Erklärung: Lineares Gleichungssystem und grafische Lösung

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Variablen besteht aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen (z. B. x bzw. y). Um die Zusammengehörigkeit der Gleichungen deutlich zu machen, schreibt man sie untereinander.

Ziel ist es, das LGS zu lösen. Ein Zahlenpaar $(x|y)$ heißt Lösung des LGS, falls das Paar jede Gleichung des Systems erfüllt, und ist somit ein Punkt im kartesischen Koordinatensystem. Für die Lösungsmenge notiert man $\mathbb{L} = \{(x|y)\}$. Es gibt verschiedene rechnerische und zeichnerische Methoden für das Lösen eines LGS.

Eine Methode ist das grafische Lösungsverfahren, indem man die Gleichungen jeweils nach y im Sinne einer linearen Funktion $y = mx + b$ umformt. Anschließend werden mithilfe des Steigungsdreiecks die Geraden gezeichnet. Der gemeinsame Schnittpunkt ist gleichzeitig die Lösung.

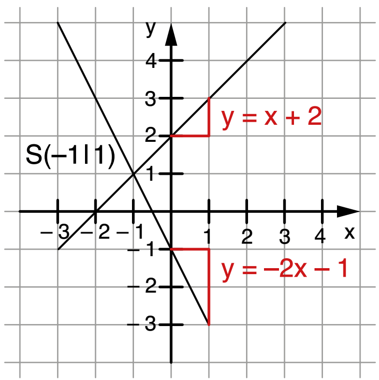
Beispiel:

I: $2x + y = -1$
II: $y = x + 2$

1. I nach y umformen

I: $y = -2x - 1$
II: $y = x + 2$

2. Steigungsdreiecke zeichnen
3. Schnittpunkt $S(x|y)$ ablesen
4. Lösungsmenge notieren: $\mathbb{L} = \{(-1|1)\}$



Lineares Gleichungssystem und grafische Lösung

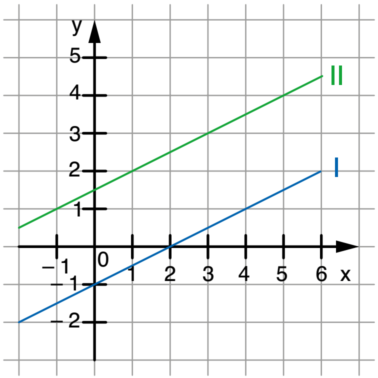
1. Löse die linearen Gleichungssysteme.
Zeichne zuerst ein Koordinatensystem mit einem x-Achsenbereich von –3 bis 3 und einem y-Achsenbereich von –2 bis 6.
Forme die Gleichungen im Vorfeld – falls erforderlich – entsprechend um, zeichne die Geraden ein, lies ihren Schnittpunkt ab und notiere die Lösungsmenge.

a) I: $y = x - 1$
II: $2x + y = 2$

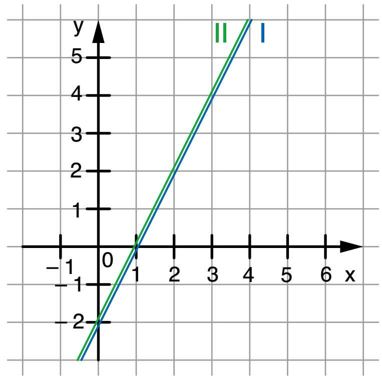
b) I: $-3 + y = 0{,}5x$
II: $y = -1{,}5x + 5$

2. Stelle Vermutungen an, wodurch sich die beiden folgenden LGS voneinander unterscheiden.

linkes LGS:
I: $y = 0{,}5x - 1$
II: $y = 0{,}5x + 1{,}5$



rechtes LGS:
I: $y + 2 = 2x$
II: $y = 2x - 2$



Erklärung: Gleichsetzungsverfahren

Eine weitere Methode zur rechnerischen Lösung eines LGS ist das Gleichsetzungsverfahren.
Dabei werden die Gleichungen nach derselben Variablen (entweder x oder y) aufgelöst. Anschließend werden die Funktionsterme gleichgesetzt und nach der anderen Variablen aufgelöst. Mithilfe der ermittelten Lösung wird die zweite Lösung berechnet. Schließlich wird noch die Lösungsmenge notiert. Zum Beispiel:

1. Gleichungen nach y umformen:

I $\quad y + 2x = 11 \mid -2x \rightarrow y = -2x + 11$

II $\quad x + 2 = y \quad \mid \rightarrow y = x + 2$

I $\quad y = -2x + 11 \leftarrow$ Funktionsterm

II $\quad y = x + 2 \leftarrow$ Funktionsterm

2. Funktionsterme gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} -2x + 11 &= x + 2 && \mid -x \\ -3x + 11 &= 2 && \mid -11 \\ -3x &= -9 && \mid :(-3) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

3. y berechnen: (mit Ausgangsgleichung I)

Tipp: Man sollte immer die Ausgangsgleichung nehmen, um zu sehen, ob richtig gerechnet wurde (siehe Probe).

$$\begin{aligned} y + 2 \cdot 3 &= 11 \\ y + 6 &= 11 \mid -6 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

4. Probe mit Ausgangsgleichung II:

$3 + 2 = 5$

$5 = 5$ (wahre Aussage)

5. Lösungsmenge notieren: $\mathbb{L} = \{(3 \mid 5)\}$

Gleichsetzungsverfahren

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

1. Löse das LGS mit dem Gleichsetzungsverfahren und gib die Lösungsmenge an.

a) I: $y = x + 5$
II: $y = -x - 5$

b) I: $x + 2y = 10$
II $x + y = 8$

c) I: $4y = 12 - 8x$
II: $4x + y = 9$

2. Erkläre den Begriff „leere Menge“.

Lösung: Lineares Gleichungssystem und grafische Lösung

1. **a)** Umformung:

I: $y = x - 1$

II: $y = -2x + 2$

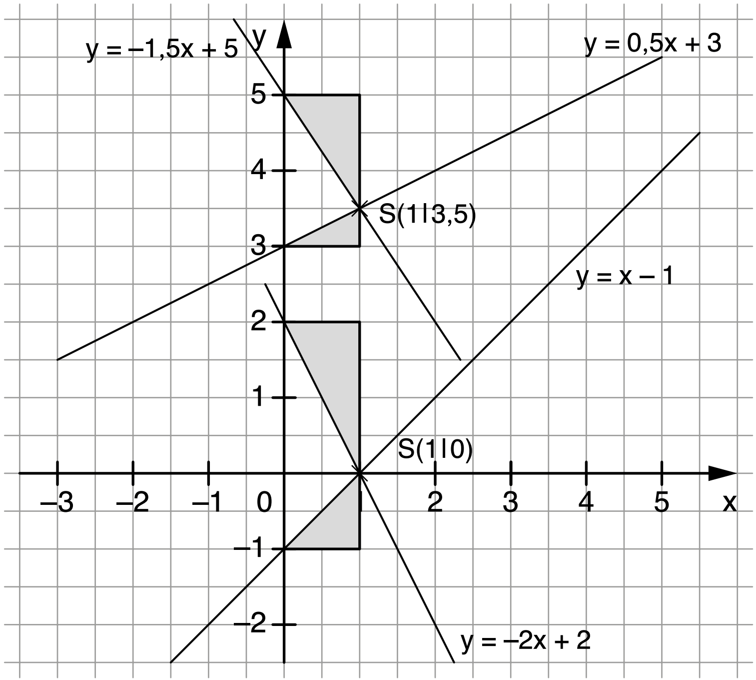
$\mathbb{L} = \{(1 \mid 0)\}$

b) Umformung:

I: $y = 0{,}5x + 3$

II: $y = -1{,}5x + 5$

$\mathbb{L} = \{(1 \mid 3{,}5)\}$



2. linkes LGS: Die Geraden laufen parallel zueinander, da sie dieselbe Steigung haben. Wegen der unterschiedlichen Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse gibt es keinen gemeinsamen Schnittpunkt und folglich auch keine Lösung: $\mathbb{L} = \{\,\}$ („leere Menge“).

rechtes LGS: Die Funktionsgleichungen sind identisch. Die Geraden liegen aufeinander und es gibt unendlich viele Lösungen: $\mathbb{L} = \{(x;y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y = 2x - 2\}$.

