2023

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Brandenbur

Mathematik LK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

Inhalt

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2023

Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Jahrgang 2018

Jahrgang 2019

Jahrgang 2020

Jahrgang 2021

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2023** für den **Leistungskurs in Brandenburg** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2023**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Im zweiten Teil stehen Ihnen **Übungsaufgaben** zum **hilfsmittelfreien Teil** zur Verfügung. Sie umfassen Themeninhalte, die in den kommenden Jahren geprüft werden können, jedoch bis 2020 nicht Teil des Prüfungsstoffs waren.
- Der dritte Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2018 bis 2021** von Brandenburg. Die **Prüfungsaufgaben 2022** stehen auf der **Plattform MyStark** zum Download zur Verfügung. Anhand der Original-Prüfungsaufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Die Übungsaufgaben und die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Aufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die Ihnen Sie ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2023 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu auf der Plattform MyStark (Zugangscode vgl. Farbseiten).

Das Autorenteam wünscht Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf MyStark Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Brandenburg – Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau
2020 – Aufgabe 4.1: Stochastik

Blumensamen BE

Ein Pflanzenhändler erhält in einem Behälter eine große Lieferung von Blumensamen, in der zwei Sorten vermischt sind. Diese besteht aus den Samen einer rot blühenden Blume (kurz: Rotblüher) und den Samen einer blau blühenden Blume (kurz: Blaublüher). Einige Samen keimen nicht, d. h., aus ihnen wächst keine Blume.

Die Samen sind äußerlich nicht voneinander zu unterscheiden.
Der Anteil der Rotblüher an der Samenmischung beträgt 80 %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samen der Rotblüher keimt, ist 95 %.

a) Ein Samen wird zufällig aus der Lieferung entnommen.
Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Rotblüher ist und keimen wird, 0,76 beträgt. 1

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind genau 7 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden.“
B: „Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind mindestens 9 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden.“ 4

c) Bestimmen Sie, wie viele Samen höchstens aus dem Behälter entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 99 % mindestens ein keimender Rotblüher dabei ist. 3

d) Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Samen der Samenmischung keimt, 0,9 beträgt.
Die Blaublüher sind eine neu gezüchtete Sorte, von der man bisher noch keine genauen Kenntnisse bez. ihrer Keimung hatte.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Blaublüher keimt. 3

Für den Verkauf verpackt der Händler jeweils 5 Samen der Mischung in eine Tüte.
Betrachtet wird im Folgenden die Zufallsgröße:

R: „Anzahl der Rotblühersamen in einer Tüte“

e) Ergänzen Sie in der Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße R für den Wert $r = 3$.
Erläutern Sie zwei Möglichkeiten für die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit. 4

r	0	1	2	3	4	5
$P(R = r)$	0,0003	0,0064	0,0512		0,4096	0,3277

f) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsgröße R gilt: $E(R) = 4$ 1

Tipps und Hinweise zur Lösung von Aufgabe 4.1

Tipp zu Teilaufgabe a

- Führen Sie den Nachweis, indem Sie mithilfe der Pfadregel (Multiplikationsregel) die Wahrscheinlichkeit $P(Ro \cap K)$ dafür berechnen, dass der entnommene Samen ein Rotblüher (Ro) ist und keimen (K) wird.

Tipps zu Teilaufgabe b

- Die Zufallsgröße X: „Anzahl der keimfähigen Rotblüher" ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}76$.
- Berechnen Sie mithilfe der Bernoulli-Formel $P(A) = P(X = 7)$.
- Das Ereignis B tritt ein, wenn unter den ausgewählten Samen 9 oder 10 Samen sind, die Rotblüher sind und keimen werden.
- Berechnen Sie mithilfe der Bernoulli-Formel $P(B) = P(X = 9) + P(X = 10)$.

