2023

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Schleswig-H

Mathematik

+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

Inhalt

Zentralabitur 2021

Zentralabitur 2022

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

ActiveBook
Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Lösungen der Aufgaben:

Prof. Dr. Hinrich Lorenzen:
2018 bis 2022: Aufgaben 1, 2, 3
Oliver Thomsen:
2018 bis 2022: hilfsmittelfreier Teil, Aufgaben 4, 1 (CAS), 2 (CAS)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch möchten wir Ihnen helfen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2023** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette Aufstellung der für die Prüfung 2023 relevanten Themen, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält alle **in den Jahren 2018 bis 2021 in Schleswig-Holstein zentral gestellten Aufgaben** des Haupttermins der schriftlichen Abiturprüfung. Zudem stehen Ihnen die Aufgaben des Jahres 2022 als PDF zum Download zur Verfügung, sobald sie zur Veröffentlichung freigegeben sind. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Sämtliche Aufgaben enthalten **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz**, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2023 vom Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/mystark

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Prof. Dr. H. Lorenzen Oliver Thomsen

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2023

1 Ablauf der Prüfung

Einführung des Zentralabiturs in Schleswig-Holstein

Zur Sicherung der Vergleichbarkeit und Qualität aller schulischen Abschlüsse hat die Landesregierung Schleswig-Holstein schrittweise zentrale Abschlussprüfungen in Schleswig-Holstein eingeführt.
Seit dem Schuljahr 2010/2011 werden in der Abiturprüfung an den Gymnasien und Gemeinschaftsschulen mit Oberstufe des Landes Schleswig-Holstein für die schriftlichen Prüfungen der Kernfächer Deutsch, Englisch, Französisch, Spanisch, Russisch, Dänisch, Latein und Mathematik zentrale Aufgaben gestellt.

Aufbau der Prüfung

Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:

- Der hilfsmittelfreie Teil mit Kurzformataufgaben enthält auch Aufgaben, die aus einem gemeinsam von den Ländern Bayern, Bremen, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein bzw. vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) in Berlin entwickelten Aufgabenpool entnommen wurden. Dieser Teil ist von allen Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Prüfung zu bearbeiten.
- Der zweite Teil besteht aus komplexeren Aufgabenstellungen. Die Schule erhält dazu zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis und je eine aus den Sachgebieten Analytische Geometrie und Stochastik. Die Abiturprüfungskommission wählt auf Vorschlag der Prüfungslehrkraft im Fach Mathematik eine der beiden Analysisaufgaben aus, die dann von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten ist. Von den beiden Aufgaben der anderen Sachgebiete kann sich jede Schülerin bzw. jeder Schüler selbst eine zur Bearbeitung auswählen.

Durchführung der Prüfung

Der hilfsmittelfreie Teil kann frühestens nach 60 Minuten abgegeben werden. Eine Rückgabe und erneute Bearbeitung dieses Teils ist danach nicht mehr möglich. Nach der Abgabe wird der zweite Aufgabenteil zusammen mit den Hilfsmitteln (siehe unten) ausgehändigt. 90 Minuten nach Prüfungsbeginn wird von allen Schülerinnen und Schülern, die noch nicht abgegeben haben, dieser erste Teil eingesammelt.
Schülerinnen und Schülern, die den ersten Teil vorzeitig abgeben, steht für den zweiten Teil entsprechend mehr Zeit zur Verfügung. Die nicht gewählte Aufgabe des

zweiten Teils (Analytische Geometrie oder Stochastik) wird von den Schülerinnen und Schülern zusammen mit den übrigen Prüfungsunterlagen am Ende der Prüfung abgegeben. Sie haben kenntlich zu machen, welche Aufgabe von ihnen nicht gewählt wurde.

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt 300 Minuten. Bis zur Prüfung im Jahr 2020 wurde zusätzlich eine Einlesezeit von 15 Minuten gewährt.

Zugelassene Hilfsmittel

Als Hilfsmittel ist ein deutsches Wörterbuch grundsätzlich zugelassen. Für den zweiten Teil sind neben der Formelsammlung Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig) zugelassen. Über den Einsatz grafikfähiger Taschenrechner entscheidet das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (MBWK). Der Einsatz solcher Taschenrechner musste dort von der Fachlehrerin/dem Fachlehrer beantragt werden. Die Zulassung kann mit einer veränderten Aufgabenstellung verbunden sein. Ebenfalls mussten die Fachlehrerinnen und Fachlehrer beim MBWK die Genehmigung für den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) beantragen. Als Folge der Genehmigung erhalten ihre/seine Schülerinnen und Schüler im Themenbereich Analysis besondere Aufgaben zur Bearbeitung in der Abiturprüfung.

