2023

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Berlin

Mathematik GK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

Inhalt

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Autoren:

Dr. Detlef Launert
Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil,
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2020, Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1 und 2.2

Lauri Lehmann
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2018, 2019;
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2020, Aufgabe 1 Geometrie und Stochastik, Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2022

Redaktion
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2021

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2023** für den **Grundkurs in Berlin** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das Abitur 2023. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.

- Im zweiten Teil stehen Ihnen **Übungsaufgaben** zum **hilfsmittelfreien Teil** zur Verfügung. Diese bestehen aus den entsprechenden Aufgaben des Abiturs in Brandenburg und dienen zur Orientierung für den hilfsmittelfreien Teil des Abiturs in Berlin. Da es sich um Aufgaben für das erhöhte Anforderungsniveau handelt, sind bestimmte Teilaufgaben, die im Schwierigkeitsgrad über das Grundkursniveau hinausgehen, besonders gekennzeichnet.

- Der dritte Teil beinhaltet die **Original-Prüfungsaufgaben 2018 bis 2021**. Die **Original-Prüfung 2022** steht Ihnen auf der Plattform MyStark zum Download zur Verfügung. Mit diesen Aufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.

- Der Zugangscode auf den Farbseiten vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.

- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.

- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2023 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2023

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in der Ausgabe von 2014 und die Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den dort genannten abschlussorientierten Standards und den fachlichen Inhalten.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**. Folgende zusätzliche Festlegungen sind dabei zu berücksichtigen:
Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen. Zudem **nicht** gefordert wird die Nutzung von Grenzwerten bei der Bestimmung von Ableitung oder Integral, Potenzfunktionen mit Exponenten, die nicht Elemente der natürlichen Zahlen sind, sowie Simulationen.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Bei der Aufgabenstellung 1, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Sie beziehen sich auf alle drei Themengebiete und können auch in begrenztem Umfang Problemstellungen enthalten, die dem Anforderungsbereich III zuzuordnen sind.
Es gibt 5 Aufgaben zu je 5 BE.

Bei den weiteren Aufgabenstellungen ist jede Aufgabe als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Aufgabenteile, die dem Anforderungsbereich III zugeordnet sind, finden sich meist am Ende der jeweiligen Aufgabe. Nur, wenn es der Zusammenhang erfordert, können sie auch schon früher eingegliedert sein. Wenn sich die Möglichkeit bietet, wird die Aufgabe so formuliert, dass eine praktische Anwendung des mathematischen Sachverhaltes beschrieben wird.

In jedem der drei Themengebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik ist genau eine Aufgabe zu lösen, wobei der Prüfling jeweils die Wahl zwischen zwei gleichwertigen Aufgaben hat. Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Aufgabenstellung 1 ohne Wahlmöglichkeit 60 min	Aufgabe 1: **hilfsmittelfreier Teil** (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik)
Aufgabenstellung 2 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 2.1 oder Aufgabe 2.2 **Analysis**
Aufgabenstellung 3 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 3.1 oder Aufgabe 3.2 **Analytische Geometrie**
Aufgabenstellung 4 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 4.1 oder Aufgabe 4.2 **Stochastik**

Für die Bearbeitung der vier Prüfungsaufgaben stehen **255 Minuten** zur Verfügung.
Davon entfallen 60 Minuten auf die Aufgabenstellung 1. (Bis 2019 entfielen 45 Minuten auf die Aufgabenstellung 1.)
30 Minuten sind zudem als Lesezeit vorgesehen, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den beiden Aufgaben in jedem Themengebiet getroffen werden kann.