Tipps zu Teilaufgabe c

- Gesucht ist die höchstmögliche Anzahl n der Samen, die entnommen werden dürfen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein keimender Rotblüher dabei ist, kleiner oder gleich 99 % ist. Es muss also gelten $P(X \geq 1) \leq 0{,}99$.
- Die Gegenwahrscheinlichkeit zu $P(X \geq 1)$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$.
- Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Samen kein Rotblüher ist, $p = 0{,}24$ beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den n entnommenen Samen kein Rotblüher ist, $P(X = 0) = 0{,}24^n$.
- Lösen Sie unter Anwendung der logarithmischen Rechenregeln die Ungleichung $1 - 0{,}24^n \leq 0{,}99$ nach n auf.
- Beachten Sie die Rechenregeln für Ungleichungen. Insbesondere dreht sich bei Multiplikation oder Division beider Seiten mit einem negativen Wert das Relationszeichen um.

Tipps zu Teilaufgabe d

- Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(K)$.
- Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein entnommener Samen Blaublüher (B) ist und keimt (K), gilt: $P(B \cap K) = P(B) \cdot P_B(K)$
- Da der Anteil der Blaublüher an der Samenmischung 20 % beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Blaublüher ist $P(B) = 0{,}2$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samen der Samenmischung keimt, ist $P(K) = 0{,}9$.
- Die Wahrscheinlichkeit $P(Ro \cap K) = 0{,}76$ ist aus Teilaufgabe a bekannt.
- Stellen Sie eine geeignete Gleichung auf und berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_B(K)$.

Tipps zu Teilaufgabe e

- Die Zufallsgröße R ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}8$. Berechnen Sie mithilfe der Bernoulli-Formel $P(R = 3)$.
- Alternativ können Sie auch ausnutzen, dass die Summe der Teilwahrscheinlichkeiten $P(R = 0)$, $P(R = 1)$, $P(R = 2)$, $P(R = 3)$, $P(R = 4)$ und $P(R = 5)$ gleich 1 ist.
- Für $P(R = 3)$ gilt also: $P(R = 3) = 1 - P(R = 0) - P(R = 1) - P(R = 2) - P(R = 4) - P(R = 5)$

Tipps zu Teilaufgabe f

- Für die binomialverteilte Zufallsgröße R mit den Parametern n und p ist der Erwartungswert $\mu = E(R)$ das Produkt aus n und p.
- Im zu untersuchenden Fall ist $n = 5$ die Anzahl der Samen in einer Tüte und $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein entnommener Samen ein Rotblüher ist.

Tipp zu Teilaufgabe g

- Bedenken Sie, dass die Samen von außen nicht unterscheidbar sind und die Auswahl somit zufällig erfolgt.

Tipps zu Teilaufgabe h

- Schätzen Sie zunächst grob ab, wie viele Rotblüher unter den 10 Samen sein müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass von den 4 ausgewählten Samen mindestens 3 Rotblüher sind, größer als 70 % ist.
- Empfohlen wird, sowohl den Fall, dass 7 der 10 Samen Rotblüher sind, als auch den Fall, dass 8 der 10 Samen Rotblüher sind, zu untersuchen und jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass unter den 4 ausgewählten Samen 3 oder 4 Samen Rotblüher sind.
- Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit muss das Urnenmodell ohne Zurücklegen (Lottomodell, hypergeometrische Verteilung) angewendet werden.

Lösungen zu Aufgabe 4.1

a) Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:
Ro: „Rotblüher“
K: „Samen keimt“

Da der Anteil der Rotblüher an der Samenmischung 80 % beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Rotblüher ist: $P(Ro) = 0{,}8$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rotblüher keimt, beträgt $P_{Ro}(K) = 0{,}95$.

