Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR
ERFAHREN

Rheinland-Pfalz

Mathematik

+ Übungsaufgaben

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

www.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter
www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/
finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie werden das Abitur im Fach Mathematik ablegen. Seit 2017 wird ein Aufgabenblock (Analysis) der schriftlichen Abituraufgaben in Mathematik einheitlich für alle Schülerinnen und Schüler in Rheinland-Pfalz zentral vom Ministerium für Bildung gestellt. Die Aufgaben der anderen beiden Blöcke werden weiterhin dezentral erstellt.

Der vorliegende Band soll Ihnen dabei helfen, sich optimal auf die schriftliche Prüfung in Mathematik vorzubereiten. Das einführende Kapitel „**Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung**" informiert Sie über die offiziellen Rahmenvorgaben, macht Sie mit den Arbeitsanweisungen (Operatoren) vertraut und erläutert, wie Sie einzelne Aufgaben und die Abiturprüfung im Allgemeinen am besten angehen.

Die sich anschließenden zahlreichen **Übungsaufgaben** basieren auf den abiturrelevanten Unterrichtsthemen und ermöglichen Ihnen die Wiederholung des Prüfungsstoffs und eine optimale Vorbereitung auf die Abiturprüfung. Im letzten Teil des Buches finden Sie **offizielle, zentral gestellte Abiturprüfungsaufgaben der Jahre 2018 bis 2021** (für WTR und CAS). Zusätzlich stehen Ihnen **Original-Abituraufgaben des Jahres 2022** auf der Plattform **MyStark** zum Download zur Verfügung. Anhand der Original-Prüfungen können Sie sich ein gutes Bild zum Analysisteil Ihrer Abschlussprüfung machen. Außerdem erhalten Sie zusätzliche Hinweise zu den entsprechenden GTR-Versionen.

Zu jedem Aufgabenblock finden Sie einen ausführlichen **Lösungsvorschlag**, mit dem Sie Ihre eigenen Ausarbeitungen vergleichen können. Den Lösungsvorschlägen vorangestellt sind **Lösungshinweise**, die Ihnen bei der Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben helfen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung vom Ministerium für Bildung bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu auf der Plattform MyStark.

Das Autorenteam und der Verlag wünschen Ihnen eine gute Vorbereitungsphase und viel Erfolg in der Abiturprüfung!

5 Allgemeine Tipps rund um die Abiturprüfung

5.1 Vorbereitung

Beginnen Sie frühzeitig und langfristig mit der Vorbereitung! Eine regelmäßige Wiederholung sorgt zudem für eine bessere Festigung des Stoffes als ein kurzfristiges Lernen vor der Prüfung.

