2023

FOS · BOS 13

Abitur-Prüfu[…]
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik Ni[…]

+ *Aufgaben im Stil de[…]*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Musterprüfungen zum Abitur ab 2020

Original-Abituraufgaben

Abiturprüfung 2022 (Nichttechnik) . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Digitales zu diesem Buch

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein **kostenloses Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Buches noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2023 (Nichttechnische Ausbildungsrichtungen) vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultur bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter www.stark-verlag.de/mystark (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der BOS oder ein zusätzliches 13. Schuljahr an der FOS absolviert und werden eine schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik ablegen. Bei der Vorbereitung darauf wird Ihnen dieses Buch eine gute Hilfe sein.

Mit dem Abitur 2020 haben sich die Struktur und die Inhalte der Prüfung geändert. Die Aufgaben bis 2019 eignen sich daher nur bedingt zur Vorbereitung.

- Mit dem Buch erhalten Sie die **offiziellen schriftlichen Abituraufgaben** für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen der letzten Jahre. Teilaufgaben, die nicht mehr prüfungsrelevant sind, wurden entsprechend markiert.
- Um Ihnen einen Eindruck von Form und Inhalt der neuen Abiturprüfung zu geben, enthält das Buch zwei **Musterprüfungen**.
- Ferner finden Sie im Buch einen **Übungsteil**, der Aufgaben zu neuen Lehrplaninhalten sowie besonders kompetenzorientierte Fragestellungen enthält.
- Das **Stichwortverzeichnis** erlaubt Ihnen die gezielte Suche nach bestimmten Begriffen und Inhalten.

Allen prüfungsrelevanten Aufgaben folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die dargestellten Lösungen nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf schriftliche Leistungsnachweise einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Abiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Aufgabe der Beruflichen Oberschule

In der Beruflichen Oberschule sind die Fachoberschule (FOS) und die Berufsoberschule (BOS) zusammengefasst.

Ziel der Berufsoberschule (BOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss und einer Berufsausbildung innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 12 und 13) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Gesundheit (Schulversuch) bzw. Internationale Wirtschaft (Schulversuch) zur fachgebundenen Hochschulreife (nur Englisch als Fremdsprache) oder auch zur allgemeinen Hochschulreife (mit einer zweiten Fremdsprache) zu führen. Die Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule können nach der 12. Jahrgangsstufe an der Fachabiturprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife teilnehmen und mit diesem Abschluss die Schule verlassen. Dies wurde durch eine Abstimmung der Lehrpläne und Stundentafeln für die Fachoberschule (11. und 12. Jahrgangsstufe) und die Berufsoberschule (12. Jahrgangsstufe) ermöglicht.

Ziel der Fachoberschule (FOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 11 und 12) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Gestaltung; Gesundheit (Schulversuch) bzw. Internationale Wirtschaft (Schulversuch) zur Fachhochschulreife zu führen. Im Anschluss daran können Schülerinnen und Schüler, die im Zeugnis der Fachhochschulreife einen bestimmten Notendurchschnitt erreicht haben, die 13. Jahrgangsstufe der Fachoberschule besuchen. Stundentafeln, Lehrpläne, Abiturprüfungen und die möglichen Abschlüsse (fachgebundene bzw. allgemeine Hochschulreife) stimmen mit denen der Berufsoberschule überein.

2.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfungsstruktur ist identisch mit der der Fachabiturprüfung am Ende der 12. Jahrgangsstufe. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1: Die Bearbeitung erfolgt ohne Verwendung von Hilfsmitteln.
  Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2: Die Bearbeitung erfolgt unter Verwendung von Hilfsmitteln (siehe Abschnitt 2.3). Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Zwischen den beiden Prüfungsteilen ist eine Pause von 30 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und G (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. GI und GII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.[1]

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit mit abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

2.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben.
Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben-gruppe	Bewertungs-einheiten
Teil 1	A	22 BE
	G	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	G	23 BE

Die Aufgabenteile zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie werden seit 2020 mit GI und GII bezeichnet (anstatt wie bis 2019 mit B1 und B2).