2022 und **2021** galten aufgrund der Coronapandemie **Ausnahmeregelungen**. Der hilfsmittelfreie Teil bestand aus 3 **verpflichtenden** Aufgaben Analysis und die Lehrkraft wählte **zusätzlich** entweder 2 Aufgaben Analytische Geometrie **oder** 2 Aufgaben Stochastik aus.
Im nicht hilfsmittelfreien Teil mussten beide Aufgaben Analysis bearbeitet werden und die Lehrkraft wählte wiederum **zusätzlich** die Aufgabe Analytische Geometrie **oder** die Aufgabe Stochastik aus.
Die Bewertungseinheiten und Aufgabenstellungen wurden entsprechend angepasst.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS) bearbeitet wird.
Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist (Aufgabenstellung 2, 3 und 4).

Für die Bearbeitung **ohne CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.

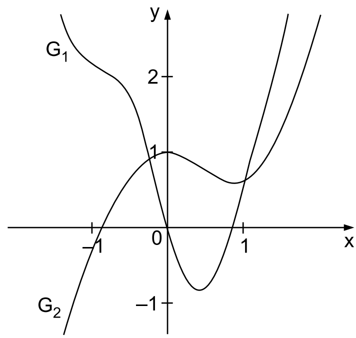
Für die Bearbeitung **mit CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
Für die Bearbeitung der Abiturprüfung können ein PC oder folgende Geräte Anwendung finden:

Texas Instruments	TI-92, TI-Voyage, TI-Nspire
Casio	Casio Classpad

Berlin – Mathematik Grundkurs
Übungsaufgabe 1: hilfsmittelfreier Teil*

Teil 1 – Analysis BE

a) Im Bild sind die Graphen G_1 und G_2 dargestellt. Einer der beiden ist der Graph einer Funktion f, der andere der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion f'.
Geben Sie an, welcher der beiden Graphen die Ableitungsfunktion zeigt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. 2



b) Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = -2e^{2x} + 1$, deren Graph die y-Achse im Punkt $S_y(0|5)$ schneidet. 3

c) Aus einem 20 Meter langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Die Seitenlänge der Quadrate ist a.
Stellen Sie eine Funktion in Abhängigkeit von a auf, mit der man das Volumen des Quaders ermitteln kann. Geben Sie den Definitionsbereich für diese Funktion an. 5

Teil 2 – Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) Gegeben sind die Punkte $P(1|-2|1)$, $Q(2|-3|-1)$ und $R(-1|4|2)$.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt R und parallel zur Geraden durch die Punkte P und Q verläuft. 2

b) Ermitteln Sie zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$, sodass gilt:
Je zwei der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal zueinander. 4

c) E_m ist die mittelparallele Ebene, die alle Punkte enthält, die zu den beiden Ebenen $E_1\colon 2x + 3y - 4z = d_1$ und $E_2\colon 2x + 3y - 4z = d_2$ den gleichen Abstand haben.
Weisen Sie nach, dass E_m die Gleichung $2x + 3y - 4z = \frac{d_1 + d_2}{2}$ mit $d_1, d_2 \neq 0$ hat. 4

Teil 3 – Stochastik

a) Bei einem Multiple-Choice-Test sollen 4 Fragen durch Ankreuzen beantwortet werden. Es gibt stets 4 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand durch willkürliches Raten alle Antworten richtig angekreuzt hat. 3

---

*Abitur Brandenburg 2015 Aufgabe 1; gekennzeichnete Aufgaben (Rauten) sind für den Grundkurs nicht relevant

Tipps und Hinweise zur Lösung von Übungsaufgabe 1

Tipps zu Teil 1

a) Suchen Sie die Stellen, an denen der eine Graph eine Nullstelle und der andere eine Extremstelle hat. Was können Sie daraus schließen?

b) Berechnen Sie die Stammfunktion von f(x) in Abhängigkeit der Konstanten C.

Setzen Sie die Koordinaten von S_y in die Stammfunktion ein und lösen Sie die entstehende Gleichung nach C auf.

c) Stellen Sie das Volumen des Quaders mithilfe der Kantenlänge a und der Kantenlänge b dar.

Die Summe aller Kanten soll 20 m betragen. Wie können Sie daraus die Kantenlänge b in Abhängigkeit von der Kantenlänge a ausdrücken?

