2023

# Berufliches Gymnasium

Original-Prüfungsa

MEHR ERFAHREN

Baden-Würt berg

## Mathematik

+ *Merkhilfe*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

# Inhalt



## Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik



## Merkhilfe Mathematik (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg)



## Schriftliche Abiturprüfung 2018

## Schriftliche Abiturprüfung 2019



## Schriftliche Abiturprüfung 2020

## Schriftliche Abiturprüfung 2021

**Schriftliche Abiturprüfung 2022** . . . . . . . . . . . . . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

ActiveBook Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **Interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

**Lösungen der Aufgaben:**

Jens Hatzenbühler (2018 – 2021: Matrizen)
Ulrich Müller (2018 – 2021: Stochastik, Vektorgeometrie)
Jürgen Reister (2018 – 2021: Analysis)

# Vorwort

Die Abiturientinnen und Abiturienten eines Beruflichen Gymnasiums in Baden-Württemberg werden in 5 Fächern geprüft. Die Prüfungsfächer 1 bis 4 sind schriftlich, das 5. Prüfungsfach ist nur mündlich[1] abzulegen. Sie können sich auch dazu entscheiden, in einem der schriftlichen Prüfungsfächer eine zusätzliche mündliche Prüfung abzulegen (z. B. um Ihr schriftliches Ergebnis zu verbessern). Die Art der Prüfungsfächer hängt vom Typ des Beruflichen Gymnasiums sowie von Ihrer Wahl der Prüfungsfächer ab. An allen Gymnasien ist jedoch Mathematik als schriftliches Prüfungsfach zwingend vorgeschrieben.

Das vorliegende Buch soll Ihnen helfen, sich optimal auf die **Abiturprüfung in Mathematik** vorzubereiten. Es wendet sich an Abiturienten und Abiturientinnen der Beruflichen Gymnasien:

- AG: Agrarwissenschaftliches Gymnasium
- BTG: Biotechnologisches Gymnasium
- EG: Ernährungswissenschaftliches Gymnasium
- SGG: Sozial- und gesundheitswissenschaftliches Gymnasium
- TG: Technisches Gymnasium
- WG: Wirtschaftswissenschaftliches Gymnasium

Seit dem Abitur 2017 ist als Hilfsmittel in der Abiturprüfung ein wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR) zugelassen, z. B. Casio FX-87 Plus oder TI-30X Plus MathPrint. Zudem gibt es Aufgaben, die ganz ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind.

Das vorliegende Buch enthält die **Original-Abiturprüfungen 2018 bis 2021**; die **Abiturprüfung 2022** steht Ihnen auf der Plattform MyStark zum Download zur Verfügung. Beachten Sie bei der Arbeit mit diesem Buch insbesondere die „Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik“.

Zu allen Aufgaben finden Sie **ausführliche Lösungen**. Die beste Vorbereitung auf das Abitur wäre, die Aufgaben selbstständig zu lösen. Da das vielleicht nicht in jedem Fall reibungslos klappt, haben wir zu jeder Aufgabe **Hinweise und Tipps** hinzugefügt, die Ihnen den Einstieg in die Aufgabe erleichtern sollen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2023 vom Kultusministerium Baden-Württemberg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen allen viel Erfolg bei Ihrer Prüfungsvorbereitung und Ihrer Abiturprüfung.

*Ihr Autorenteam*

**1** Die sogenannte Präsentationsprüfung findet an den Beruflichen Gymnasien ab Abitur 2009 nur im 5., mündlichen Prüfungsfach statt. Genaueres hierzu weiß der Oberstufenberater.

# Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik

## Ablauf der Prüfung

### Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Im Land Baden-Württemberg finden in allen schriftlich geprüften Fächern zentrale Abiturprüfungen statt. Hierzu beauftragt das Ministerium für Kultus, Jugend und Sport in wechselndem Turnus Fachlehrer*innen mit der Erstellung von Prüfungsaufgaben. Die Aufgaben werden bei der sogenannten Aufgabenauswahlkommission eingereicht, von der sie auf sachliche Richtigkeit, Schwierigkeitsgrad, einwandfreie Formulierung und Übereinstimmung mit dem Lehrplan geprüft und in die endgültige Fassung gebracht werden.

### Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben im Fach Mathematik bestehen aus 4 Teilen nach dem folgenden Schema:

| Teil | Stoffgebiete | Anzahl der Aufgaben | Auswahl durch Schüler*in | max. erreichbare Korrekturpunkte | Zeitrichtlinie in Minuten |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | Analysis, Stochastik, Lineare Algebra[1] (Vektorgeometrie bzw. Matrizen) | 3 | keine | 30 | 90 |
| | *Hinweis:* Zu Beginn der Prüfung werden **alle** Aufgaben ausgeteilt, getrennt nach **Teil 1** und den **Teilen 2, 3 und 4**. Für Teil 1 sind keine Hilfsmittel zugelassen (freie Bearbeitungszeit). Nach Abgabe der Aufgabe und Lösung zu Teil 1 erhält der*die Schüler*in die zugelassenen Hilfsmittel. Teil 1 kann dann nachträglich nicht mehr bearbeitet werden. | | | | |
| **2** | Analysis | 1 | keine | 20 | 60 |
| | Anwendungsorientierte Analysis | 3 | 1 Aufgabe | 10 | 30 |
| **3** | Stochastik | 2 | 1 Aufgabe | 15 | 45 |
| **4** | Lineare Algebra[1] (Vektorgeometrie bzw. Matrizen) | 1 | keine | 15 | 45 |
| | | | **Summe** | **90** | **270** |

**1** Die Auswahl der Aufgabe zum Gebiet „Lineare Algebra“ erfolgt durch den*die Fachlehrer*in (je nach unterrichtetem Wahlgebiet). Für das TG ist Vektorgeometrie verbindlich vorgeschrieben.

In der Prüfung gibt es Aufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden müssen, also ohne Taschenrechner und ohne Merkhilfe. Dieser **Teil 1** besteht aus kurzen, meist nicht zusammenhängenden Aufgaben und dient dazu, grundlegende Fertigkeiten aus den verschiedenen Stoffgebieten zu prüfen. Oft geht es hier auch um das Begründen oder Beschreiben bestimmter Zusammenhänge oder Verfahren.
Die Aufgabenstellungen in den letzten Abiturprüfungen lassen erkennen, dass in den Fachgebieten Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie und Matrizen in diesem Teil vor allem folgende Fähigkeiten und Kompetenzen prüfungsrelevant sind:
Im Bereich **Analysis** geht es vornehmlich um Ableitungen und deren Anwendungen, Integrale einschließlich ihrer Interpretation, Beurteilung von Schaubildern und Eigenschaften von Funktionen, Strategien beim Lösen von Gleichungen. In **Stochastik** werden in erster Linie einfache Zufallsexperimente und Ereignisse, Laplace-Wahrscheinlichkeiten, Baumdiagramme sowie grundlegende Eigenschaften von Zufallsvariablen abgefragt. Bei der **Vektorgeometrie** beinhalten die Aufgaben z. B. Fragen zu Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, Abstandsberechnungen sowie Lösbarkeit von Gleichungssystemen. Im Bereich **Matrizen** geht es vorwiegend um das Rechnen mit Matrizen und Lösen von Matrixgleichungen sowie einfache Übergangsprozesse.

Zu Beginn der Prüfung werden **alle** Aufgaben an die Schüler*innen ausgeteilt, getrennt nach Teil 1 und den Teilen 2, 3 und 4. Für den **Teil 1** sind **keine Hilfsmittel** zugelassen (freie Bearbeitungszeit). Nach Abgabe der Aufgabe und Lösung zu Teil 1 erhält der*die Schüler*in die in den anderen **Teilen 2, 3 und 4 zugelassenen Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**. Teil 1 kann dann nachträglich nicht mehr bearbeitet werden.
In Teil 1 (Lineare Algebra) und Teil 4 erhält der Prüfling nur die Aufgabe aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Matrizen), das im Unterricht durchgenommen wurde.

