1)}_{=0}\\ \vec{n}\cdot\vec{x} &= \vec{n}\cdot(2,5,-1)\end{aligned}$$

$E:\quad 3x-y+4z=-3$ (Koordinatenform).

5.2 *Man bestimme eine Parameterdarstellung von* $E: 2x-3z=4$.

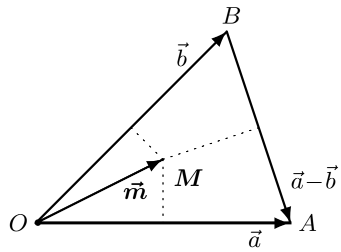
Das LGS hat eine zweiparametrige Lösung:
Setzt man $y=r$ und $z=s$, so erhält man: $x=\frac{1}{2}(4+3s)=2+1.5s$. Also

$$\begin{array}{l}x=2+0r+1.5s\\ y=0+1r+\ \ 0s\\ z=0+0r+\ \ 1s\end{array},\ \text{vektoriell geschrieben: } E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1.5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

5.60 *Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises.*

(a) Ist der Endpunkt M von $\vec{m}$ der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten

$$\begin{array}{ll} M_{\vec{a}}: & \vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} \\ M_{\vec{b}}: & \vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} \end{array} \quad \text{also} \quad \begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{a}^2 \\ \vec{b}\cdot\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{b}^2 \end{array},$$



so folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}^2-\vec{b}^2)=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

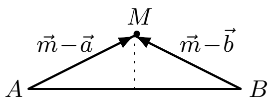
Also liegt M auch auf der dritten Mittelsenkrechten.

$$M_{\vec{a}-\vec{b}}:\ (\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{x}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

(b) M ist Mittelpunkt des Umkreises, da die Abstände zu den Ecken gleich sind:

$$\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{a}^2 \\ \vec{b}\cdot\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{b}^2 \end{array} \iff \begin{array}{l} -2\vec{a}\cdot\vec{m}+\vec{a}^2=0 \\ -2\vec{b}\cdot\vec{m}+\vec{b}^2=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \vec{m}^2-2\vec{a}\cdot\vec{m}+\vec{a}^2=\vec{m}^2 \\ \vec{m}^2-2\vec{b}\cdot\vec{m}+\vec{b}^2=\vec{m}^2 \end{array}$$

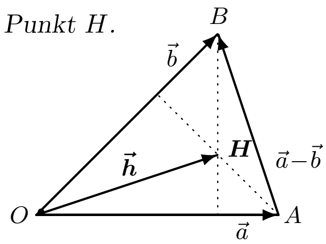
$$\iff (\vec{m}-\vec{a})^2=\vec{m}^2=(\vec{m}-\vec{b})^2 \iff |\vec{m}-\vec{a}|=|\vec{m}|=|\vec{m}-\vec{b}|.$$



Man sieht auch ohne Rechnung: M ist Mittelpunkt des Umkreises, da $|\vec{m}-\vec{a}|=|\vec{m}-\vec{b}|$ ist (Satz des Pythagoras).

5.61 *Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H.*

Ist der Endpunkt H des Vektors $\vec{h}$ der Schnittpunkt der beiden Höhen H_A und H_B, so ist $(\vec{a}-\vec{h})\perp\vec{b}$ und $(\vec{b}-\vec{h})\perp\vec{a}$. Also gilt:



$(\vec{a}-\vec{h})\cdot\vec{b}=0$ und $(\vec{b}-\vec{h})\cdot\vec{a}=0$

$\iff \vec{h}\cdot\vec{a}=\vec{h}\cdot\vec{b} \iff \vec{h}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0 \iff \vec{h}\perp(\vec{a}-\vec{b})$.

Also geht auch die dritte Höhe durch H.

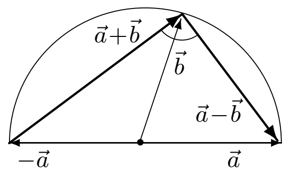
5.62 **Satz des THALES** *"Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel."*

Spezialfall des **Umfangswinkelsatz** (**F+H**, S. 21)

Die Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen auf einem Kreis um den Nullpunkt

$\iff |\vec{a}|=|\vec{b}| \iff \vec{a}^2=\vec{b}^2 \iff (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$\iff \vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander.