- Die beste Vorbereitung ist: im Unterricht aufpassen, mitarbeiten, Hausaufgaben machen.
- Nutzen Sie schon ab der 11. Klasse jeweils die Ferien nicht nur zum nötigen Entspannen, sondern auch, um Zusammenfassungen in Ihren Prüfungsfächern zu schreiben. Dann haben Sie in der Endphase mehr Zeit.
- Fertigen Sie eine Übersicht über den prüfungsrelevanten Stoff an und teilen Sie die Inhalte in sinnvolle Teilbereiche ein. Machen Sie sich einen Zeitplan, bis wann Sie welche Inhalte wiederholt haben möchten.
- Bedenken Sie, dass Sie für Stoff, den Sie nicht so gut können, mehr Zeit benötigen als für Stoff, den Sie schon relativ sicher beherrschen.
- Nutzen Sie auch eine Ich-kann-Liste zur Selbsteinschätzung, um sich immer wieder vor Augen zu führen, was Sie bereits alles können (oder was Sie ggf. noch mal wiederholen sollten). Erstellen Sie dazu eine Tabelle, in denen alle prüfungsrelevanten Punkte aus dem aufgelistet sind, und ordnen Sie jeden Punkt einer der Kategorien „kann ich sicher“, „kann ich relativ sicher“ und „muss ich noch üben“ zu.
- Bilden Sie Lerngruppen mit Mitschülern. Am meisten lernt man, indem man Zusammenhänge und Aufgaben anderen erklärt. Außerdem können die Mitschüler Ihnen Ihre Fragen beantworten.
- Nehmen Sie sich noch einmal alte Kursarbeiten und Hausaufgabenüberprüfungen vor. Die Aufgaben darin entsprechen dem Stil Ihres Fachlehrers und somit dem Stil der (dezentralen) Aufgaben. Lassen Sie sich ggf. auch Kursarbeiten aus den Parallelkursen geben (besonders, wenn diese Kurse die Abiturprüfung gemeinsam schreiben). Das ist – neben dem Aufpassen (siehe oben) – die zweitbeste Vorbereitung.
- Schauen Sie sich Ihre Fehler (sowohl aus alten Kursarbeiten als auch nun bei Übungsaufgaben) genau an. Überlegen Sie sich, warum die Lösung falsch war, und korrigieren Sie die Fehler. Auch aus Fehlern können und sollten Sie lernen!
- Nutzen Sie unbedingt Ihre Unterrichtsaufzeichnungen und Ihr Lehrbuch zur Vorbereitung.
- Bewahren Sie Ihre korrigierten und mit Anmerkungen (was hat Ihnen Schwierigkeiten bereitet, wozu hatten Sie Fragen o. Ä.) versehenen Unterlagen vom Lernen übersichtlich auf. Das erleichtert spätere Wiederholungen.

5.6 Tipps zum Umgang mit dem Buch

- Wie Sie wissen, werden zwei der drei Aufgabenblöcke, die Sie in der Prüfung bearbeiten müssen, von der jeweiligen Fachlehrkraft und somit **nicht zentral** erstellt. Bei der Erstellung wird Ihre Lehrkraft darauf achten, dass diese Aufgaben der gewählten **Schwerpunktsetzung** im Unterricht entsprechen. Folglich kann es sein, dass in den Übungsaufgaben Themengebiete abgedeckt sind, die in Ihrem Unterricht gar nicht oder nur am Rande behandelt wurden. Sollte dies der Fall sein, können Sie selbstverständlich die entsprechenden (Teil-)Aufgaben überspringen.
- In diesem Übungsbuch sind die zentral gestellten Originalprüfungen mit Tipps und Lösungen nur in den Versionen für WTR und CAS komplett abgedruckt. Die **GTR-Versionen** wurden jeweils in Anlehnung an eine der beiden anderen Versionen erstellt, wobei es sich bei den Abweichungen in der Regel nur um wenige Teilaufgaben handelt. Jeweils nach dem Lösungsteil derjenigen Version, auf deren Grundlage die GTR-Version erstellt wurde, sind die abweichenden Teilaufgaben der GTR-Version angegeben und durch Hinweise zur Lösung ergänzt.
- Unabhängig davon, ob Sie eine **G8-** oder eine **G9-Schule** besuchen, sollten Sie auch die Originalprüfungen des jeweils anderen Modells zur Vorbereitung nutzen, da sich die Vorgaben für prüfungsrelevante Themengebiete nicht unterscheiden.
- Da der Zeitfaktor in der Prüfung eine wichtige Rolle spielt, ist es nützlich, die **Prüfungssituation** so gut es geht zu **simulieren**. Suchen Sie sich drei passende Aufgabenblöcke dieses Buches (typisch in der Kombination Analysis – Lineare Algebra/Analytische Geometrie – Stochastik) aus und bearbeiten Sie diese in einem Durchlauf und ohne Rückgriff auf die Musterlösungen in 270 Minuten. Suchen Sie sich dafür einen ruhigen Arbeitsplatz, an dem Sie nicht gestört werden.
- Wenn Sie in einer Aufgabe nicht weiterwissen, nutzen Sie zunächst stets die **Lösungshinweise und Tipps**, die sich zwischen Aufgabenstellung und Lösungsvorschlag befinden und durch graue Kästen gekennzeichnet sind. Erst wenn Sie trotz dieser Hilfestellungen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung einer Aufgabe haben, sollten Sie die Musterlösungen zurate ziehen. Versuchen Sie in diesem Fall, die angebotene Lösung (und insbesondere die Lösungswege) Schritt für Schritt zu verstehen und nachzuvollziehen.