Mithilfe der Pfadregel (Multiplikationsregel) lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Rotblüher ist und keimen wird, berechnen:

$$P(Ro \cap K) = P(Ro) \cdot P_{Ro}(K) = 0{,}8 \cdot 0{,}95 = 0{,}76 = 76\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Rotblüher ist und keimen wird, beträgt $\underline{\underline{0{,}76}}$ bzw. $\underline{\underline{76\ \%}}$.

b) Die Zufallsgröße X: „Anzahl der keimfähigen Rotblüher“ ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}76$. Mithilfe der Bernoulli-Formel lassen sich die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) berechnen.
Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

$$P(A) = P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}76^7 \cdot 0{,}24^3 \approx 0{,}2429 = 24{,}29\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass unter 10 zufällig ausgewählten Samen genau 7 Samen sind, die Rotblüher sind und keimen werden, beträgt ungefähr $\underline{\underline{0{,}2429}}$ bzw. $\underline{\underline{24{,}29\ \%}}$.

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:

$$P(B) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}76^3 \cdot 0{,}24 + 0{,}76^{10} \approx 0{,}2673 = 26{,}73\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, dass unter 10 zufällig ausgewählten mindestens 9 Samen sind, die Rotblüher sind und keimen werden, beträgt ungefähr $\underline{\underline{0{,}2673}}$ bzw. $\underline{\underline{26{,}73\ \%}}$.

c) Gesucht ist die höchstmögliche Anzahl n der Samen, die entnommen werden müssen, damit gilt:

$$P(X \geq 1) \leq 0{,}99$$

Mit $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ gilt:

$$1 - P(X = 0) \leq 0{,}99$$
$$1 - 0{,}24^n \leq 0{,}99$$
$$0{,}01 \leq 0{,}24^n$$

Logarithmieren und Anwenden der logarithmischen Rechenregeln:

$$\ln 0{,}01 \leq n \cdot \ln 0{,}24$$
$$\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}24} \geq n$$

Das Relationszeichen dreht sich um, da $\ln 0{,}24$ negativ ist.

Es gilt also:

$$n \leq 3{,}2$$

Es sind höchstens $\underline{\underline{3}}$ Samen zu entnehmen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 99 % ein keimender Rotblüher dabei ist.

d) Es wird folgende Abkürzung eingeführt:
B: „Blaublüher"

In der Aufgabenstellung ist die Wahrscheinlichkeit gegeben, dass ein Samen der Samenmischung keimt:

$$P(K) = 0{,}9$$

Aus Teilaufgabe a ist die Wahrscheinlichkeit dafür bekannt, dass ein entnommener Samen ein Rotblüher ist und keimt:

$$P(Ro \cap K) = 0{,}76$$

Da der Anteil der Blaublüher an der Samenmischung 20 % beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Blaublüher ist:

$$P(B) = 0{,}2$$

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(K)$.

Nach den Pfadregeln (Multiplikations- und Summenregel) gilt:

$$P(K) = P(Ro \cap K) + P(B \cap K)$$

$$0{,}9 = 0{,}76 + 0{,}2 \cdot P_B(K) \quad \Leftrightarrow \quad P_B(K) = 0{,}7 = 70\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Blaublüher keimt, beträgt $\underline{\underline{0{,}7}}$ bzw. $\underline{\underline{70\ \%}}$.

e) Die Zufallsgröße R ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}8$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(R = 3)$ kann auf zwei verschiedene Weisen berechnet werden. Entweder mithilfe der Bernoulli-Formel oder unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Teilwahrscheinlichkeiten $P(R = 0)$, $P(R = 1)$, $P(R = 2)$, $P(R = 3)$, $P(R = 4)$ und $P(R = 5)$ in der Summe 1 ergeben.

$$P(R = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}2048$$

Oder:

$$P(R = 3) = 1 - P(R = 0) - P(R = 1) - P(R = 2) - P(R = 4) - P(R = 5)$$
$$= 1 - 0{,}0003 - 0{,}0064 - 0{,}0512 - 0{,}4096 - 0{,}3277 = 0{,}2048$$

Der in der Tabelle zu ergänzende Wert für $P(R = 3)$ beträgt $\underline{\underline{0{,}2048}}$.

f) Mit $n = 5$ (Anzahl der Samen in einer Tüte) und $p = 0{,}8$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein entnommener Samen ein Rotblüher ist) gilt:

$$E(R) = \mu = 5 \cdot 0{,}8 = \underline{\underline{4}}$$