Lösung: Gleichsetzungsverfahren

1. **a)**

1. Die Umformung entfällt.
2. Funktionsterme gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} x + 5 &= -x - 5 && \mid + x \\ 2x + 5 &= -5 && \mid -5 \\ 2x &= -10 && \mid :2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

3. y berechnen mit Ausgangsgleichung I:

$y = -5 + 5$
$y = 0$

4. Probe mit Ausgangsgleichung II:

$0 = -(-5) - 5$
→ $0 = 0$ (wahre Aussage)

5. Lösungsmenge notieren:

$\mathbb{L} = \{(-5 \mid 0)\}$

b)

1. Gleichungen nach x umformen:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad x + 2y &= 10 && \mid -2y \\ x &= -2y + 10 \\ \text{II:}\quad x + y &= 8 && \mid -y \\ x &= -y + 8 \end{aligned}$$

2. Funktionsterme gleichsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{aligned} -2y + 10 &= -y + 8 && \mid +2y \\ 10 &= y + 8 && \mid -8 \\ 2 &= y \end{aligned}$$

3. x berechnen mit Ausgangsgleichung II:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 8 && \mid -2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

4. Probe mit Ausgangsgleichung I:

$6 + 2 \cdot 2 = 6 + 4 = 10$
→ $10 = 10$ (wahre Aussage)

5. Lösungsmenge notieren: $\mathbb{L} = \{(6 \mid 2)\}$

c) Umformungen: I: $y = 3 - 2x$ und II: $y = 9 - 4x$; $\mathbb{L} = \{(3 \mid -3)\}$

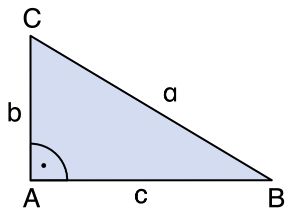
2. Bei einer „leeren Menge“ gibt es keine Lösung des LGS. Aufgrund der gleichen Steigung verlaufen die Geraden parallel zueinander und schneiden sich nicht. Es gibt folglich keinen gemeinsamen Schnittpunkt und die Lösungsmenge ist leer.

Erklärung: Lehrsatz des Pythagoras

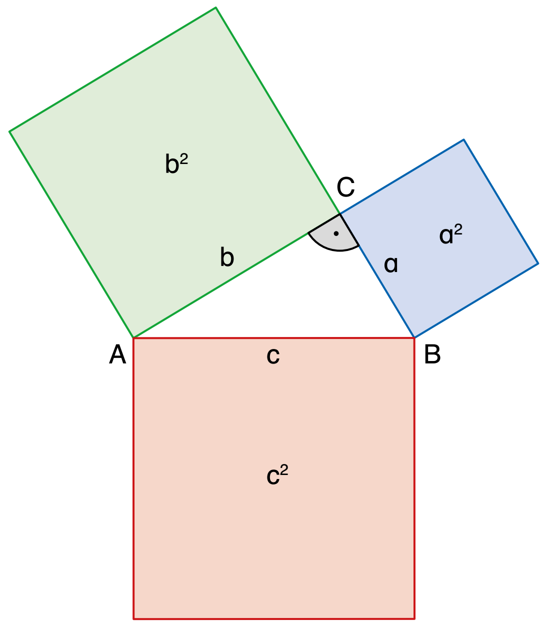
Ein rechtwinkliges Dreieck enthält einen rechten Winkel mit 90°.
Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypotenuse. Sie ist immer die längste Seite im Dreieck. Die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten.

Zeichnet man über jeder Dreiecksseite ein Quadrat ein, so entstehen quadratische Flächen mit verschiedenen Flächeninhalten.

