2023

# Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium ... berg

## Mathematik LF

+ *Offizielle Musteraufgaben*
+ *Aufgaben im Stil der Prüfung*
+ *Merkhilfe*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

# Inhaltsverzeichnis

## Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung



## Hilfsmittel



## Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus



## Übungsaufgabensatz 1 im Stil der Prüfung

## Übungsaufgabensatz 2 im Stil der Prüfung



## Übungsaufgabensatz 3 im Stil der Prüfung

## Übungsaufgabensatz 4 im Stil der Prüfung



## Offizielle Beispielaufgabe für 2023



## Abiturprüfung 2020

## Abiturprüfung 2021

**Wahlteil Stochastik**



**Abiturprüfung 2022 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . www.stark-verlag.de/mystark**

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden. (Den Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne im Buch.)

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mit hilfreichen Abbildungen und Erklärungen.


**Autoren**

Winfried König, Volker Stemberg, Dr. Raimund Ordowski
(Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung, Übungsaufgabensätze im Stil der Prüfung sowie Lösungen aller Aufgaben)

# Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

## Das Abitur 2023

Die Einführung des fünfstündigen Leistungsfaches Mathematik im Abiturjahrgang 2021 hatte weitreichende Änderungen in der schriftlichen Abiturprüfung zur Folge, die für die Prüfung 2022 fortbestanden. Ab dem Abiturjahrgang 2023 werden weitere Inhalte neu dazukommen, andere werden hingegen nicht mehr relevant für die Prüfung sein (s. u.). Aus diesem Grund finden Sie in diesem Buch u. a. vier vollständige Übungsmustersätze im Stil der Abiturprüfung, die die neuen Herausforderungen und Inhalte präzise abbilden.

Dennoch bleiben zahlreiche frühere Abituraufgaben sowie vom Ministerium veröffentlichte Aufgaben zur Vorbereitung als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet; dies gilt insbesondere für die Original-Abituraufgaben ab dem Jahr 2019. In diesem Abiturjahrgang war erstmals der WTR (und nicht mehr der GTR) zugelassenes Hilfsmittel.

Die Jahrgänge 2020 und 2021 finden Sie neben den erwähnten vier Übungssätzen und den offiziellen Beispielaufgaben mit gewohnt ausführlichen Lösungen in diesem Buch; die Abiturprüfung 2022 steht Ihnen – selbstverständlich ebenfalls inklusive ausführlicher Lösungen – auf der Plattform MyStark zum Download zur Verfügung. Dort finden Sie zusätzlich auch den Jahrgang 2019 und den Aufgabenfundus, der für die Abiturprüfungen 2021 und 2022 veröffentlicht wurde.

## Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik

Grundlage für das Abitur im Jahr 2023 ist nun erstmals der Bildungsplan 2016 für das achtjährige Gymnasium. Die schriftliche Prüfung in Mathematik erstreckt sich über die Gebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Folgende Inhalte können erst seit der Einführung des Leistungsfaches 2021 bzw. erstmals ab 2023 Gegenstand der Abiturprüfung sein:

Analysis:
- Wurzelfunktion (ab 2023)
- Logarithmusfunktion (ab 2023)

- Umkehrfunktion (ab 2023)
- Volumen von Rotationskörpern auch mithilfe der Integralrechnung

Analytische Geometrie:
- Vektorprodukt (ab 2023)
- Abstand windschiefer Geraden

Stochastik:
- elementare Kombinatorik (ab 2023)
- Vierfeldertafeln (ab 2023)
- bedingte Wahrscheinlichkeit (ab 2023)
- stochastische Unabhängigkeit (ab 2023)
- Standardabweichung der Binomialverteilung
- ein- und zweiseitige Tests mithilfe der Binomialverteilung, Fehler 1. und 2. Art
- Normalverteilung (Dichtefunktion, Erwartungswert, Standardabweichung, Glockenkurve)

Sie erkennen auf einen Blick, dass in der Stochastik die meisten Änderungen vorgenommen wurden.

**Nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung sind:**
- Folgen
- Wachstumsprozesse
- Differenzialgleichungen
- Ortslinien (Wegfall ab 2023)
- Beweise mithilfe von Vektoren (Wegfall ab 2023)
- allgemeine stetige Verteilungen (Wegfall ab 2023)

Die schriftliche Prüfung ist in einen **Pflichtteil** und einen **Wahlteil** unterteilt.