1 Teil 1 des Musterprüfungssatzes in diesem Buch besteht dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungseinheiten	100 ⋮ 96	95 ⋮ 91	90 ⋮ 86	85 ⋮ 81	80 ⋮ 76	75 ⋮ 71	70 ⋮ 66	65 ⋮ 61	60 ⋮ 56	55 ⋮ 51	50 ⋮ 46	45 ⋮ 41	40 ⋮ 34	33 ⋮ 27	26 ⋮ 20	19 ⋮ 0

2.3 Zugelassene Hilfsmittel

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Nichttechnik für Berufliche Oberschulen. Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.
Die Merkhilfe Mathematik/Nichttechnik ist auf der Webseite des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) zu finden.

3 Arbeit mit diesem Buch

Seit 2020 unterscheidet sich die Abiturprüfung für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen formal und inhaltlich wesentlich von der der Vorjahre.

- Der formale Unterschied besteht darin, dass die Prüfung nunmehr geteilt ist und der erste Teil der Prüfung ohne Verwendung von Hilfsmitteln bearbeitet werden muss.
- In der Analysis sind als neue Inhalte das uneigentliche Integral 2. Art und die partielle Integration bestimmter Funktionen hinzugekommen.
- In der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie sind die Produkte von Vektoren und die damit möglichen Berechnungen von Abständen, Winkeln, Flächen und Volumina neu hinzugekommen. Dafür entfällt das Lerngebiet „Leontief-Modell“.

In der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie ist der Lehrplan identisch mit dem für die 12. Jahrgangsstufe der Ausbildungsrichtung Technik. Auch die Prüfungsaufgaben in diesem Bereich werden identisch sein.

Bei den in diesem Buch abgedruckten **Abiturprüfungen** aus dem Jahr 2019 sind die Lösungen zu den Aufgaben zum Leontief-Modell weggelassen worden. Alle übrigen Aufgaben sind inhaltlich zur Prüfungsvorbereitung gut geeignet, wenngleich sie formal nicht der neuen Prüfung entsprechen und auch nicht den gesamten Prüfungsstoff abdecken.

Im **Übungsteil** finden sich Aufgaben, die zum Teil aus früheren Fachabiturprüfungen der Ausbildungsrichtung Technik und aus früheren Abiturprüfungen der nichttechnischen Ausbildungsrichtungen stammen. Sie beziehen sich schwerpunktmäßig auf die oben angesprochenen neuen Lehrplaninhalte.

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die **Musterprüfungen**, die der Form der Abiturprüfung seit 2020 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und GI bzw. AII und GII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben aber nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

Eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für den hilfsmittelfreien Teil bietet Ihnen das **interaktive Training**, das Sie online mit dem im Ausklapper des Buchs abgedruckten Code aufrufen können.

4 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Abiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik.

Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

In der Analysis werden die Lerninhalte der 12. Jahrgangsstufe (in der FOS auch die der 11. Jahrgangsstufe) als bekannt vorausgesetzt, sie sind daher im Folgenden noch einmal aufgeführt. Das Lerngebiet Stochastik wird nicht geprüft.

Die Aufgabenstellung in der 13. Jahrgangsstufe unterscheidet sich von der der 12. Jahrgangsstufe auch darin, dass die Aufgaben nicht mehr so kleinschrittig untergliedert sind. Bei vielen Teilaufgaben müssen Sie eine komplexere Lösungsstrategie selbst entwickeln.

4.1 Analysis – 12. Jahrgangsstufe

Grundbegriffe bei reellen Funktionen
Grundlagen
- Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph
- Lineare Funktionen und lineare Ungleichungen
- Quadratische Funktionen und quadratische Ungleichungen

Aufgabe 1: Partielle Integration und uneigentliches Integral 1. Art

1.0 Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto (2x-1)\cdot e^{2x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

1.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_f und zeichnen Sie G_f für $-2 \leq x \leq 0{,}75$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.

1.3 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass G_f im Intervall $]-\infty; 0[$ einen Wendepunkt besitzt.