5.63 **Höhensatz des EUKLID** $\boldsymbol{h^2=pq}$.

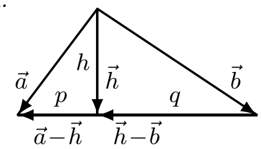
Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck gebildet aus den beiden Hypothenusenabschnitten.

Zu zeigen ist $pq=h^2$, also $|\vec{a}-\vec{h}|\,|\vec{h}-\vec{b}|=|\vec{h}|^2$.

$(\vec{a}-\vec{h})\cdot(\vec{h}-\vec{b})=|\vec{a}-\vec{h}|\,|\vec{h}-\vec{b}|\cos 0=|\vec{a}-\vec{h}|\,|\vec{h}-\vec{b}|$,

$(\vec{a}-\vec{h})\cdot(\vec{h}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{h}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{h}^2+\vec{h}\cdot\vec{b}=\vec{h}^2=|\vec{h}|^2$,

da $\vec{a}\cdot\vec{h}=\vec{b}\cdot\vec{h}=\vec{h}^2$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ist.



10.2 Quadriken, Flächen zweiter Ordnung

Man geht genau wie bei den Kegelschnitten vor:

Man schreibt die Quadrik mit Hilfe einer *symmetrischen* Matrix M, die man mittels einer *Drehmatrix* A (für die also $A^{-1} = A^\top$ ist) diagonalisiert.

Hauptachsentransformation, praktisches Vorgehen

(Flächen zweiter Ordnung, Quadriken)

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + g = 0}$$

Matrizenschreibweise:

$$\vec{x}^\top \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \vec{x} + g = 0.$$

Man bestimmt:

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: Eigenwerte von $M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ (M ist symmetrisch!)

(2) $V_{\lambda_1} = L(\vec{a}_1), V_{\lambda_2} = L(\vec{a}_2),\ V_{\lambda_3} = L(\vec{a}_3)$: Eigenräume von M (Seite 210).

(3) $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ (evtl. normieren und positiv orientieren!)
Drehmatrix aus Eigenvektoren von M.

(4) evtl.: Drehachse $\vec{a}$ und Drehwinkel α von A.

und setzt $\boxed{\vec{x} = A\vec{u}}$ und erhält:

$$\boxed{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2 + g = 0}$$

Matrizenschreibweise:

$$\vec{u}^\top \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \vec{u} + g = 0.$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind die (normierten) Hauptachsen und zeigen in Richtung der u, v, w–Koordinatenachsen!

Das x, y, z–System geht durch die Drehung A in das u, v, w–System über!

$A^\top M A = A^{-1} M A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ist eine **Diagonalisierung** der **symmetrischen** Matrix M.

Klassifizierung dieser Quadriken auf Seite 240.

13.1.5 Integration einiger nicht rationaler Funktionen

Anders als bei den rationalen Funktionen gibt es keine allgemeingültige Methode, die unbestimmten Integrale nicht rationaler Funktionen zu berechnen.
In manchen Fällen läßt sich der Integrand durch geschicktes Substituieren rational machen und dann mittels **PBZ** integrieren.
Im Folgenden bezeichnet $R(u,v)$ eine rationale Funktion der Veränderlichen u und v, d.h. u und v sind nur durch die vier Grundrechenarten $(+,-,\cdot,:)$ verknüpft, wie z.B. $R(u,v) = u\dfrac{(u^2-2uv^3)(2u-3uv)}{3uv+v^2-u^2v^4} + \dfrac{3+u}{u^2+2uv}$.

Wurzel wegsubstituieren!