Satz des Pythagoras:
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten:
$a^2 + b^2 = c^2$

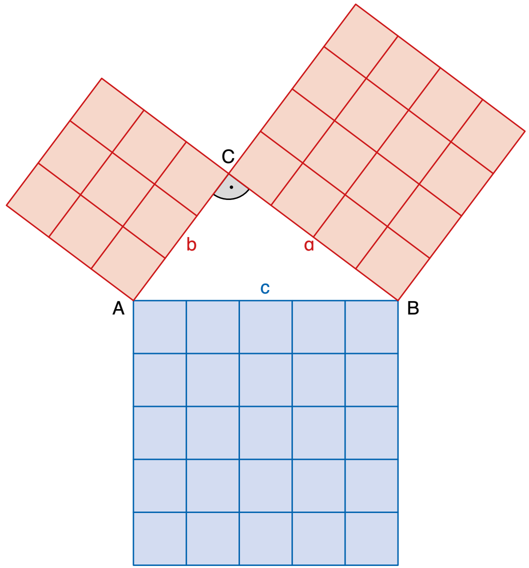


Hinweis: Die Hypotenuse muss nicht immer c heißen. Im Beispiel links gilt: $b^2 + c^2 = a^2$.
Hinter dem Gleichheitszeichen steht das Quadrat der Länge der Hypotenuse.

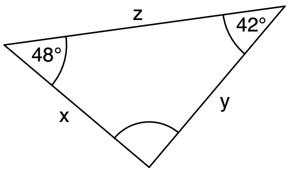


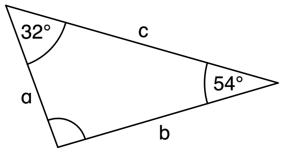
Lehrsatz des Pythagoras

1. Erkläre anhand der Darstellung rechts und mithilfe der Kästchen den Satz des Pythagoras.



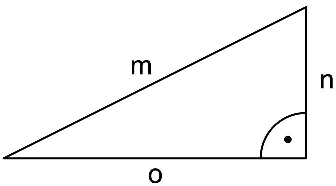
2. Entscheide und begründe, bei welchem der beiden Dreiecke sich der Satz des Pythagoras anwenden lässt.



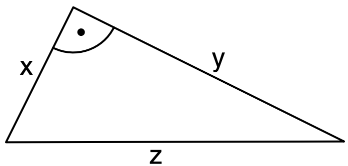


3. Gib für jedes Dreieck den Satz des Pythagoras an.

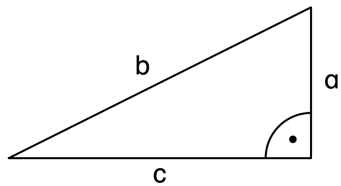
a)



b)



c)



Erklärung: Berechnung der Länge der Hypotenuse

Die beiden Katheten werden meistens a und b genannt. Ihre Längen werden jeweils quadriert und die Potenzen addiert. Aus der Summe wird dann die Wurzel gezogen. Das Ergebnis kann gerundet werden. Gibt es in einem Dreieck keine Seitenbezeichnungen, dann wird die Hypotenuse mit x bezeichnet.

Beispiel:
gegeben: $a = 4$ cm; $b = 3$ cm
gesucht: Länge der Hypotenuse c

Lösung:

$a^2 + b^2 = c^2$

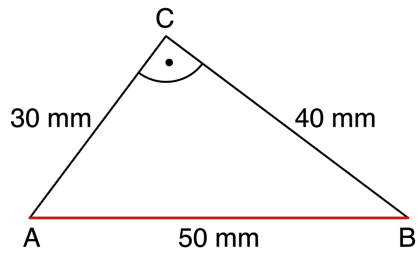
$(4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 = c^2$

$16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2 = c^2$

$25\text{ cm}^2 = c^2 \quad | \sqrt{}$

$5\text{ cm} = c \rightarrow c = 5\text{ cm}$

Skizze:



Beachte: c^2 ist nicht c, deshalb muss am Ende der Berechnung die Wurzel gezogen werden.