## Pflichtteil

Ab der Abiturprüfung 2023 umfasst der **Pflichtteil** nur noch 15 Verrechnungspunkte (VP), also ein Viertel der Gesamtprüfung. Es werden darin Grundkompetenzen in Form von kleineren Aufgaben abgeprüft. Ab 2023 besteht der Pflichtteil aus **sechs Aufgaben mit jeweils 2,5 VP**. Wichtig für Sie: Im Pflichtteil sind die größten Änderungen im Vergleich zu den Prüfungen der Jahre vor 2021 zu erwarten.

Bis einschließlich zum Abitur 2020 übliche Fragestellungen, wie das isolierte Ableiten, Stammfunktionen bilden oder Berechnen von Integralen und das Lösen von Gleichungen, kommen so nicht mehr vor. Die dazu notwendigen inhaltlichen Kompetenzen bleiben zum Lösen der zukünftigen Pflichtteilaufgaben aber weiterhin unerlässlich, nur werden die Aufgaben in einen etwas größeren Kontext, durchaus auch mit entsprechendem Sachzusammenhang, eingekleidet.

Für den Pflichtteil sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

### Wahlteil

Der **Wahlteil** umfasst ab 2023 drei Viertel der Gesamtprüfung. Beim Wahlteil Analysis bleibt es unverändert bei 20 VP, bei den Wahlteilen Geometrie und Stochastik werden nun je 12,5 VP vergeben. Grundsätzlich beinhaltet der Wahlteil größere Aufgaben zu den drei Teilgebieten mit zusammenhängenden Fragestellungen, wobei verstärkt Transfer, Modellieren von realen Situationen und Entwickeln von Lösungsstrategien gefragt sind.

Beim Wahlteil sind als **Hilfsmittel** – neben einem Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung – die **Merkhilfe** sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner (**WTR**) mit dem mitgelieferten Handbuch zugelassen.

### Notationen

Neben bekannten mathematischen Zeichen und Schreibweisen können insbesondere die folgenden Notationen innerhalb der Abiturprüfung verwendet werden und sollten Ihnen daher bekannt sein:

| Notation | Erklärung |
|---|---|
| $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}_0^+$; $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ | Mengen reeller Zahlen |
| $[a; b]$; $]a; b]$; $]-\infty; b]$ | Intervalle reeller Zahlen |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i$ | Summationszeichen |
| $\lim_{x \to x_0} f(x)$<br>$f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$<br>$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} +\infty$ | Limes-Schreibweisen |
| $\overline{A} \cup B$; $\overline{A \cap B}$ | Verknüpfung von Ereignissen (Negation, Vereinigung, Schnitt) |
| $P_A(B)$ | Bedingte Wahrscheinlichkeit |

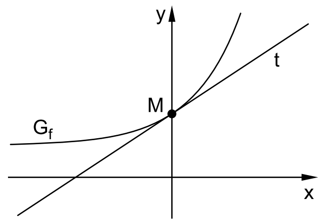
### Anforderungen an eine Schülerlösung

Erwartet wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation in einer korrekten Fachsprache.
Die Darstellung sollte durch Ergebnissätze und gegebenenfalls durch verbale Beschreibung des Vorgehens übersichtlich strukturiert sein.
Neu eingeführte Bezeichnungen sind zu definieren, dies gilt insbesondere für Zufallsgrößen in der Stochastik.
Die Lösung sollte keine Angabe über Tastenfolgen von WTR-Eingaben enthalten.

## Pflichtteil

### Aufgabe 1

Für ein $k > 0$ ist die Funktion f mit $f(x) = 1 + e^{k \cdot x}$ gegeben.
Der Graph $G_f$ schneidet die y-Achse im Punkt M.
Die Abbildung zeigt $G_f$ sowie die Tangente t an $G_f$ im Punkt M.