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}\right) dx \quad \text{a} \quad \boxed{\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}} = t} \quad \begin{aligned} x &= \frac{st^m-q}{p-rt^m} \\ dx &= mt^{m-1}\frac{sp-rq}{(p-rt^m)^2}\, dt \end{aligned}$$

13.21 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}+1)}$ a $\left|\begin{aligned} \sqrt[3]{x} &= t \\ x &= t^3 \\ dx &= 3t^2\,dt. \end{aligned}\right.$ Es ist $\sqrt[m]{\dfrac{px+q}{rx+s}} = \sqrt[3]{x}, \quad m=3,$ $p=s=1, \quad q=r=0.$

$= \displaystyle\int \frac{3t^2\,dt}{t(t+1)} = 3\int \frac{t\,dt}{t+1} = \cdots$ **F+H** ... oder einfacher:

$$= 3\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 3\int dt - 3\int \frac{dt}{t+1} = 3t - 3\ln|t+1| + C = \underline{\underline{3\sqrt[3]{x} - 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C}}.$$

13.22 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ a $\left|\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} &= t \implies & x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{1-x}{1+x} &= t^2 & dx &= \frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2} \end{aligned}\right.$

$$= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,t\,\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{-4t^2\,dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{4t^2\,dt}{(t^2-1)(t^2+1)} \quad \text{PBZ ergibt:}$$

$$= \int \frac{4t^2\,dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\arctan t + C = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\arctan t + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C,$$ mittels $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, **F+H** und Umformungen des ln erhält man:

$$= \underline{\underline{\arccos x - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C}}.$$

13.23 $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$ a $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t \implies x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$.

$\frac{x+1}{x-1} = t^3 \qquad dx = -6\frac{t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$

$$\int t \cdot (-6\frac{t^2\,dt}{(t^3-1)^2}) = -6\int \frac{t^3}{(t^3-1)^2}\,dt$$

PBZ und Integration ergeben nach mühsamer Rechnung:

$$= \underline{\frac{2t}{t^3-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t^3-1}{(t-1)^3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.}$$

Nun setzt man noch $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ und hat das Integral gelöst!

Wurzel wegsubstituieren!

$\int R\left(x, (\frac{px+q}{rx+s})^k, (\frac{px+q}{rx+s})^\ell\right)dx$ a $\boxed{\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}} = t}$

x, dx , siehe Seite 292.

k, ℓ rationale Zahlen

m = Hauptnenner der Brüche k, ℓ

13.24 $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}}$ $\quad \frac{px+q}{rx+s} = \frac{x+1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\ell = \frac{1}{3}$, also $m = 6$.

a $\frac{x+1}{2} = t^6 \implies x = 2t^6 - 1 \implies dx = 12t^5\,dt$

$$= 12\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2}$$

$$= 12\int \frac{t^3\,dt}{t+1} = 12\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t})\,dt = 4t^3 - 6t^2 + 12t - 12\ln|t+1| + C$$

$$= \underline{\underline{4\sqrt{\frac{x+1}{2}} - 6\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + 12\sqrt[6]{\frac{x+1}{2}} - 12\ln\big(\sqrt[6]{\frac{x+1}{2}} + 1\big) + C.}}$$

13.25 $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{6\sqrt[3]{x} + 6}$ $\quad \frac{px+q}{rx+s} = x$, $k = \frac{1}{2}$, $\ell = \frac{1}{3}$, also $m = 6$.

a $x = t^6$, $dx = 6t^5\,dt$

$$= \int \frac{t^3 6t^5\,dt}{6(t^2+1)}$$

$= \int \frac{t^8\,dt}{t^2+1}$ Durchdividieren ergibt:

$$= \int \big(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\big) = \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x} + \arctan\sqrt[6]{x} + C.}}$$

Wurzeln sind beim Integrieren äußerst unangenehm! Manchmal gelingt das Wegsubstituieren von Wurzeln nur auf vermeintlichen Umwegen.
Beim folgenden Beispiel sind bis zu drei Schritte nötig, um endlich einen rationalen Integranden zu erhalten:

16.8 Schwingungs–DGL

Die homogene Schwingungs–DGL

Die Schwingungs–DGL ist eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Sie erscheint in der Mechanik (Federschwingung) als $m \cdot \ddot{x} + \beta \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0$,

und in der Elektrotechnik (Schwingkreis) als $L \cdot \frac{d^2}{dt^2} I + R \cdot \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} \cdot I = 0$.

16.60 *Man löse die DGL $y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = 0$ mit $k \geq 0$, $\omega_0 > 0$ des gedämpften harmonischen Oszillators.*

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$.