1.4 Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des nach links unbegrenzten Flächenstücks, welches der Graph G_f mit den beiden Koordinatenachsen im 3. Quadranten des Koordinatensystems einschließt.
[Teilergebnis: Stammfunktion $F(x) = (x-1)\cdot e^{2x}$]

TIPP **Lösungshinweise**

Teilaufgabe 1.1

Da nur der Linearfaktor des Funktionsterms null werden kann, kann die Nullstelle direkt abgelesen werden.

Teilaufgabe 1.2

Bilden Sie die 1. Ableitung mit der Produkt- und der Kettenregel.

Die Art des Extrempunktes sollten Sie hier mithilfe des Vorzeichens der 1. Ableitung bestimmen.

Erstellen Sie für die Zeichnung eine Wertetabelle.

Teilaufgabe 1.3

Verwenden Sie für die Begründung Lage und Art des Extrempunktes von G_f sowie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$.

Teilaufgabe 1.4

Multiplizieren Sie die Klammer im Funktionsterm von f(x) aus.

Verwenden Sie zur Bestimmung einer Stammfunktion der Funktion f das Verfahren der partiellen Integration.

Integrieren Sie die Funktion f zunächst von a bis 0 $(a < 0)$ und bilden Sie anschließend den Grenzwert für $a \to -\infty$.

Beachten Sie, dass das beschriebene Flächenstück unterhalb der x-Achse liegt.

Lösungsvorschlag

1.0 $f(x) = (2x-1) \cdot e^{2x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$

1.1 **Nullstellen**

$(2x-1) \cdot \underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

Nullstelle: $N\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, 0\right)$

Verhalten von f(x) für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

$x \to +\infty$: $\underbrace{(2x-1)}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\to +\infty} \to +\infty$

$x \to -\infty$: $\underbrace{(2x-1)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} \to 0$ (e-Funktion überwiegt)

1.2 **Berechnung der 1. Ableitung**

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + (2x-1) \cdot e^{2x} \cdot 2$ (Produkt- und Kettenregel)

$f'(x) = (2 + 4x - 2) \cdot e^{2x}$ (e^{2x} ausklammern)

$f'(x) = 4x \cdot e^{2x}$

Bestimmung der Koordinaten und der Art des Extrempunktes

$f'(x) = 0$

$4x \cdot \underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0$

$x = 0$

1. Weg: Mithilfe des Monotonieverhaltens
Da $e^{2x} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt, wird das Vorzeichen der 1. Ableitungsfunktion allein vom Linearfaktor 4x bestimmt. Dieser ändert sein Vorzeichen an der Stelle $x = 0$ von minus nach plus.

Somit ist f streng monoton fallend für $x < 0$ und streng monoton steigend für $x > 0$.

Mit $f(0) = -1$ ergibt sich der Tiefpunkt TIP$(0 \mid -1)$.

Aufgabenstellung

BE

1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen einen Graphen besitzen, der punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft. Geben Sie für Ihre Entscheidung auch eine kurze Begründung an.

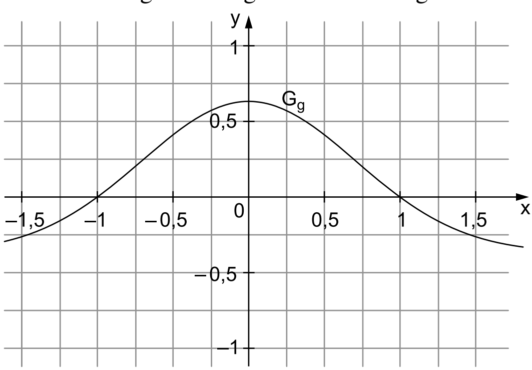
$f_1\colon\ x \mapsto \frac{x^2}{2x^2+1};\quad x \in \mathbb{R}$

$f_2\colon\ x \mapsto \frac{2x^2-1}{x^3+2x};\quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f_3\colon\ x \mapsto \frac{1-x}{x};\quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f_4\colon\ x \mapsto x \cdot e^{1-x^2};\quad x \in \mathbb{R}$ 5

2.0 Gegeben ist die Funktion $g\colon\ x \mapsto -\frac{1}{e} + e^{-x^2}$ mit $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph G_g der Funktion g ist in folgender Grafik abgebildet.