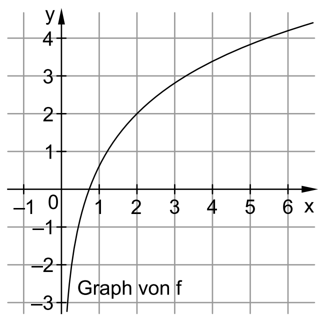



a) Weisen Sie nach, dass die Tangente t die Gleichung $y = kx + 2$ hat. 1 VP

b) Die Tangente t schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{k}{8}$ ein. Bestimmen Sie den Wert von k. 1,5 VP

### Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ mit maximaler Definitionsmenge. Die Abbildung zeigt den Graphen von f.




a) Begründen Sie anhand des Graphen, dass f im abgebildeten Bereich umkehrbar ist. 0,5 VP

b) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\overline{f}$. 1 VP

c) Es gilt: $\int_0^2 (2 - \overline{f}(x))\,dx = \int_a^2 f(x)\,dx$
Bestimmen Sie den Wert von a. 1 VP

### Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{4 - x}$; $x \leq 4$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall [–5; 4]. 1 VP

b) Für $m \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right[$ schneiden die Geraden mit der Gleichung $y = mx + 1$ den Graphen von f in zwei Punkten $A(a\,|\,f(a))$ und $B(b\,|\,f(b))$ mit $a < b$.
Bestimmen Sie alle möglichen Werte von b. 1,5 VP

## TIPP Lösungshinweise zum Pflichtteil

**Aufgabe 1**

*Teilaufgabe a*

Welche x-Koordinate besitzt der Punkt M?

Bestimmen Sie die Gleichung der ersten Ableitung von f und berechnen Sie damit die Steigung der Tangente t.

Zeigen Sie, dass der Funktionswert von f an der Stelle 0 mit dem y-Achsenabschnitt von t übereinstimmt.

*Teilaufgabe b*

Welche besondere Eigenschaft hat dieses Dreieck?

Bestimmen Sie zunächst den Flächeninhalt in Abhängigkeit von k.

**Aufgabe 2**

*Teilaufgabe a*

Wie kann man am Monotonieverhalten des Graphen von f erkennen, ob die Funktion f in einem Intervall umkehrbar ist?

*Teilaufgabe b*

Wie bestimmt man allgemein aus der Funktionsgleichung einer Funktion f den Funktionsterm der Umkehrfunktion $\overline{f}$ ?

Wie löst man eine logarithmische Gleichung der Form $a = \ln(x)$?
(Beachten Sie: $e^{\ln(x)} = x$)

*Teilaufgabe c*

Erstellen Sie eine Skizze, welche die Graphen von f, $\overline{f}$, der ersten Winkelhalbierenden und der konstanten Funktion $y = 2$ enthält.

Beachten Sie die Symmetrie zwischen den Graphen von f und $\overline{f}$.

Markieren Sie die durch die Integrale festgelegten Flächen und überlegen Sie, welchen Wert a haben muss, damit die Flächen gleich groß sind.

**Aufgabe 3**

*Teilaufgabe a*

Erstellen Sie eine Wertetabelle für geeignete Werte.

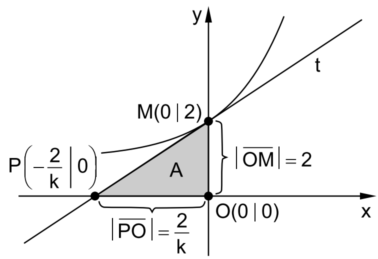
Berücksichtigen Sie das angegebene Intervall.

## Aufgabe 1

a) Für ein $k>0$ ist die Funktion f mit $f(x)=1+e^{k\cdot x}$ gegeben.
Für die erste Ableitung erhält man mithilfe der Kettenregel $f'(x)=k\cdot e^{k\cdot x}$.
Die Tangente t hat die Gleichung $y=kx+2$, wenn $f'(0)=k$ und $f(0)=2$ gilt.
Nachweis:
(1) $f'(0)=k\cdot e^{k\cdot 0}=k\cdot e^{0}=k$
(2) $f(0)=1+e^{k\cdot 0}=1+1=2$

Damit ist gezeigt, dass die Tangente t die Gleichung $y=kx+2$ hat.

b) Die Tangente t schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein.