BE

Beim Bau neuer Straßen muss die Entwicklung des gesamten Straßennetzes berücksichtigt werden. Dabei sind vielfältige Aspekte zu beachten und Probleme zu bewältigen. Eine Auswahl hiervon soll im Folgenden näher beleuchtet werden.

Aufgabe 1

Durch die Angaben im Lageplan („Draufsicht“, Abbildung 1, alle Angaben in m) können Straßenverläufe mithilfe von Funktionsgraphen beschrieben werden.

Eine bestehende geradlinige Straße verläuft durch die Punkte $R(0\,|\,0)$ und $S(-50\,|\,0)$.

Im Punkt R soll nun ein Abzweig an diese Straße so angeschlossen werden, dass dieser durch den Punkt $T(200\,|\,100)$ führt (vgl. Abbildung 1).

Es wird vorgeschlagen, den Verlauf dieses Abzweigs durch einen Graphen der Funktionsschar g_t mit $g_t(x) = \frac{t}{200\,000} \cdot x^3 + \frac{5-2t}{2\,000} \cdot x^2$, $x \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ zu beschreiben.

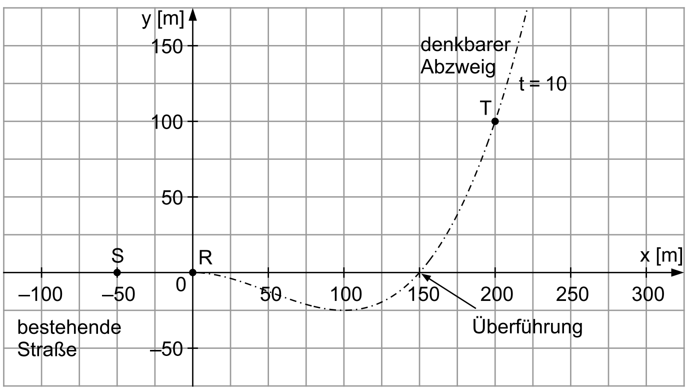


Abb. 1

a) Skizzieren Sie in der Abbildung 1 die Graphen der Funktion g_t für die Parameterwerte $t=0$ und $t=-3$. 2

b) Weisen Sie nach, dass jeder Abzweig durch die Punkte R und T verläuft. 2

c) Zeigen Sie, dass jeder Abzweig im Punkt R „knickfrei“ (vgl. Abbildung 2) an die bestehende Straße anschließt. 3

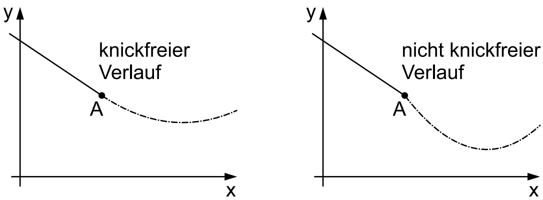


Abb. 2

d) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters t eine „Überführung“ des Abzweiges über die bestehende Straße im Bereich $0 < x < 200$ erforderlich ist (siehe Abbildung 1). 5

e) Bestimmen Sie den Wert des Parameters t so, dass die zweite Ableitung der Funktion g_t an der Stelle $x = 0$ den Wert null hat. 2

Aufgabe 2

Im sog. Höhenplan wird der Längsschnitt der Strecke entworfen.

Die nebenstehende (nicht maßstäbliche) Abbildung 3 zeigt stark vereinfacht das Profil eines Straßenstücks mit Kuppe und Wanne.