Fall 1: $k > \omega_0$, **starke Dämpfung** (Kriechfall):

λ_1, λ_2 sind reell, negativ und verschieden voneinander.
Die Lösungsgesamtheit ist daher

$$\underline{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

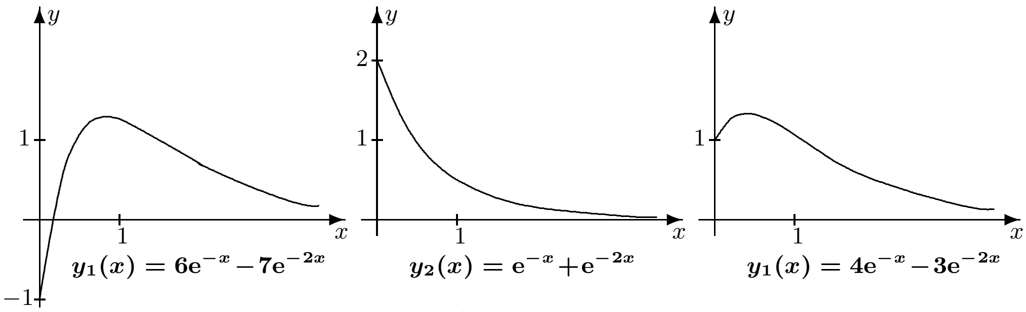
$y(x)$ und $y'(x)$ haben höchstens eine Nullstelle und es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Beispiel: $y'' + 3y' + 2y = 0$

Also $k = \frac{3}{2}$, $\omega_0 = \sqrt{2}$ und $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, char. Gleichung $\Longrightarrow \underline{\lambda_1 = -1}$, $\underline{\lambda_2 = -2}$,

führt auf die allgemeine Lösung $\underline{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}$, $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiele sie Skizzen.



$\boldsymbol{y_1(x) = 6e^{-x} - 7e^{-2x}}$ $\quad$ $\boldsymbol{y_2(x) = e^{-x} + e^{-2x}}$ $\quad$ $\boldsymbol{y_1(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}}$

aperiodische Bewegungen

Fall 2: $k = \omega_0$, **aperiodischer Grenzfall**, immer noch starke Dämpfung:

Nun ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -k < 0$ und die Lösungsgesamtheit

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 x e^{-kx}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

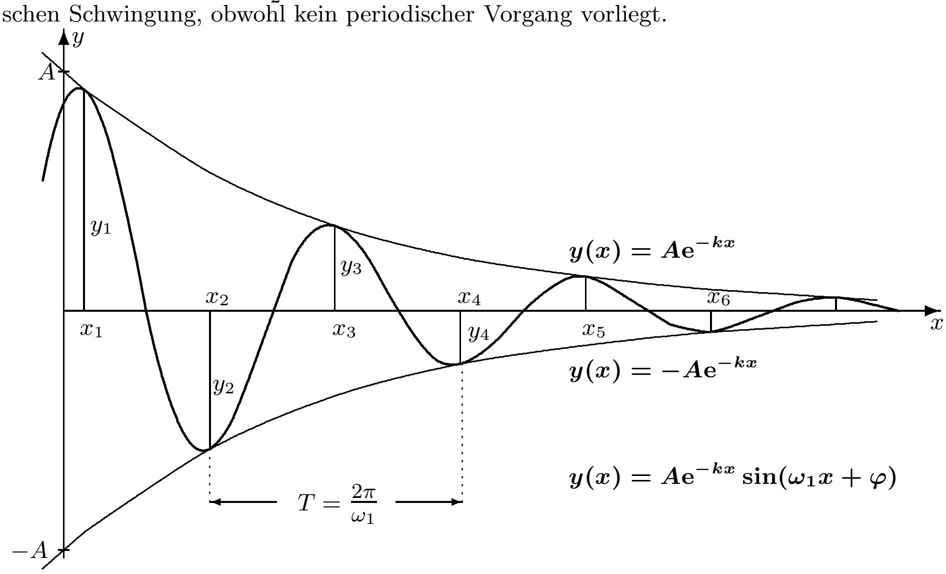
Der Bewegungsverlauf entspricht demjenigen von Fall 1.
Schwingungsfähige Systeme kommen unter sonst gleichen Bedingungen dann am schnellsten zur Ruhe, wenn der aperiodische Grenzfall vorliegt.
Dies benutzt man beim Bau von Meßgeräten.