Zunächst bestimmt man den Schnittpunkt P der Tangente mit der x-Achse:

$$k\cdot x+2=0 \quad |-2$$
$$k\cdot x=-2 \quad |:k$$
$$x=-\frac{2}{k} \quad \Rightarrow \quad P\left(-\frac{2}{k}\,\middle|\,0\right)$$

Nun berechnet man den Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks POM in Abhängigkeit von k:

$$A=\frac{1}{2}\cdot|\overline{PO}|\cdot|\overline{OM}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k}\cdot 2=\frac{2}{k} \qquad \text{(Wegen } k>0 \text{ gilt: } \left|-\frac{2}{k}\right|=\frac{2}{k}\text{)}$$

Da der Flächeninhalt des Dreiecks laut Aufgabenstellung $A=\frac{k}{8}$ ist, muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$\frac{2}{k}=\frac{k}{8} \quad |\cdot k \quad |\cdot 8$$
$$k^2=16 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$$
$$\mathbf{k=4} \qquad \text{(Die zweite Lösung entfällt wegen } k>0.)$$

Der gesuchte Wert von k ist 4.

## Aufgabe 2

a) Der Abbildung kann man entnehmen, dass der Graph von f im abgebildeten Bereich streng monoton steigend ist.
Damit ist die Funktion f in diesem Bereich umkehrbar.

*Hinweis:* Nicht jede umkehrbare Funktion verläuft zwingend streng monoton. Die Funktion g mit $g(x)=\frac{1}{x}$ ist z. B. für alle $x\neq 0$ umkehrbar, aber nicht streng monoton.

b) Um einen Term der Umkehrfunktion zu bestimmen, löst man im ersten Schritt die Gleichung $y = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ nach x auf:

$$y = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \quad \Big| -2$$

$$y - 2 = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Big| :2$$

$$\frac{y}{2} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Big| e^{\square}$$

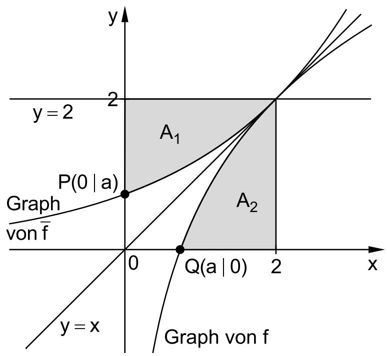
$$e^{\frac{y}{2} - 1} = \frac{x}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$x = 2e^{\frac{y}{2} - 1}$$

Im zweiten Schritt tauscht man die Variablen.

Ein möglicher Term der Umkehrfunktion $\overline{f}$ ist $\mathbf{\overline{f}(x) = 2e^{\frac{x}{2} - 1}}$.

c) Den Graphen der Umkehrfunktion $\overline{f}$ erhält man durch Spiegelung des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden.




Die Graphen von f und $\overline{f}$ haben den Punkt $(2|2)$ gemeinsam.

Das Integral $\int_0^2 (2 - \overline{f}(x))\,dx$ gibt den Flächeninhalt $A_1$ zwischen der konstanten Funktion $y = 2$ und dem Graphen von $\overline{f}$ im Intervall [0; 2] an (s. Skizze).

Wenn a wie in der Skizze als Nullstelle von f gewählt wird, erhält man mit dem Integral $\int_a^2 f(x)\,dx$ den Flächeninhalt $A_2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [a; 2].

Da die Graphen von f und $\overline{f}$ symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden sind, gilt $A_1 = A_2$.

Der Schnittpunkt $Q(a|0)$ des Graphen von f mit der x-Achse und der Schnittpunkt $P(0|a)$ des Graphen von $\overline{f}$ mit der y-Achse liegen ebenfalls symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden. Den Wert von a kann man deshalb bestimmen, indem man den Funktionswert von $\overline{f}$ für $x = 0$ berechnet:

$$a = \overline{f}(0) = 2e^{0-1} = \frac{2}{e}$$

Für $\mathbf{a = \frac{2}{e}}$ gilt $\int_0^2 (2 - \overline{f}(x))\,dx = \int_a^2 f(x)\,dx$.