Korrektur

Die Korrektur der Prüfungsarbeiten erfolgt dezentral: Der Kurslehrer/die Kurslehrerin führt die Erstkorrektur und eine weitere Lehrkraft der Schule die Zweitkorrektur durch. Wie bisher wird das MBWK an einem Teil der Gymnasien und Gemeinschaftsschulen Drittkorrekturen durchführen.

2 Inhalte

Bei der Erstellung der Abituraufgaben gelten für das Zentralabitur 2023 die „Fachanforderungen Mathematik“ sowie zusätzlich die „Regelungen für die Abiturprüfung im Fach Mathematik für das Jahr 2023“. Diese finden Sie auf der Internetseite
za.schleswig-holstein.de
unter den Menü-Punkten „2023“ bzw. „Fachanforderungen“.

Die Aufgaben beziehen sich auf die drei in den Fachanforderungen genannten Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Je nach Aufgabenart und Aufgabenstellung können unterschiedliche Akzente gesetzt werden.

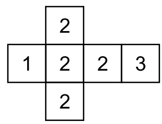
Schleswig-Holstein – Kernfach Mathematik
2020 – hilfsmittelfreier Teil

1 **Stochastik (Pool 1)**
Für ein Zufallsexperiment mit den beiden Ereignissen A und B gilt $P(A) = 0{,}6$ und $P(\overline{B}) = 0{,}3$ sowie $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}2$.

1.1 Erstellen Sie für die beschriebene Situation eine vollständige Vierfeldertafel. 3 P

1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_A(\overline{B})$. 2 P

2 **Stochastik (Pool 1)**
Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



2.1 Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist. 2 P

2.2 Die Zahlen „1“ und „3“ werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls $1:3$. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4.
Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen. 3 P

3 **Analytische Geometrie (Pool 1)**
Gegeben ist eine Kugel K mit
$K\colon (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$.

3.1 Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r der Kugel K sowie die Koordinaten eines Punktes P auf dieser Kugel an. 2 P

3.2 Gegeben sind die Punkte $A(4|4|0)$ und $B(0|8|0)$.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B die Kugel K in genau einem Punkt berührt. 3 P

4 **Analytische Geometrie (Pool 1)**
In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

4.1 Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt. 2 P

4.2 Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten.
Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T. 3 P

5 **Analytische Geometrie (Pool 2)**

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind die Geraden g_a und h_a gegeben durch

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}a\\4\\1\end{pmatrix} \text{ und } h_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2a\\a\\2\end{pmatrix}.$$

Die Geraden g_a und h_a haben den gemeinsamen Punkt $P(1\,|\,1\,|\,1)$.

5.1 Untersuchen Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, für das g_a und h_a sogar identisch sind. 2 P

5.2 Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, sodass g_a und h_a orthogonal zueinander sind. 3 P

6 **Analysis (Pool 1)**

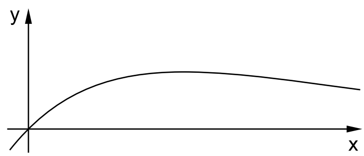
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{8}{3}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Berechnen Sie die lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle $x = -1$. 2 P

6.2 Die Funktion f hat drei Wendestellen. Bestimmen Sie diese Stellen. 3 P

7 **Analysis (Pool 1)**

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0\,|\,0)$, $P(a\,|\,0)$ und $Q(a\,|\,f(a))$ mit $a > 0$.



7.1 Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann. 2 P

7.2 Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert a. 3 P

8 **Analysis (Pool 2)**

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

8.1 Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist. 1 P

8.2 Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben. 4 P

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

Die Vierfeldertafel hat die folgende Form:

	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$			

Sie können mit den gegebenen Werten zwei der äußeren Felder und eines der inneren Felder ausfüllen.

Ergänzen Sie danach zunächst die äußeren Felder.

Teilaufgabe 1.2

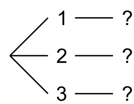
Die zu bestimmende bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet sich als Quotient zweier Wahrscheinlichkeiten aus der Vierfeldertafel.