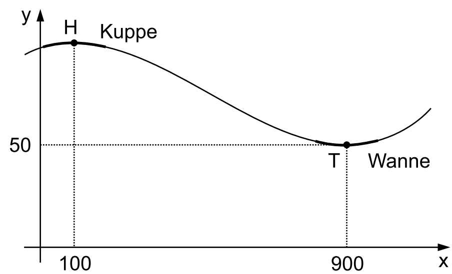


Abb. 3

Im gewählten Koordinatensystem hat der höchste Punkt der Kuppe die Koordinaten $H(100|100)$ und der tiefste Punkt der Wanne die Koordinaten $T(900|50)$.

Der Verlauf der Straße soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion h vom Grad $n = 3$ modelliert werden (x in m, h(x) in m).

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion h.

[*Kontrollergebnis:* $h(x) = \frac{1}{5\,120\,000} \cdot x^3 - \frac{3}{10\,240} \cdot x^2 + \frac{27}{512} \cdot x + \frac{12\,475}{128}$] 5

b) Berechnen Sie das durchschnittliche Gefälle (in %) im Bereich zwischen H und T. 2

c) Berechnen Sie das im Bereich zwischen H und T maximal auftretende Gefälle (in %) und begründen Sie Ihr Vorgehen. 5

TIPP **Lösungshinweise**

Teilaufgabe 1 a

Beachten Sie, dass für $t = 0$ der Term mit x^3 der Funktionsgleichung wegfällt. Was bleibt dann noch? Welchen Grad hat folglich die Funktion g_0?

Sie kennen die allgemeine Form des Graphen von g_0. Sie können einen x-Wert in die Funktionsgleichung einsetzen, z. B. $x = 200$, um den Graphen besser zeichnen zu können.

Insbesondere für den Graphen von g_{-3} ist es hilfreich, sich die Funktionsgleichung zunächst im CAS zu definieren und den Graphen im Grafikfenster zu zeichnen.

Teilaufgabe 1 b

Zeigen Sie, dass die Punkte $R(0\,|\,0)$ und $T(200\,|\,100)$ auf den Graphen aller Funktionen der Funktionsschar g_t liegen.

Setzen Sie in die Funktionsgleichung von g_t die x-Werte der Punkte ein.
Es sollten sich die y-Werte der Punkte ergeben, das Ergebnis darf also nicht abhängig von t sein.

Teilaufgabe 1 c

Die Graphen zweier Funktionen gehen in einem Punkt knickfrei ineinander über, wenn sie in dem Punkt die gleichen Funktionswerte aufweisen und ihre Ableitungsfunktionen ebenfalls die gleichen Funktionswerte aufweisen.

Die bereits bestehende Straße kann mit der Funktion $y = 0$ beschrieben werden. Sie hat also für $x = 0$ den Funktionswert 0, genauso wie ihre Ableitungsfunktion.

Teilaufgabe 1 d

Eine Überführung ist für einen Wert für t genau dann notwendig, wenn die Funktionsgleichung g_t für diesen Parameterwert eine Nullstelle im Bereich $0 < x < 200$ besitzt.

Berechnen Sie zunächst die Nullstellen von g_t in Abhängigkeit von t und ermitteln Sie dann, für welche Werte von t eine der Nullstellen im besagten Bereich liegt.

Teilaufgabe 1 e

Berechnen Sie mithilfe des CAS zunächst die 2. Ableitungsfunktion g_t'' und setzen Sie dann $g_t''(0)$ gleich null.

Teilaufgabe 2 a

Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 ist:
$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d;\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Sie haben vier Unbekannte, Sie brauchen also vier Gleichungen.

Nutzen Sie aus, dass der Graph von h durch die Punkte T und H verläuft. Daraus ergeben sich zwei Gleichungen.

Beachten Sie außerdem, dass es sich bei T und H um Extrempunkte handelt. Da deshalb die Ableitungsfunktion von h an den entsprechenden Stellen den Wert null haben muss, ergeben sich zwei weitere Gleichungen.