Ersetzen Sie b in der Formel für das Volumen.

Welche Bedingung müssen die beiden Kantenlängen erfüllen? Berechnen Sie damit den Definitionsbereich von a.

Tipps zu Teil 2

a) Parallele Geraden besitzen denselben Richtungsvektor. Dieser lässt sich mithilfe der beiden Punkte berechnen, durch die die Gerade verläuft.

b) Wählen Sie für $\vec{b}$ einen beliebigen Vektor, für den $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt.

Der Vektor $\vec{c}$ muss zwei Bedingungen erfüllen: $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 0$

c) Wählen Sie je einen Punkt, der in der Ebene E_1 bzw. E_2 liegt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der beiden Punkte.

Verwenden Sie die Koordinaten des Mittelpunktes, um die Ebenengleichung der mittelparallelen Ebene zu bestimmen.

Tipps zu Teil 3

a) Verdeutlichen Sie sich den Sachverhalt anhand eines Baumdiagramms.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine Frage durch Raten richtig zu beantworten?

b) Die erste Wahrscheinlichkeit können Sie direkt aus der ergänzten Vierfeldertafel entnehmen.

Für die zweite Wahrscheinlichkeit benötigen Sie die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.

c) Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit für $X = 3$.

Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl genauso hoch ist wie die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Zahl. Welche Anzahl kommt daher infrage, um dieselbe Wahrscheinlichkeit w zu erhalten?

Prüfen Sie, ob $\binom{20}{17}$ genauso groß ist wie $\binom{20}{3}$. Benutzen Sie dafür $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lösungen zur Übungsaufgabe 1

Teil 1 – Analysis

a) *1. Möglichkeit:*
Der Graph G_2 ist der Graph der Funktion f(x) und der Graph G_1 ist der Graph der Funktion f'(x), weil die Nullstellen von f'(x) die Extremstellen von f(x) sind.

2. Möglichkeit:
Der Graph G_2 ist der Graph der Funktion f(x) und der Graph G_1 ist der Graph der Funktion f'(x), weil die Extremstelle von f'(x) die Wendestelle von f(x) ist.

b) Es handelt sich hier um ein sogenanntes „Anfangswertproblem“.
Für die Stammfunktion von f(x) gilt:

$$F_C(x) = \int (-2e^{2x} + 1)\,dx = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + x + C = -e^{2x} + x + C$$

Da $S_y(0|5)$ auf dem Graphen von $F_C(x)$ liegen soll, muss dessen Funktionsterm für $x = 0$ und $y = F_C(0) = 5$ erfüllt sein. Aus dieser Gleichung lässt sich C berechnen.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} 5 &= -e^{2 \cdot 0} + 0 + C \\ 5 &= -1 + C \\ 6 &= C \end{aligned}$$

Für die Stammfunktion folgt:

$$F(x) = \underline{\underline{-e^{2x} + x + 6}}$$

c) Hier handelt es sich im Ansatz um eine Extremwertaufgabe.
Volumen des Quaders (Hauptbedingung):

$$V = a \cdot a \cdot b = a^2 b$$

Summe aller Kantenlängen des Quaders (Nebenbedingung):

$$\begin{aligned} 8a + 4b &= 20 \\ 4b &= 20 - 8a \\ b &= 5 - 2a \end{aligned}$$

Damit erhält man als Zielfunktion:

$$V(a) = a^2 b = \underline{\underline{a^2(5 - 2a) = -2a^3 + 5a^2}}$$

Definitionsbereich von V(a):
Damit ein Quader existiert, müssen alle Kantenlängen größer als null sein. Daher muss $a > 0$ gelten. Für b muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} 5 - 2a &> 0 \\ 5 &> 2a \\ 2a &< 5 \\ a &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Daher muss a Folgendes erfüllen:

$$0 < a < \frac{5}{2}$$

Damit ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\underline{\underline{\mathbb{D}_V = \left\{ a \mid a \in \mathbb{R}, 0 < a < \frac{5}{2} \right\}}}$$

Teil 2 – Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) Die Gerade g verläuft durch den Punkt R und ist parallel zur Geraden g(PQ). Es müssen also die folgenden Bedingungen erfüllt sein: $R \in g$ und $g \parallel g(PQ)$.