***Alternative Bestimmung von a*** (ohne Verwendung des Teilergebnisses aus Teilaufgabe b):
Man berechnet die Nullstelle a von f:

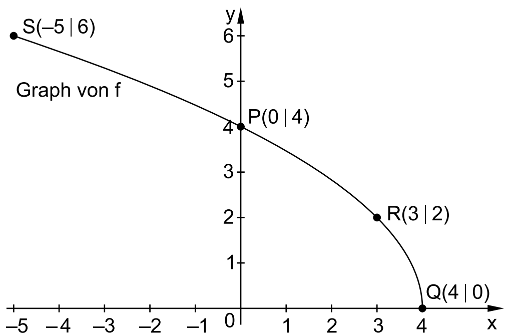
$$
\begin{aligned}
2\ln\left(\frac{a}{2}\right)+2&=0 \qquad \left|-2 \quad \right|:2\\
\ln\left(\frac{a}{2}\right)&=-1 \qquad \left|e^{\square}\right.\\
\frac{a}{2}&=e^{-1} \qquad \left|\cdot 2\right.\\
a&=2e^{-1}=\frac{2}{e}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 3**

a) Wertetabelle:

| $x_0$ | $f(x_0)$ |
|---|---|
| 4 | $f(4)=0$ |
| 3 | $f(3)=2\cdot\sqrt{1}=2$ |
| 0 | $f(0)=2\cdot\sqrt{4}=4$ |
| –5 | $f(-5)=2\cdot\sqrt{4-(-5)}=6$ |

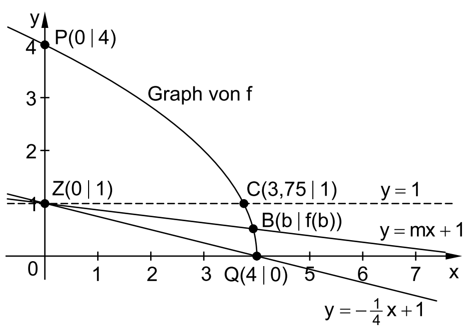
Skizze:




*Bemerkung:* Auch beim Operator „skizzieren“ müssen die Koordinatenachsen beschriftet und skaliert sein. Es genügt die Beschränkung auf charakteristische Eigenschaften des Graphen; hier: Nullstelle, Schnittpunkt mit der y-Achse, Verlauf des Graphen einer Wurzelfunktion.

b) Alle Geraden $y=mx+1$ verlaufen durch den Punkt $Z(0|1)$.

Um sich den Verlauf der Geraden für $m\in\left[-\frac{1}{4};0\right[$ besser vorstellen zu können, stellt man die beiden Geraden für $m=-\frac{1}{4}$ und $m=0$ dar, obwohl zu berücksichtigen ist, dass $m=0\notin\left[-\frac{1}{4};0\right[$.



## Wahlteil: Stochastik C 1

Ein Unternehmen füllt Honig in Gläser mit der Aufschrift 250 g ab. Die Füllmenge X eines Glases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\mu = 252$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ (alle Angaben in g).

a) Ein Glas wird zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 250 g Honig in diesem Glas sind. 0,5 VP
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens 2 % von 250 g abweicht. 1,5 VP

b) Gesucht ist ein Wert $a \neq 245$ mit $P(a \leq X \leq a+5) = P(245 \leq X \leq 250)$.
Begründen Sie, dass es solch einen Wert von a gibt, und geben Sie diesen Wert an. 1,5 VP

c) Bei einer neuen Abfüllanlage beträgt die Standardabweichung der Füllmenge 1 g. Bei ihr kann man durch einen Regler den Erwartungswert der Füllmenge mit einer Genauigkeit von 0,1 g einstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Glas weniger als 250 g enthält, soll höchstens 15 % betragen.
Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss. 1,5 VP

Bei einer Sonderaktion wird jedes fünfte Glas auf der Deckelinnenseite mit einem von außen nicht sichtbaren Gutschein versehen.

d) Lena kauft während der Sonderaktion sechs Gläser und stellt sie in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein." 0,5 VP
B: „Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein." 1 VP
C: „In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein, und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander." 1,5 VP

e) Die Gläser werden in Kartons abgepackt und an Lebensmittelgeschäfte ausgeliefert. Jeder Karton enthält 30 Gläser. Ein Kunde nimmt drei Gläser aus dem Karton und hofft, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % mindestens einen Gutschein zu erhalten.
Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser mit Gutschein, die sich dafür mindestens in dem Karton befinden müssten. 2 VP

## TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil Stochastik – Aufgabe C 1

**Aufgabe C 1 – Teilaufgabe a**

*Wahrscheinlichkeit für weniger als 250 g Honig*

Entnehmen Sie dem Text die Werte der Parameter $\mu$ und $\sigma$.