Es ist: $P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$

Teilaufgabe 2.1

Überlegen Sie, bei welchen Ergebnissen die Summe der Zahlen gleich 4 ist.

Zeichnen Sie ggf. ein reduziertes Baumdiagramm.



Ermitteln Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit über die günstigen Pfade des Baumdiagramms.

Teilaufgabe 2.2

Benennen Sie eine der gesuchten Zahlen z. B. mit x.

Stellen Sie einen Term für den Erwartungswert in Abhängigkeit von x auf.

Untersuchen Sie, für welchen Wert von x dieser Term den Wert 4 annimmt.

Teilaufgabe 3.1

Die allgemeine Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt $M(m_1 | m_2 | m_3)$ und Radius r lautet K: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$.

„Bewegen“ Sie sich gedanklich vom Mittelpunkt M aus um eine Längeneinheit in eine Koordinatenrichtung.

Teilaufgabe 3.2

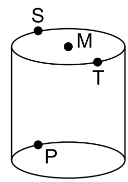
- Stellen Sie eine Gleichung in Parameterform für die Gerade g durch die Punkte A und B auf.
- Zeigen Sie mittels einer Schnittpunktberechnung, dass die Gerade g nur einen gemeinsamen Punkt mit der Kugel K hat.
- Oder: Zeigen Sie, dass der Punkt $A(4|4|0)$, der auf der Geraden g liegt, auch auf der Kugel K liegt und dass g orthogonal zu $\overline{MA}$ ist. Dann ist g nämlich eine Tangente an K mit Berührpunkt A.
- Die Orthogonalität lässt sich mit dem Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{AB}$ nachweisen.

Teilaufgabe 4.1

- P liegt in einer Koordinatenebene.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes N der Grundfläche.
- Zeigen Sie, dass der Punkt P fünf Längeneinheiten von N entfernt ist.

Teilaufgabe 4.2

- Erstellen Sie eine Skizze des Zylinders.
- Tragen Sie die Punkte M, P, S und T in die Skizze ein.
- „Bewegt“ man sich von P aus um 10 Längeneinheiten in die positive x_3-Richtung, so gelangt man zu S.
- Der Ortsvektor $\overrightarrow{OT}$ lässt sich als Summe des Ortsvektors $\overrightarrow{OM}$ bzw. $\overrightarrow{OS}$ und einem weiteren Vektor (siehe Skizze) ermitteln.



Teilaufgabe 5.1

- Da die Geraden einen gemeinsamen Punkt enthalten, reicht es, die Richtungen der Geraden zu betrachten.
- Zwei Geraden sind parallel zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig (kollinear) sind.

Teilaufgabe 5.2

- Zwei sich schneidende Geraden sind orthogonal zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal zueinander sind.
- Die Orthogonalität zweier Vektoren, die jeweils nicht der Nullvektor sind, lässt sich mit deren Skalarprodukt prüfen.
- Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren muss den Wert null haben. Aus dieser Bedingung folgt eine Gleichung mit der Variablen a.
- Lösen Sie diese Gleichung.

Lösung

1.1

	A	$\overline{A}$	
B	0,4	0,3	0,7
$\overline{B}$	0,2	0,1	0,3
	0,6	0,4	1

1.2 $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$

2.1 $2 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{36} + \dfrac{16}{36} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

2.2 $\dfrac{1}{6} \cdot x + \dfrac{4}{6} \cdot 2 + \dfrac{1}{6} \cdot 3x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4}{6} \cdot x = \dfrac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

Die neuen Zahlen sind 4 und 12.

3.1 Mittelpunkt $M(4|4|1)$ und Radius $r = 1$

Beispielsweise liegt der Punkt $P(4|4|2)$ auf der Kugel.

3.2 Die Gerade g mit $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft durch die Punkte A und B. Das Einsetzen der Koordinaten in die Kugelgleichung liefert:

$$(4 - 4s - 4)^2 + (4 + 4s - 4)^2 + (0 - 1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (-4s)^2 + (4s)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 32s^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad s = 0$$

Da die Gleichung genau eine Lösung hat, berührt die Gerade g die Kugel in genau einem Punkt.

4.1 P liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist $N(8|5|0)$.

Wegen $\left|\overrightarrow{NP}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ liegt P auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders.

4.2 $S(5|1|10)$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Punkt T hat die Koordinaten $T(11|9|10)$.