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OR} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}};\quad t \in \mathbb{R}$$

b) Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.
Die Koordinaten von $\vec{b}$ werden so gewählt, dass $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ erfüllt ist. Dies gilt z. B. für $\underline{\underline{\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 6 + 0 = 0$$

Um einen solchen Vektor zu erhalten, können zwei Koordinaten von $\vec{b}$ frei gewählt werden. Die dritte Koordinate von $\vec{b}$ lässt sich dann über das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ berechnen.

Weiterhin muss gelten:

$$\vec{a} \circ \vec{c} = 0 \text{ und } \vec{b} \circ \vec{c} = 0$$

1. Möglichkeit:
Im trivialen Fall ist $\underline{\underline{\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}}}$, denn dieser ist zu jedem Vektor orthogonal.

Probe: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

2. Möglichkeit:
Aus den Bedingungen für $\vec{c}$ erhält man ein lineares Gleichungssystem:

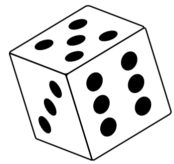
$$\vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{I} \quad 2x + 3y - z = 0$$

$$\vec{b} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{II} \quad -3x + 2y = 0$$

Berlin – Mathematik Grundkurs
2019 – Aufgabe 4.2: Stochastik

Würfelspiel BE

Sven und Tom würfeln täglich mit einem fairen Würfel darum, wer den Müll nach unten bringt.
Es wird folgende Regel vereinbart:
Zuerst würfelt Sven, danach würfelt Tom. Wenn die Augenzahl von Sven kleiner ist als die von Tom, muss Sven den Müll nach unten bringen. In allen anderen Fällen muss Tom den Müll nach unten bringen.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sven eine 4 gewürfelt hat und den Müll nach unten bringen muss. 2

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Sven bringt den Müll nach unten" $p = \frac{5}{12}$ beträgt.
Fertigen Sie eine tabellarische Übersicht aller Ergebnisse an, bei denen Sven den Müll nach unten bringen muss. 5

Sven und Tom werden im nächsten Monat 30-mal würfeln.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert dafür, wie oft Sven im nächsten Monat den Müll nach unten bringt. 2

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
A: „Sven trägt genau 12-mal den Müll nach unten."
Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
B: „Tom trägt mindestens einmal den Müll hinunter." berechnen kann. 4

e) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms

$$\binom{30}{10}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^{10}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{20}+\binom{30}{11}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^{11}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{19}+\binom{30}{12}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^{12}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{18}.$$ 2

f) Tom schlägt eine Veränderung des Spiels vor. Diese besteht darin, dass zunächst vor Beginn der neuen Woche ermittelt wird, wie oft jeder der beiden in der Woche den Müll hinuntertragen muss. Dazu werden in einen Stoffbeutel 5 schwarze und 5 weiße Kugeln gleicher Größe gelegt. Einer der beiden zieht mit einem Griff genau 7 Kugeln aus dem Beutel. Die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln entspricht nun der Anzahl der Tage, an denen Tom in der Woche den Müll nach unten tragen muss.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tom in der folgenden Woche weniger als 4-mal an der Reihe ist.
Begründen Sie Ihren Ansatz. 5

20

Tipps und Hinweise zur Lösung von Aufgabe 4.2

Tipps zu Teilaufgabe a

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sven eine Vier würfelt.
- Überlegen Sie, welche Augenzahl Tom würfeln muss, damit Sven, nachdem er eine Vier gewürfelt hat, den Müll nach unten bringen muss.
- Wenden Sie Summen- und Pfadregel richtig an.

