

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
--------------------------	---

Kapitel I Grundlagen

1 Logische Grundbegriffe	3
2 Mengen	9
Elementare Tatsachen	9
Die Potenzmenge	10
Komplemente, Durchschnitte und Vereinigungen	10
Produkte	11
Mengensysteme	13
3 Abbildungen	16
Einfache Beispiele	17
Die Komposition von Abbildungen	18
Kommutative Diagramme	19
Injektionen, Surjektionen und Bijektionen	20
Umkehrabbildungen	20
Mengenabbildungen	21
4 Relationen und Verknüpfungen	24
Äquivalenzrelationen	24
Ordnungsrelationen	26
Verknüpfungen	28
5 Die natürlichen Zahlen	32
Die Peano-Axiome	32
Rechenregeln	34
Der euklidische Algorithmus	38
Das Induktionsprinzip	39
Rekursive Definitionen	43

6	Abzählbarkeit	50
	Permutationen	51
	Der Mächtigkeitsbegriff	51
	Abzählbare Mengen	52
	Unendliche Produkte	54
7	Gruppen und Homomorphismen	56
	Gruppen	57
	Untergruppen	59
	Restklassen	59
	Homomorphismen	61
	Isomorphismen	63
8	Ringe, Körper und Polynome	67
	Ringe	67
	Der binomische Satz	70
	Multinomialformeln	71
	Körper	73
	Angeordnete Körper	74
	Formale Potenzreihen	77
	Polynome	78
	Polynomiale Funktionen	80
	Division mit Rest	82
	Linearfaktoren	83
	Polynome in mehreren Unbestimmten	84
9	Die rationalen Zahlen	90
	Die ganzen Zahlen	90
	Die rationalen Zahlen	92
	Rationale Nullstellen von Polynomen	94
	Quadratwurzeln	95
10	Die reellen Zahlen	98
	Die Ordnungsvollständigkeit	98
	Die Dedekindsche Konstruktion der reellen Zahlen	99
	Die natürliche Ordnung von $\mathbb{R}$	101
	Die erweiterte Zahlengerade	102
	Eine Charakterisierung von Supremum und Infimum	102
	Der Satz von Archimedes	103
	Die Dichtheit der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$	103
	n -te Wurzeln	104
	Die Dichtheit der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$	106
	Intervalle	107

11 Die komplexen Zahlen	110
Eine Konstruktion der komplexen Zahlen	110
Elementare Eigenschaften	111
Rechenregeln	114
Bälle in $\mathbb{K}$	116
12 Vektorräume, affine Räume und Algebren	119
Vektorräume	119
Lineare Abbildungen	120
Vektorraumbasen	123
Affine Räume	125
Affine Abbildungen	128
Polynominterpolation	129
Algebren	131
Differenzenoperatoren und Summenformeln	132
Newtonsche Interpolationspolynome	133

Kapitel II Konvergenz

1 Konvergenz von Folgen	141
Folgen	141
Metrische Räume	142
Häufungspunkte	145
Konvergenz	145
Beschränkte Mengen	147
Eindeutigkeitsaussagen	148
Teilfolgen	148
2 Das Rechnen mit Zahlenfolgen	152
Nullfolgen	152
Elementare Rechenregeln	152
Vergleichssätze	155
Folgen komplexer Zahlen	155
3 Normierte Vektorräume	160
Normen	160
Bälle	161
Beschränkte Mengen	162
Beispiele	162
Räume beschränkter Abbildungen	163
Innenprodukträume	165
Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	166
Euklidische Räume	169
Äquivalente Normen	170
Konvergenz in Produkträumen	172

4	Monotone Folgen	175
	Beschränkte monotone Folgen	175
	Einige wichtige Grenzwerte	176
5	Uneigentliche Konvergenz	181
	Die Konvergenz gegen $\pm\infty$	181
	Limes superior und Limes inferior	182
	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	184
6	Vollständigkeit	187
	Cauchyfolgen	187
	Banachräume	188
	Die Cantorsche Konstruktion der reellen Zahlen	190
7	Reihen	195
	Konvergenz von Reihen	195
	Die harmonische und die geometrische Reihe	196
	Rechenregeln	197
	Konvergenzkriterien	197
	Alternierende Reihen	198
	g -al-Entwicklungen	200
	Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$	204
8	Absolute Konvergenz	207
	Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium	208
	Die Exponentialfunktion	211
	Umordnungen von Reihen	212
	Doppelreihen	214
	Cauchyprodukte	216
9	Potenzreihen	222
	Der Konvergenzradius	223
	Rechenregeln	225
	Der Identitätssatz für Potenzreihen	226