Fall 3: $k < \omega_0$, **schwache Dämpfung**:

$\lambda_{1,2}$ sind konjugiert komplex: $\lambda_{1,2} = -k \pm \omega_1 i$ mit $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$, so daß gilt:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-kx}(c_1 \cos\omega_1 x + c_2 \sin\omega_1 x)$$
$$\underline{y(x) = A\mathrm{e}^{-kx}\sin(\omega_1 x + \varphi)}.$$

A und φ berechnet man aus c_1, c_2 (Überlagerung von Schwingungen Seite 80) $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ und $\tan\varphi = \dfrac{c_1}{c_2}$. Man spricht im Fall $k > 0$ von einer gedämpften harmonischen Schwingung, obwohl kein periodischer Vorgang vorliegt.



Die Kreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ ist für $k \neq 0$ kleiner als die Eigenfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung. Die Schwingungsdauer T ist $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2}}$.

Das Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden ist konstant:

$$\frac{y_n}{y_{n+2}} = \frac{y(x_n)}{y(x_{n+2})} = \mathrm{e}^{kT}, \text{ Dämpfungsverhältnis.}$$

Erzwungene Schwingung, Resonanz

16.61 *Man löse (bei schwacher Dämpfung) die inhomogene Schwingungs–DGL*

$$\boxed{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = F\cos\omega x}.$$

Die Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen DGL ist im Fall schwacher Dämpfung ($k < \omega_0$) :

$$\underline{y_H = A\mathrm{e}^{-kx}\sin(\omega_1 x + \varphi)} \text{ mit } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}\text{, siehe BEI 16.60.}$$

Zu bestimmen bleibt eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL. Physikalische Beobachtung zeigt: Nach Durchlaufen des Einschwingvorgangs (im stationären Zustand) schwingt das System mit der Frequenz ω der erregenden Kraft (im mechanischen Fall). Dies macht den Ansatz $y_S = a\sin\omega x + b\cos\omega x$ plausibel.

2. Divergenz

Ist $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, also $\vec{v} = \big(v_x(\vec{x}), v_y(\vec{x}), v_z(\vec{x})\big)$ ein **Vektorfeld**, so heißt:

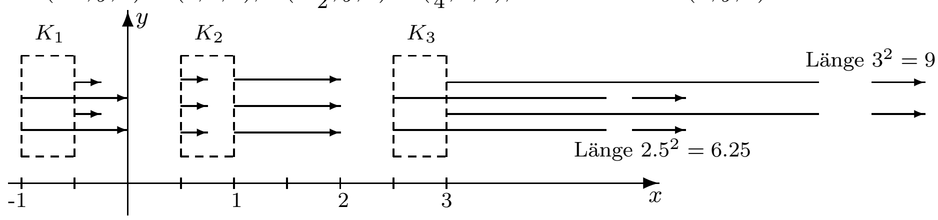
$$\boxed{b = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \textbf{Divergenz} \text{ von } \vec{v}}$$

$b: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist ein **Skalarfeld**.

18.37 *Für $\vec{v} = (xy, xz, x^2yz^2)$ berechne man b und $b\,(1,2,3)$:*

$b = b\,(x,y,z) = y + 0 + x^2y2z = \underline{\underline{y + 2x^2yz}}$, $b\,(1,2,3) = 2 + 12 = \underline{\underline{14}}$.

$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) = (x^2,0,0)$ beschreibe die Geschwindigkeit in einem Strömungsfeld. Es ist $\vec{v}(-1,y,z) = (1,0,0)$, $\vec{v}(-\frac{1}{2},y,z) = (\frac{1}{4},0,0)$, …. Es ist $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 2x$.