Tipps zu Teilaufgabe b

- Erstellen Sie möglichst systematisch eine tabellarische Übersicht aller Ereignisse, bei denen Sven den Müll nach unten bringen muss. Gehen Sie alle Augenzahlen durch, die Sven würfeln kann, und überlegen Sie, welche Augenzahl Tom dann würfeln muss, damit Sven den Müll nach unten bringen muss.
- Zählen Sie, wie viele Fälle es gibt, in denen Sven den Müll nach unten bringen muss.
- Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen Ereignisse beim zweimaligen Wurf mit einem fairen Würfel.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass Sven den Müll nach unten bringen muss, ist der Quotient aus der Anzahl der Fälle, die auftreten können, sodass Sven den Müll nach unten bringen muss, und der Gesamtanzahl aller möglichen Ereignisse beim zweimaligen Wurf mit einem fairen Würfel.

Tipps zu Teilaufgabe c

- Die Zufallsgröße X: „Anzahl, wie oft Sven den Müll nach unten bringt“ ist binomialverteilt mit $n = 30$ (das zweimalige Würfeln wird 30-mal durchgeführt) und $p = \frac{5}{12}$ (in Teilaufgabe b berechnete Wahrscheinlichkeit).
- Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p ist der Erwartungswert E(X) bzw. μ das Produkt aus n und p. Es gilt also: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Tipps zu Teilaufgabe d

- Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A zu bestimmen, berechnen Sie $P(X = 12)$ mithilfe der Bernoulli-Formel:
  $$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$
  In der Formel beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und n beschreibt, wie oft ein Bernoulli-Experiment in einer Bernoulli-Kette durchgeführt wird (hier: 30-malige Durchführung des zweimaligen Würfelns). Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, r Treffer zu erzielen (hier: 12).
- Das Ereignis B ist das Gegenereignis zu dem Ereignis $\overline{B}$ „Sven trägt immer (also 30-mal) den Müll nach unten“. Stellen Sie einen Term für P(B) mithilfe des Gegenereignisses $\overline{B}$ auf.
- Beachten Sie, dass P(B) nicht berechnet werden muss.

Lösungen zu Aufgabe 4.2

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass Sven mit einem fairen Würfel eine Vier würfelt, beträgt:

$$P(4) = \frac{1}{6}$$

Tom muss, nachdem Sven eine Vier gewürfelt hat, eine Fünf oder eine Sechs würfeln, damit Sven den Müll nach unten bringen muss.

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem fairen Würfel eine Fünf oder eine Sechs zu würfeln, beträgt:

$$P(5 \text{ oder } 6) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{(Summenregel)}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E: „Sven hat eine Vier gewürfelt und muss den Müll nach unten bringen“ beträgt:

$$P(E) = P(4) \cdot P(5 \text{ oder } 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}} \quad \text{(Pfadregel)}$$

b) Tabellarische Übersicht aller Ergebnisse, bei denen Sven den Müll nach unten bringen muss:

Sven würfelt	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Tom würfelt	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6

Aus der Tabelle erkennt man, dass es 15 Fälle gibt, in denen Sven den Müll nach unten bringen muss.
Beim zweimaligen Wurf mit einem fairen Würfel gibt es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Ausgänge.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sven den Müll nach unten bringen muss, beträgt also:

$$p = \frac{15}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

c) Die Zufallsgröße X: „Anzahl, wie oft Sven den Müll nach unten trägt“ ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = \frac{5}{12}$.

Der Erwartungswert E(X) bzw. μ beträgt:

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 30 \cdot \frac{5}{12} = \underline{\underline{12{,}5}}$$

d) Die Wahrscheinlichkeit $P(A) = P(X = 12)$ kann mithilfe der Bernoulli-Formel berechnet werden:

$$P(A) = P(X = 12) = \binom{30}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{12} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{18} \approx 0{,}145$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: „Sven trägt genau 12-mal den Müll nach unten“ beträgt ungefähr $\underline{\underline{14{,}5\ \%}}$.