Zur Bedienung des WTR können Sie bei WTR 8 nachschlagen.

*Wahrscheinlichkeit für Abweichung*

Berechnen Sie 2 % von 250.

Welches Intervall ergibt sich damit, wenn die Füllmenge höchstens um 2 % von 250 g abweichen soll?

Berechnen Sie damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit (WTR 8).

**Aufgabe C 1 – Teilaufgabe b**

*Begründung und Wert von a*

Welche Symmetrie weist die Glockenkurve auf?

Zu welcher Geraden ist in diesem Fall die Glockenkurve symmetrisch?

Auch die beiden Intervalle weisen diese Symmetrie auf.

Bestimmen Sie damit den Wert von a.

**Aufgabe C 1 – Teilaufgabe c**

*Erwartungswert*

Führen Sie die Zufallsgröße Y ein zur Beschreibung der neuen Füllmenge.

Was soll für $P(Y < 250)$ gelten?

Den passenden Wert für $\mu_Y$ finden Sie durch systematisches Probieren mit dem WTR (WTR 8).

Mit welcher Genauigkeit kann der Regler eingestellt werden?

Geben Sie – wie immer bei solchen Aufgaben – den Wert an, der die gesuchte Bedingung gerade noch nicht erfüllt, und den ersten, für den sie gilt.

**Aufgabe C 1 – Teilaufgabe d**

*Ereignis A*

Führen Sie die Zufallsgröße $Z_1$ für die Anzahl der Gläser mit Gutschein ein.

Wie ist diese verteilt?

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit dem WTR (WTR 4).

*Ereignis B*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas einen Gutschein enthält?

Was folgt daraus für die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden ersten Gläser einen Gutschein enthalten?

*Ereignis C*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Gläser einen Gutschein enthalten, die übrigen vier aber nicht?

Wie viele Anordnungen gibt es dafür, dass zwei benachbarte Gläser einen Gutschein enthalten, die übrigen vier aber nicht?

Was folgt daraus für die Wahrscheinlichkeit, dass zwei benachbarte Gläser einen Gutschein enthalten, die übrigen vier aber nicht?

Wie groß ist damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in genau zwei Gläsern Gutscheine sind, die Gläser dabei aber **nicht** nebeneinander stehen?

**Aufgabe C 1 – Teilaufgabe e**

*Mindestzahl der Gläser mit Gutschein*

Führen Sie die Zufallsgröße $Z_2$ für die Anzahl der Gutscheine, die der Kunde erhält, ein.

Wie groß muss dann $P(Z_2 \geq 1)$ sein? Was folgt daraus für $P(Z_2 = 0)$?

Bezeichnen Sie die Anzahl der Gläser mit Gutscheinen im Karton mit u. Wie viele der zunächst 30 Gläser enthalten dann keinen Gutschein?

Berechnen Sie entsprechend $P(Z_2 = 0)$ in Abhängigkeit von u.

Beachten Sie dabei, dass $Z_2$ nicht binomialverteilt ist, da sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Trefferwahrscheinlichkeit mit jedem Zug ändert.

Den Wert für u erhalten Sie z. B. durch systematisches Probieren oder mithilfe einer Wertetabelle (WTR 2).

Die Füllmenge X eines Honigglases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\mu = 252$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ (alle Angaben in g).

a) **Wahrscheinlichkeit für weniger als 250 g Honig:**
Mit dem WTR (WTR 8) erhält man: $P(X < 250) \approx 0{,}159 = 15{,}9\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 250 g Honig im Glas sind, beträgt **ca. 15,9 %**.

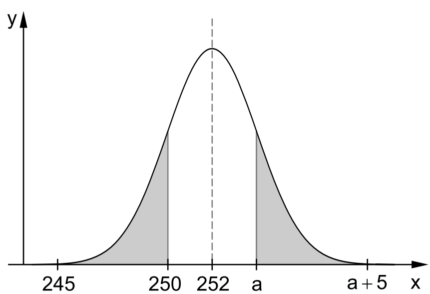
*Anmerkung:* Bei der Normalverteilung macht es keinen Unterschied, ob das Ereignis „weniger als 250 g Honig" oder „höchstens 250 g Honig" lautet, da $P(X < 250) = P(X \leq 250)$. (Bei der Binomialverteilung müssen Fragestellungen zu „weniger als" und „höchstens" aber unbedingt unterschieden werden!)
Darüber hinaus wird negativen Werten durch die Zufallsgröße X wegen $P(X < 0) \approx 0$ eine vernachlässigbar kleine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Dies würde negativen Füllmengen entsprechen, die in der Realität nicht vorkommen.