Denken wir uns in die Strömung gelegte durchlässige Kästchen (gestrichelt gezeichnet): K_1, K_2, K_3. Man erkennt, daß aus dem Kasten K_2 mehr herausfließt (bei $x = 1$) als hineinfließt (bei $x = \frac{1}{2}$), in ihm sind *Quellen*; in K_2 ist $1 \le \operatorname{div}\vec{v} \le 2$. In Kasten K_3 sind ebenfalls Quellen; in ihm ist $5 \le \operatorname{div}\vec{v} \le 6$. In Kasten K_1 fließt weniger heraus (bei $x = -\frac{1}{2}$) als hineinfließt (bei $x = -1$), in ihm sind *Senken*; in ihm ist $-2 \le \operatorname{div}\vec{v} \le -1$. Hieraus erkennt man:

Stellen mit $\operatorname{div}\vec{v} > 0$ sind Quellen, solche mit $\operatorname{div} v < 0$ Senken. Je größer $\operatorname{div}\vec{v}$ (falls > 0) ist, desto *stärker* sind die Quellen, desto größer ist die (positive) Ergiebigkeit. Diesem Umstand verdankt die Bildung $\operatorname{div}\vec{v}$ ihre Namen: Divergenz, Quelldichte oder Ergiebigkeit.

Beschreibt $\vec{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, kann man $b(\vec{x})$ deuten als *lokale Quelldichte* oder *Ergiebigkeit* des Feldes:

Eine Stelle $\vec{x}$ heißt $\left\{\begin{array}{l}\textbf{Quelle}\\ \textbf{Senke}\end{array}\right.$, falls $\begin{array}{l} b(\vec{x}) > 0 \\ b(\vec{x}) < 0 \end{array}$ ist.

Gilt $b(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in G$, heißt $\vec{v}$ in G *quellenfrei*.

Ist $f = f(\vec{x})$ ein Skalarfeld, kann man $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ bilden:

$$\boxed{\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \Delta \text{ heißt } \textbf{Laplace–Operator}}$$

Lösungen der Laplace–Gleichung $\Delta f = 0$ (Δ lies: "Delta") nennt man *harmonische Funktionen*, siehe Seite 537.

18.38 *Es sei $f = ax^2 + bxy + cy^2$.*
Lassen sich a, b, c so angeben, daß f harmonisch ist?

$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a + 2c = 2(a + c) \Longrightarrow f$ ist harmonisch, falls $a + c = 0$ ist.

3. Rotation

Ist $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, also $\vec{v} = \big(v_x(\vec{x}), v_y(\vec{x}), v_z(\vec{x})\big)$ ein **Vektorfeld**, so heißt:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{v} = \Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big) \quad \textbf{Rotation} \text{ von } \vec{v}}$$

Damit ist $\operatorname{rot}\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein **Vektorfeld**.

Entsprechend zum Kreuzprodukt von Vektoren merkt man sich $\operatorname{rot}\vec{v}$ als:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

18.39 *Man bestimme*

(a) $\operatorname{rot}\vec{v}$ *und* $\operatorname{rot}\vec{v}\,(1,2,3)$ *für* $\vec{v} = (xy, xz, x^2yz^2)$,

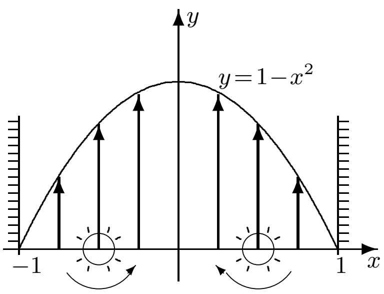
(b) $\operatorname{rot}\vec{v}$ *für* $\vec{v} = \dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

(a) $$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^2)\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)$$
$$= \underline{\underline{(x^2z^2 - x\ ,\ -2xyz^2\ ,\ z - x)}} \implies \operatorname{rot}\vec{v}\,(1,2,3) = \underline{\underline{(8,-36,2)}}.$$

(b) Es ist $$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\Big) = \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 0.$$

Ebenso sind die übrigen Komponenten von $\operatorname{rot}\vec{v}$ gleich 0, also $\underline{\underline{\operatorname{rot}\vec{v} = (0,0,0)}}$.