Das resultierende lineare Gleichungssystem können Sie mithilfe des CAS lösen.

Teilaufgabe 2 b

Mit „Gefälle“ ist der Betrag einer negativen Steigung gemeint.

In dieser und in der nächsten Teilaufgabe muss also jeweils eine Steigung berechnet werden, die negativ sein sollte. Beim Ergebnis müssen Sie das Minuszeichen weglassen, außerdem muss es in Prozent angegeben werden.

Die durchschnittliche Steigung $\overline{m}$ zwischen zwei Punkten P und Q eines Funktionsgraphen entspricht der Sekantensteigung und wird mit dem passenden Differenzenquotienten berechnet:

$$\overline{m} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Prüfen Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich Plausibilität. Welche Steigung bzw. welches Gefälle ist realistisch? Welche Prozentsätze haben Sie schon auf entsprechenden Verkehrsschildern gesehen?

Teilaufgabe 2 c

Betrachten Sie zunächst den Graphen in der Abbildung 3 und schätzen Sie ab, wo sich das maximale Gefälle ungefähr befinden muss.

Das maximale Gefälle befindet sich beim Wendepunkt.

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist, dass die 2. Ableitungsfunktion h'' an dieser Stelle gleich null ist.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h'' und lösen Sie $h''(x) = 0$.

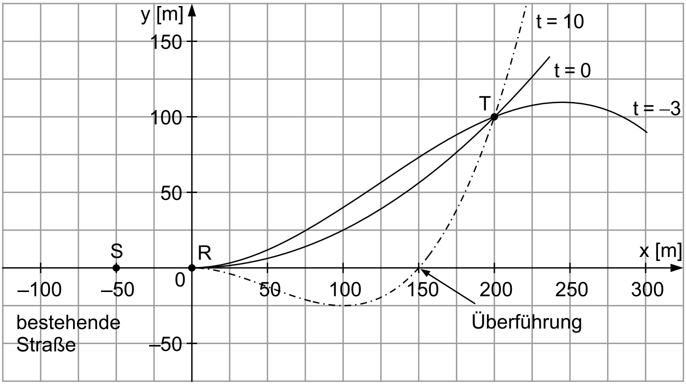
Die 3. Ableitungsfunktion muss nicht unbedingt geprüft werden, da anhand des Graphen ersichtlich ist, dass im Bereich zwischen H und T ein Wendepunkt existiert.

Vergessen Sie nicht, das maximale Gefälle zu berechnen, indem Sie die Wendestelle in h'(x) einsetzen. Geben Sie das Ergebnis wieder in Prozent an!

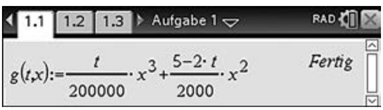
Lösungsvorschlag

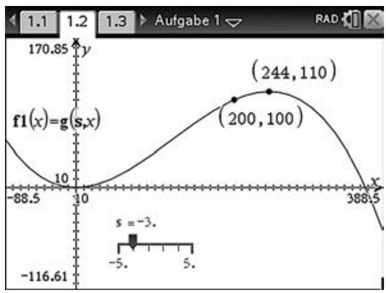
Aufgabe 1

a) Skizze der Graphen von g_t für $t=0$ und $t=-3$:



> **TIPP** Nachdem man die Funktionsschar im CAS definiert hat und den Graphen für $t=-3$ im Grafikfenster gezeichnet hat, kann man sich die Koordinaten besonderer Punkte (z. B. des Hochpunktes) anzeigen lassen (siehe folgende Screenshots).





b) Jeder Abzweig verläuft durch die Punkte R und T, wenn sich diese Punkte für alle $t \in \mathbb{R}$ auf den Graphen von g_t befinden:

$$g_t(0) = \frac{t}{200\,000} \cdot 0^3 + \frac{5-2t}{2\,000} \cdot 0^2 = 0$$

$$g_t(200) = \frac{t}{200\,000} \cdot 200^3 + \frac{5-2t}{2\,000} \cdot 200^2$$
$$= 40 \cdot t + 20 \cdot (5-2t) = 100$$