2.1 Ermitteln Sie anhand obiger Abbildung den Wert der maximalen Steigung des Graphen G_g und skizzieren Sie in obige Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion g' ein. 4

2.2 Schätzen Sie anhand obiger Abbildung die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche ab, die der Graph der Funktion g mit der x-Achse einschließt. 1

2.3 Bestimmen Sie rechnerisch die exakte Wertemenge der Funktion g. 4

TIPP Lösungshinweise – Teil 1, Analysis I

Teilaufgabe 1

Achten Sie auf die Exponenten von x.

Verwenden Sie ggf. das Kriterium für Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

Teilaufgabe 2.1

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen der Funktion g in seinem linken Wendepunkt.

Nutzen Sie diese Steigung, um die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen $G_{g'}$ anzugeben.

Untersuchen Sie das Steigungsverhalten des Graphen der Funktion g für $x \to -\infty$.

Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen G_g.

Teilaufgabe 2.2

Schätzen Sie die eingeschlossene Fläche durch „Kästchen-Zählen" ab.

Beachten Sie dabei den Maßstab auf beiden Koordinatenachsen.

Teilaufgabe 2.3

Berechnen Sie die Koordinaten des relativen Hochpunktes.

Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion g für $x \to \pm\infty$.

Treffen Sie eine Aussage für die Wertemenge W und achten Sie dabei auf die richtigen Intervallgrenzen.

Teilaufgabe 3.1

Die vertikale Asymptote kann direkt abgelesen werden.

Die Gleichung der schiefen Asymptote erhält man durch Polynomdivision.

Teilaufgabe 3.2

Zur Bestimmung der Nullstellen muss der Zählerterm nullgesetzt werden.

Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man, wenn man $x = 0$ in den Funktionsterm einsetzt.

Für die Skizze des Graphen sollten zuerst die Asymptoten in das Koordinatensystem eingezeichnet werden.

1 f_1: Der Graph ist **nicht punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, da im Zähler und im Nenner nur gerade Potenzen von x vorkommen (Graph somit symmetrisch zur y-Achse).

TIPP Ein konstanter Summand im Funktionsterm wie hier +1 im Nenner gilt als gerade Potenz von x, weil $1 = 1 \cdot x^0$ gilt.

f_2: Der Graph ist **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, da im Zähler nur gerade und im Nenner nur ungerade Potenzen von x vorkommen.

Alternativ:

$$f_2(-x) = \frac{2(-x)^2 - 1}{(-x)^3 + 2 \cdot (-x)} = \frac{2x^2 - 1}{-x^3 - 2x} = -\frac{2x^2 - 1}{x^3 + 2x} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

f_3: Der Graph ist **nicht punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, da im Zähler gerade und ungerade Potenzen von x vorkommen.

Alternativ:

$$f_3(x) = \frac{1 - x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

Somit ist hier der Graph der Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ um 1 nach unten verschoben worden und es besteht keine Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung (wohl aber zum Punkt $S(0\,|\,-1)$).

f_4: Der Graph ist **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, weil gilt:

$$f_4(-x) = (-x) \cdot e^{1 - (-x)^2} = -x \cdot e^{1 - x^2} = -f_4(x)$$

Alternativ:
Das Produkt einer zum Koordinatenursprung punktsymmetrischen Funktion ($h(x) = x$) und einer zur y-Achse symmetrischen Funktion ($g(x) = e^{1 - x^2}$) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.1 **Wert der maximalen Steigung**
Im Punkt W (linker Wendepunkt des Graphen) hat der Graph der Funktion g seine maximale Steigung. Der Wendepunkt liegt ungefähr bei $W(-0{,}7\,|\,0{,}25)$. Zeichnet man im Punkt W die Tangente an den Graphen G_g und entnimmt dieser den Wert der Steigung mithilfe eines Steigungsdreiecks, so erhält man:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}8}{1} = 0{,}8$$