Durch $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) = (0, 1-x^2, 0)$ werde eine ebenes Flüssigkeitsströmungsfeld beschrieben (wir skizzieren in der Ebene $z = 0$).



Ein Teilchen an der Stelle $(x,0,0)$ hat die Geschwindigkeit $\vec{v} = (0, 1-x^2, 0)$. Der Vektor $\operatorname{rot}\vec{v} = (0,0,-2x)$ steht senkrecht auf der (x,y)–Ebene (der Zeichenebene). Denkt man sich an der Stelle $(x,0,0)$ ein kleines Schaufelrädchen in die Strömung gehalten, so wird es sich rechtsherum drehen, wenn $x > 0$ ist, dann zeigt der Vektor $\operatorname{rot}\vec{v}$ nach unten, d.h. $\operatorname{rot}\vec{v}$ ist parallel zum Drehvektor. Ist $|x|$ klein, so ist $|\operatorname{rot}\vec{v}| = |2x|$ auch klein: Nahe der y–Achse wird sich das Rädchen langsam drehen. Also zeigt sich hier:

- $\operatorname{rot}\vec{v}$ zeigt in Richtung des Drehvektors und
- $|\operatorname{rot}\vec{v}|$ ist ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit.

Der Name "Rotor" ist aus solchen Gründen gewählt worden.

Anmerkung: Das Feld $\vec{f} = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, **Potentialwirbel**, siehe [18.58, 18.59 (b)], besitzt *lokal* die Potentialfunktion $\Phi = \arctan \frac{y}{x}$. Φ läßt sich jedoch nicht zu einer in dem *nicht einfach zusammenhängenden Gebiet* $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbaren Funktion fortsetzen!

18.60 *Man zeige, daß das Feld* $\vec{f} = (y\,,\, x+z\,,\, y+2z)$ *eine Potentialfunktion* Φ *besitzt und bestimme* Φ (a) *ohne und* (b) *mit Kurvenintegralen.*

Die Integrabil.–Bedingungen $\frac{\partial f_x}{\partial y} = 1 = \frac{\partial f_y}{\partial x}$, $\frac{\partial f_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_z}{\partial x}$, $\frac{\partial f_y}{\partial z} = 1 = \frac{\partial f_z}{\partial y}$ sind in ganz $\mathbb{R}^3$ erfüllt, es existiert also eine Potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$:

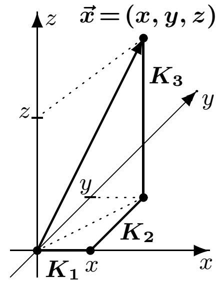
(a) Bestimmung von Φ ohne Kurvenintegrale durch unbestimmte Integration:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y \Longrightarrow \Phi(x,y,z) = xy + g(y,z),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x + z \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = z \Longrightarrow g(y,z) = yz + h(z) \Longrightarrow \Phi = xy + yz + h(z),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = y + \frac{\partial h}{\partial z} = y + 2z \Longrightarrow \frac{\partial h}{\partial z} = 2z \Longrightarrow h(z) = z^2 \Longrightarrow \underline{\underline{\Phi(x,y,z) = xy + yz + z^2}}.$$

Probe: $\Phi' = \operatorname{grad} \Phi = (y, x+z, y+2z) = \vec{f}$.



(b$_1$) Bestimmung von Φ durch achsenparallele Integration von $\vec{0} = (0,0,0)$ nach $\vec{x} = (x,y,z)$. Aufspaltung des Integrationsweges:

$K_1 = \{(t,0,0) \mid 0 \le t \le x\}$, hier ist $dx = dt$, $dy = dz = 0$,
$K_2 = \{(x,t,0) \mid 0 \le t \le y\}$, hier ist $dy = dt$, $dx = dz = 0$,
$K_3 = \{(x,y,t) \mid 0 \le t \le z\}$, hier ist $dz = dt$, $dx = dy = 0$.

$$\Phi(x,y,z) = \int_K \vec{f}\, d\vec{x} = \int_K y\,dx + (x+z)\,dy + (y+2z)\,dz$$

$$= \int_{K_1} + \int_{K_2} + \int_{K_3} = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x\,dt + \int_0^z (y+2t)\,dt = \underline{\underline{xy + yz + z^2}}.$$