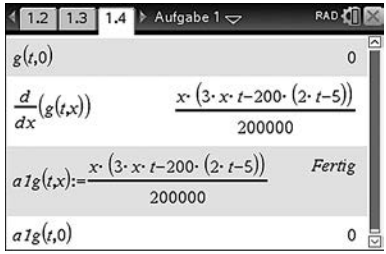
Die Punkte R und T liegen also auf den Graphen von g_t für alle $t \in \mathbb{R}$. Demnach verläuft jeder Abzweig durch R und T.

c) Berechnung des Funktionswertes der Schar g_t und deren Ableitungsfunktion g_t' an der Anschlussstelle $x = 0$:

$$g_t(0) = \frac{t}{200\,000} \cdot 0^3 + \frac{5-2t}{2\,000} \cdot 0^2 = 0$$

$$g_t'(x) = \frac{3 \cdot t}{200\,000} \cdot x^2 + \frac{2 \cdot (5-2t)}{2\,000} \cdot x$$

$$g_t'(0) = \frac{3 \cdot t}{200\,000} \cdot 0^2 + \frac{2 \cdot (5-2t)}{2\,000} \cdot 0 = 0$$

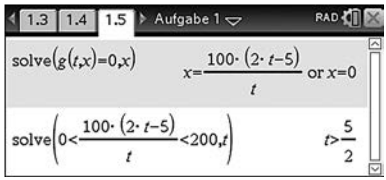


Die bestehende Straße durch R und S liegt auf der x-Achse. Somit schließt jeder Abzweig wegen $g_t'(0) = 0$ und $g_t(0) = 0$ knickfrei an diese Straße an.

d) Eine Überführung im Bereich $0 < x < 200$ ist erforderlich, wenn g_t in diesem Bereich eine Nullstelle hat.
Mit $g_t(x) = 0$ folgt:

$$\frac{t}{200\,000} \cdot x^3 + \frac{5-2t}{2\,000} \cdot x^2 = 0$$

$$x^2 \left(\frac{t}{200\,000} \cdot x + \frac{5-2t}{2\,000} \right) = 0$$



Da der Bereich $0 < x < 200$ betrachtet wird, bleibt:

$$\frac{t}{200\,000} \cdot x + \frac{5-2t}{2\,000} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{500}{t} + 200$$

Mit $x > 0$ folgt:

$$-\frac{500}{t} + 200 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > 2{,}5$$

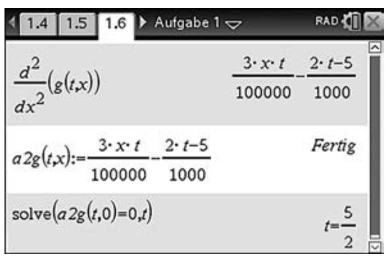
Mit $x < 200$ folgt:

$$-\frac{500}{t} + 200 < 200 \quad \Leftrightarrow \quad t > 0$$

Für $t > 2{,}5$ ist eine Überführung erforderlich.

e) Für die 2. Ableitungsfunktion g_t'' gilt:

$$g_t''(x) = \frac{6 \cdot t}{200\,000} \cdot x + \frac{2 \cdot (5-2t)}{2\,000}$$



Mit $g_t''(0) = 0$ folgt:

$$\frac{2 \cdot (5-2t)}{2\,000} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Aufgabe 2

a) Da die Funktion h eine ganzrationale Funktion vom Grad $n=3$ ist, lautet mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ die Funktionsgleichung von h und der 1. Ableitungsfunktion h' in allgemeiner Form:

$$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$h'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$

Aus dem Hochpunkt $H(100\,|\,100)$ folgt $h(100) = 100$ und $h'(100) = 0$. Man erhält:

I $\quad 100^3 \cdot a + 100^2 \cdot b + 100 \cdot c + d = 100$

II $\quad 3 \cdot 100^2 \cdot a + 2 \cdot 100 \cdot b + c = 0$

Aus dem Tiefpunkt $T(900\,|\,50)$ folgt $h(900) = 50$ und $h'(900) = 0$. Man erhält:

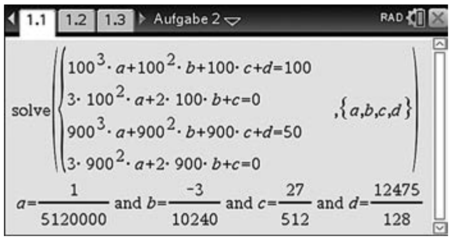
III $\quad 900^3 \cdot a + 900^2 \cdot b + 900 \cdot c + d = 50$

IV $\quad 3 \cdot 900^2 \cdot a + 2 \cdot 900 \cdot b + c = 0$

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems mit dem CAS:

$a = \dfrac{1}{5\,120\,000}$; $b = -\dfrac{3}{10\,240}$;

$c = \dfrac{27}{512}$; $d = \dfrac{12\,475}{128}$



Damit folgt:

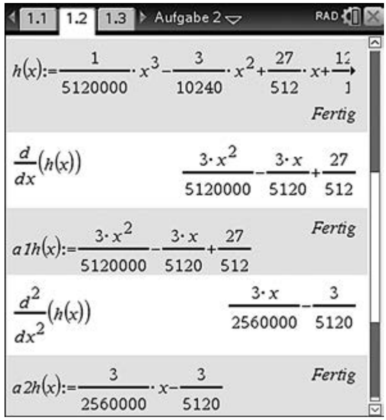
$$h(x) = \frac{1}{5\,120\,000} \cdot x^3 - \frac{3}{10\,240} \cdot x^2 + \frac{27}{512} \cdot x + \frac{12\,475}{128}$$

b) Die durchschnittliche Steigung ergibt sich aus dem Differenzenquotienten:

$$\overline{m} = \frac{y_T - y_H}{x_T - x_H} = \frac{50 - 100}{900 - 100} = -0{,}0625$$

Das durchschnittliche Gefälle beträgt 6,25 %.

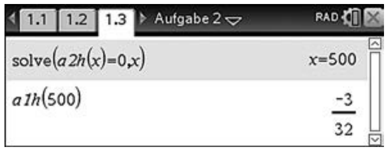
c) Das größte Gefälle im Bereich zwischen H und T muss sich beim Wendepunkt des Graphen von h befinden.



Die Gleichungen der 1. und 2. Ableitungsfunktion lauten:

$$h'(x)=\frac{3}{5\,120\,000}\cdot x^2-\frac{3}{5\,120}\cdot x+\frac{27}{512}$$

$$h''(x)=\frac{3}{2\,560\,000}\cdot x-\frac{3}{5\,120}$$



Mit der notwendigen Bedingung für Wendestellen $h''(x)=0$ ergibt sich:

$$x=\frac{3}{5\,120}\cdot\frac{2\,560\,000}{3}=500$$

Mit Blick auf Abbildung 3 ist klar, dass an dieser Stelle das größte Gefälle herrscht. Mithilfe der 1. Ableitungsfunktion ergibt sich der Wert der Steigung von h an dieser Stelle:

$$h'(500)=-\frac{3}{32}\approx-0{,}094$$

Das maximal auftretende Gefälle zwischen T und H beträgt ca. 9,4 %.

TIPP Für die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle müsste eigentlich zusätzlich die 3. Ableitungsfunktion von h geprüft werden. In der Abbildung 3 ist aber eindeutig zu erkennen, dass sich zwischen H und T eine Wendestelle befindet. Somit muss es sich bei $x=500$ um diese Wendestelle handeln.