**Wahrscheinlichkeit für Abweichung:**
Mit der Abweichung von höchstens 2 % von 250 g ergibt sich als untere Grenze $0{,}98 \cdot 250 = 245$, als obere entsprechend $1{,}02 \cdot 250 = 255$.

Damit erhält man $P(245 \leq X \leq 255) \approx 0{,}933 = 93{,}3\ \%$ (WTR 8).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge um höchstens 2 % von 250 g abweicht, ist **etwa 93,3 %**.

b) **Begründung und Wert von a:**
Bei einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\mu$ ist die zugehörige Glockenkurve stets symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$, in diesem Fall also zur Geraden mit der Gleichung $x = 252$.




Aus $252 - 250 = 2$ folgt aufgrund der Symmetrie für die Richtigkeit der gegebenen Gleichung:
$a = 252 + 2 = 254$

Daraus ergibt sich $P(245 \leq X \leq 250) = P(254 \leq X \leq 259)$ (vgl. Skizze).

Es gibt also einen solchen Wert von a, dieser ist $\mathbf{a = 254}$.

c) **Erwartungswert:**

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Füllmenge eines Honigglases der neuen Anlage in g. Y ist normalverteilt mit $\sigma_Y = 1$ und unbekanntem Erwartungswert $\mu_Y$.

Gesucht ist der kleinste Wert von $\mu_Y$ mit $P(Y < 250) \leq 0{,}15$.

Den entsprechenden Wert für $\mu_Y$ bestimmt man durch systematisches Probieren mit dem WTR (WTR 8), wobei zu beachten ist, dass die Genauigkeit 0,1 g beträgt.

Für $\mu_Y = 251{,}0$ ist $P(Y < 250) \approx 0{,}159 > 0{,}15$,
für $\mu_Y = 251{,}1$ ist $P(Y < 250) \approx 0{,}136 < 0{,}15$.

Der Erwartungswert der Füllmenge muss **mindestens 251,1 g** betragen.

d) Jedes fünfte Glas beinhaltet einen von außen nicht sichtbaren Gutschein; sechs dieser Gläser werden der Reihe nach aufgestellt.

**Ereignis A:**
A: „Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein."

Die Zufallsgröße $Z_1$ beschreibt die Anzahl der Gläser, die einen Gutschein enthalten. $Z_1$ ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 6$ und $p = 0{,}2$.

Für diese $B_{6;\,0{,}2}$-verteilte Zufallsgröße gilt dann:

$\mathbf{P(A)} = P(Z_1 = 3) \approx \mathbf{0{,}082} = 8{,}2\ \%$ (WTR 4)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei der sechs Gläser einen Gutschein enthalten, ist etwa 8,2 %.

**Ereignis B:**
B: „Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein."

Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas einen Gutschein enthält, $p = 0{,}2$ beträgt, erhält man $\mathbf{P(B)} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = \mathbf{0{,}04}$.

Mit der Wahrscheinlichkeit von 4 % enthalten die ersten beiden Gläser jeweils einen Gutschein.

**Ereignis C:**
C: „In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein, und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander."

Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass die ersten beiden Gläser einen Gutschein enthalten, die übrigen vier aber nicht, beträgt $P = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4$.
Insgesamt gibt es fünf Anordnungen, bei denen die beiden Gläser mit Gutschein unmittelbar nebeneinander stehen (1. und 2. Glas, 2. und 3. Glas usw.).

Die Wahrscheinlichkeit für diese fünf Fälle wird von der Wahrscheinlichkeit, genau zwei Gläser mit Gutscheinen zu erhalten, abgezogen. Es ist also:
$\mathbf{P(C)} = P(Z_1 = 2) - 5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 \approx \mathbf{0{,}164}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Gläser einen Gutschein enthalten, diese aber nicht nebeneinander stehen, beträgt ca. 16,4 %.