(b$_2$) Bestimmung von Φ durch geradlinige Integration von $\vec{0} = (0,0,0)$ nach $\vec{x} = (x,y,z)$:

$K = \{t(x,y,z) \mid 0 \le t \le 1\}$, hier ist $dx = x\,dt$, $dy = y\,dt$, $dz = z\,dt$.

$$\Phi(x,y,z) = \int_K \vec{f}\, d\vec{x} = \int_K y\,dx + (x+z)\,dy + (y+2z)\,dz$$

$$= \int_0^1 \Big(tyx + (tx+tz)y + (ty+2tz)z\Big)\,dt = \underline{\underline{xy + yz + z^2}}.$$

Wegen $\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\,,\, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\,,\, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})$ gilt:

In einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet sind äquivalent:

(1) $\boldsymbol{\vec{f}}$ ist **Potentialfeld**.

(2) $\boldsymbol{\int_K \vec{f}\, d\vec{x}}$ ist **wegunabhängig** ($\boldsymbol{\vec{f}}$ ist **konservativ**).

(3) $\boldsymbol{\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}}$ ($\boldsymbol{\vec{f}}$ ist **wirbelfrei**).

Wichtige Felder

Kugelsymmetrische Felder $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$				**Coulombfeld** **Gravitationsfeld**
$\vec{v}(x,y,z)$	(x,y,z)	$\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$	$\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$
$\vec{v}(\vec{x})$	$\vec{x}$	$\frac{\vec{x}}{\Vert\vec{x}\Vert}$	$\frac{1}{\Vert\vec{x}\Vert}\cdot\frac{\vec{x}}{\Vert\vec{x}\Vert}$	$\frac{1}{\Vert\vec{x}\Vert^2}\cdot\frac{\vec{x}}{\Vert\vec{x}\Vert}$
Kugelkoord. $\vec{v}(\rho,\theta,\varphi)$	$(\rho,0,0)$	$(1,0,0)$	$(\frac{1}{\rho},0,0)$	$(\frac{1}{\rho^2},0,0)$
Def.bereich einf. zushg.	$\mathbb{R}^3$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ ja
Potential $\Phi(x,y,z)$	$\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ $=\frac{1}{2}\Vert\vec{x}\Vert^2=\frac{1}{2}\rho^2$	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $=\Vert\vec{x}\Vert=\rho$	$\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $=\ln\Vert\vec{x}\Vert=\ln\rho$	(Newton–Potential) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $=\frac{-1}{\Vert\vec{x}\Vert}=\frac{-1}{\rho}$
Kurvenintegral wegunabhängig	ja	ja	ja	ja
$\operatorname{div}\vec{v}$	3	$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $=\frac{2}{\Vert\vec{x}\Vert}=\frac{2}{\rho}$	$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $=\frac{1}{\Vert\vec{x}\Vert^2}=\frac{1}{\rho^2}$	0
$\operatorname{rot}\vec{v}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$

Axialsymmetrische Felder $r=\sqrt{x^2+y^2}$			**elektr. Feld** geladener Draht	**Magnetfeld** stromdurchfl. Leiter
$\vec{v}(x,y,z)$	$(x,y,0)$	$\frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{(x,y,0)}{x^2+y^2}$	$\frac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$
Zylinderkoord. $\vec{v}(r,\varphi,z)$	$(r,0,0)$	$(1,0,0)$	$(\frac{1}{r},0,0)$	$(0,\frac{1}{r},0)$
Def.bereich einf. zushg.	$\mathbb{R}^3$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$ nein	$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$ nein	$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$ nein
Potential $\Phi(x,y,z)$	$\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $=\frac{1}{2}r^2$	$\sqrt{x^2+y^2}$ $=r$	**log. Potential** $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ $=\ln r$	lokal: $\arctan\frac{y}{x}$ $\arctan\frac{x}{y}$
Kurvenintegral wegunabhängig	ja	ja	ja	nein
$\operatorname{div}\vec{v}$	2	$\frac{1}{r}$	0	0
$\operatorname{rot}\vec{v}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$