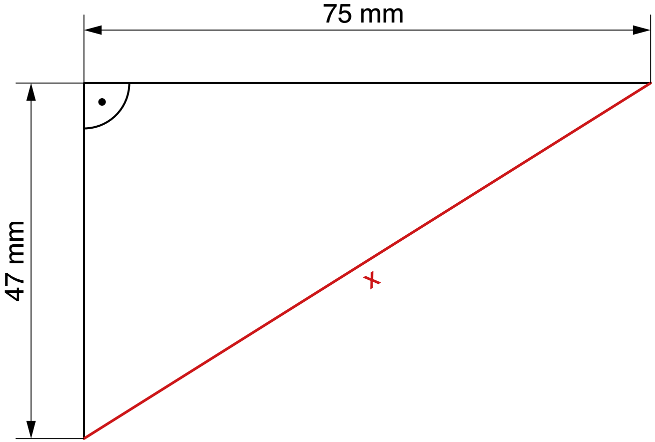
Tipp: Eine Skizze hilft, die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gut zu erkennen und sie geeignet zu benennen.

Berechnung der Länge der Hypotenuse

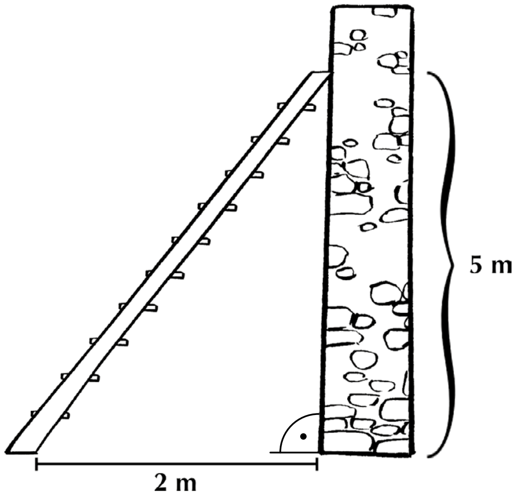
1. Berechne die Länge der Hypotenuse.

a) Katheten: b = 7 cm; a = 5 cm.

b)



2. Berechne die Länge der Leiter.



Lösung: Lehrsatz des Pythagoras

1. Addiert man die neun Kästchen des Quadrates über der Kathete b mit den 16 Kästchen des Quadrates über der Kathete a, so ergibt dies in der Summe die Anzahl der 25 Kästchen des Quadrates über der Hypotenuse c.

2. linkes Dreieck: 180° – 42° – 48° = 90°; rechtes Dreieck: 180° – 54° – 32° = 94°
Nur beim linken Dreieck lässt sich der Satz des Pythagoras anwenden, da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck (90°-Winkel) handelt.

3. **a)** $n^2 + o^2 = m^2$

b) $x^2 + y^2 = z^2$

c) $a^2 + c^2 = b^2$

Lösung: Berechnung der Länge der Hypotenuse

1. **a)**

$$a^2 + b^2 = x^2$$
$$(5\text{ cm})^2 + (7\text{ cm})^2 = x^2$$
$$25\text{ cm}^2 + 49\text{ cm}^2 = x^2$$
$$74\text{ cm}^2 = x^2 \quad | \sqrt{}$$
$$8{,}6\text{ cm} \approx x$$

Die Hypotenuse x ist 8,6 cm lang.

b)

$$(47\text{ mm})^2 + (75\text{ mm})^2 = x^2$$
$$2\,209\text{ mm}^2 + 5\,625\text{ mm}^2 = x^2$$
$$7834\text{ mm}^2 = x^2 \quad | \sqrt{}$$
$$88{,}5\text{ mm} \approx x$$

Die Hypotenuse x ist 88,5 mm lang.

2.

$$(2\text{ m})^2 + (5\text{ m})^2 = x^2$$
$$4\text{ m}^2 + 25\text{ m}^2 = x^2$$
$$29\text{ m}^2 = x^2 \quad | \sqrt{}$$
$$5{,}4\text{ m} \approx x$$

Die Leiter ist 5,4 m lang.