Bayern ▪ FOS · BOS 13 ▪ Abiturprüfung 2019

Mathematik (Nichttechnik) – Aufgabenngruppe A 1

Aufgabenstellung

		BE
1.0	Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.	
1.1	Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen.	2
1.2	Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an und bestimmen Sie die Koordinaten möglicher gemeinsamer Punkte des Graphen G_f mit seiner Asymptote.	4
1.3	Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$]	7
1.4	Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptote im Bereich $-4 \le x \le 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem.	5
1.5	Zeigen Sie, dass die Funktion $F\colon x \mapsto 0{,}5x - 1{,}5 \cdot \ln(x^2+1)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.	2
1.6	Der Graph der Funktion f, seine Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung der Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts.	4
1.7	Es gilt $\int_{-3}^{3} (0{,}5 - f(x))\,dx = 0$ (Nachweis nicht nötig!). Deuten Sie dieses Ergebnis geometrisch.	2
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion h mit $h(x) = \ln(-x^2 + 2x)$ und der maximalen Definitionsmenge $D_h =]0; 2[$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.	
2.1	Bestimmen Sie die Nullstelle von h. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h an den Rändern der Definitionsmenge.	5
2.2	Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle und bestimmen Sie die Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_h.	5

3.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion L für $0 \leq t \leq 40$ in ein geeignetes Koordinatensystem. 3

3.6 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t \to \infty} L(t)$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang. Tatsächlich ist die Gesamtlänge aller Autobahnen nach 1990 stärker angewachsen, als nach dem Modell zu erwarten gewesen wäre. Nennen Sie einen möglichen Grund hierfür. 4

60

TIPP Lösungshinweise – Aufgabe A 1

Teilaufgabe 1.1

Setzen Sie den Zählerterm gleich null.

Teilaufgabe 1.2

Zur Bestimmung der Gleichung der Asymptote a von G_f können Sie den Funktionsterm $f(x)$ durch Polynomdivision umformen.

Zur Bestimmung möglicher gemeinsamer Punkte von G_f und a setzen Sie $f(x) = a(x)$.

Teilaufgabe 1.3

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit der Quotientenregel.

Teilaufgabe 1.4

Zeichnen Sie zuerst die Asymptote des Graphen G_f ein und erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktionswerte $f(x)$.

Teilaufgabe 1.5

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion F mit der Summen- und der Kettenregel und zeigen Sie so, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Teilaufgabe 1.6

Das beschriebene Flächenstück liegt zwischen dem Graphen G_f und seiner Asymptote a. Daher muss zur Berechnung seiner Flächenmaßzahl ein Integral über die Differenzfunktion $a(x) - f(x)$ angesetzt werden.

Teilaufgabe 1.7

Verwenden Sie die in Teilaufgabe 1.6 berechnete Flächenmaßzahl.

1.0 $f: x \mapsto \dfrac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2+1};\ D_f = \mathbb{R}$

1.1 Nullstellen der Funktion f

$$f(x) = 0$$

$$0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}{2 \cdot 0{,}5} = 3 \pm \sqrt{8}$$

Die Funktion f besitzt somit die beiden Nullstellen
$x_1 = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17$ und $x_2 = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83$.

1.2 Art und Gleichung der Asymptote von G_f

TIPP Eine gebrochen-rationale Funktion, deren Zähler- und Nennergrad übereinstimmen, besitzt eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{z}{n}$, wobei z und n die Leitkoeffizienten von Zählerterm Z(x) und Nennerterm N(x) sind.

Mit $Z(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5$ und $N(x) = x^2 + 1$ gilt für die waagrechte Asymptote a des Graphen G_f:

$$a(x) = \frac{0{,}5}{1}$$

$$a(x) = 0{,}5$$

Alternative: Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5) : (x^2 + 1) = 0{,}5 - \dfrac{3x}{x^2+1} \\ \underline{-(0{,}5x^2 + 0{,}5)} \\ \qquad\quad -3x \end{array}$$

Damit besitzt G_f eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0{,}5$.

TIPP Da die Funktion f den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ besitzt, gibt es keine Definitionslücken und somit keine vertikalen Asymptoten.