Kapitel III Stetige Funktionen

1	Stetigkeit	233
	Elementare Eigenschaften und Beispiele	233
	Folgenstetigkeit	238
	Rechenregeln	239
	Einseitige Stetigkeit	242

2	Topogische Grundbegriffe	247
	Offene Mengen	247
	Abgeschlossene Mengen	248
	Die abgeschlossene Hülle	250
	Der offene Kern	252
	Der Rand einer Menge	253
	Die Hausdorffeigenschaft	253
	Beispiele	254
	Eine Charakterisierung stetiger Abbildungen	255
	Stetige Ergänzungen	257
	Relativtopologien	259
	Allgemeine topologische Räume	261
3	Kompaktheit	266
	Die Überdeckungseigenschaft	266
	Eine Charakterisierung kompakter Mengen	267
	Folgenkompaktheit	268
	Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen	269
	Der Satz vom Minimum und Maximum	269
	Totalbeschränktheit	272
	Gleichmäßige Stetigkeit	274
	Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen	275
4	Zusammenhang	279
	Charakterisierung des Zusammenhanges	279
	Zusammenhang in $\mathbb{R}$	280
	Der allgemeine Zwischenwertsatz	281
	Wegzusammenhang	282
	Zusammenhang in allgemeinen topologischen Räumen	285
5	Funktionen in $\mathbb{R}$	287
	Der Zwischenwertsatz von Bolzano	287
	Monotone Funktionen	288
	Stetige monotone Funktionen	290
6	Die Exponentialfunktion und Verwandte	293
	Die Eulersche Formel	293
	Die reelle Exponentialfunktion	296
	Der Logarithmus und die allgemeine Potenz	297
	Die Exponentialfunktion auf $i\mathbb{R}$	299
	Die Definition von π und Folgerungen	302
	Tangens und Cotangens	306
	Das Abbildungsverhalten der Exponentialfunktion	307
	Ebene Polarkoordinaten	308

Der komplexe Logarithmus	310
Komplexe Potenzen	311
Eine weitere Darstellung der Exponentialfunktion	312

Kapitel IV Differentialrechnung in einer Variablen

1 Differenzierbarkeit	319
Die Definition	319
Lineare Approximierbarkeit	320
Rechenregeln	322
Kettenregel	323
Umkehrfunktionen	324
Differenzierbare Abbildungen	325
Höhere Ableitungen	325
Einseitige Differenzierbarkeit	331
2 Mittelwertsätze und ihre Anwendungen	335
Extremalstellen	335
Der erste Mittelwertsatz	336
Monotonie und Differenzierbarkeit	337
Konvexität und Differenzierbarkeit	340
Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski	344
Der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen	346
Der zweite Mittelwertsatz	347
Die Regeln von de l'Hospital	348
3 Taylorsche Formeln	354
Landausche Symbole	354
Die Taylorsche Formel	355
Taylorpolynome, Taylorreihe und Restglied	357
Restglieddarstellungen im reellen Fall und Anwendungen	359
Polynomiale Interpolation	364
Differenzenquotienten höherer Ordnung	365
4 Iterationsverfahren	370
Fixpunkte und Kontraktionen	370
Der Banachsche Fixpunktsatz	371
Das Newtonverfahren	375

Kapitel V Funktionenfolgen

1	Gleichmäßige Konvergenz	383
	Punktweise konvergente Folgen	383
	Gleichmäßig konvergente Folgen	384
	Funktionenreihen	386
	Das Weierstraßsche Majorantenkriterium	388
2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen	391
	Stetigkeit	391
	Lokal gleichmäßige Konvergenz	391
	Der Banachraum der beschränkten und stetigen Funktionen	393
	Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen	394
3	Analytische Funktionen	398
	Differenzierbarkeit von Potenzreihen	398
	Analytizität	399
	Stammfunktionen analytischer Funktionen	401
	Die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus	403
	Die Binomialreihe	403
	Der Identitätssatz für analytische Funktionen	408
4	Polynomiale Approximation	412
	Banachalgebren	412
	Dichtheit und Separabilität	413
	Der Satz von Stone und Weierstraß	415
	Trigonometrische Polynome	419
	Periodische Funktionen	421
	Der trigonometrische Approximationssatz	423
	Anhang Einführung in die Schlußlehre	427
	Literaturverzeichnis	433
	Index	435