Die Reihenfolge der Bearbeitung und der Zeitaufwand pro Aufgabe bleiben dem*der Schüler*in überlassen. Die in der obigen Tabelle angegebenen Zeitrichtwerte sind daher nur als Empfehlung zu verstehen. Eine Pause zwischen den Aufgabenteilen findet nicht statt. Zeit zum Einlesen in die Aufgaben bzw. für die Auswahl einer Aufgabe in den Teilen 2 und 3 (wie bei früheren Abiturprüfungen) ist nicht mehr vorgesehen.

An Hilfsmitteln stehen zur Verfügung:
- die Merkhilfe (außer in Teil 1)
- der eingeführte wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) (außer in Teil 1)
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung sowie Schreib- und Zeichengeräte

## Arbeit mit diesem Buch

Zur Orientierung für die Struktur und die konkreten Inhalte der Abiturprüfung dienen die **Abituraufgaben der letzten Jahre**. Mit diesen Aufgaben können Sie sich exakt auf die Prüfungssituation vorbereiten.

Falls Sie bei einer Aufgabe nicht gleich eine Idee zur Lösung haben, helfen Ihnen die **Hinweise und Tipps**, einen Einstieg in die Aufgabe zu finden. Ihre erarbeitete Lösung können Sie mit den abgedruckten **ausführlichen Lösungsvorschlägen** vergleichen.

Üben Sie außerdem die Verwendung der Merkhilfe bei der Lösung der Aufgaben in den Teilen 2, 3 und 4; Sie finden die Merkhilfe im Anschluss an diese Seiten oder auf den Seiten des Landesbildungsservers Baden-Württemberg (http://www.schule-bw.de).

Die folgende Auflistung gibt einen groben Überblick über die Inhalte des gültigen Lehrplans; für detaillierte Auskünfte steht der ausführliche Lehrplan zur Verfügung[2]. Sie finden diesen auch auf den Seiten des Landesinstituts für Schulentwicklung (http://www.ls-bw.de).

**2** Kultus und Unterricht, Lehrplanheft 2/2014, Reihe I Nr. 37, 29. 07. 2014

**Berufliche Gymnasien Baden-Württemberg: Mathematik**
**Abiturprüfung 2021 – Teil 1 (ohne Hilfsmittel)**

## Aufgabe 1: Analysis (Pflichtaufgabe)

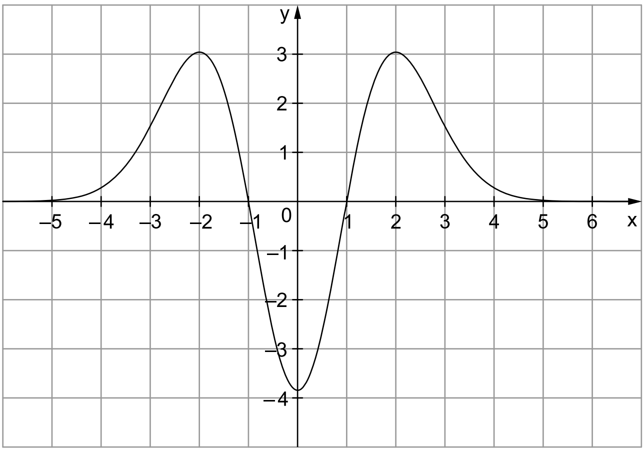
Punkte

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist $K_f$.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie $K_f$ ohne weitere Rechnung. 4

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem $K_f$ die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. 2

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion s.




Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0. 5

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d.

Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D. 4

15

## Aufgabe 2: Stochastik (Pflichtaufgabe)

Punkte

**Vorschlag 1***

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an. 2

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinanderfolgen. 2

2.2 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert.

Die Mannschaft gewinnt das erste Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit p.
Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dann das zweite Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{2}$p.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.

Begründen Sie, dass durch Lösen der Gleichung

$$1-(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)=\frac{4}{9}$$

die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann. 4

8

**Vorschlag 2**

2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.

Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.

B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.

C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau. 5

2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit, zwei grüne Kugeln zu ziehen, genau 50 % ist.

Ermitteln Sie eine Gleichung, mit der x berechnet werden kann. 3

8

*Anmerkung der Redaktion: Aufgrund der Corona-Pandemie gab es in der Prüfung 2021 in den Teilen 1 und 4 jeweils zwei Aufgabenvorschläge für die Bereiche Stochastik und Lineare Algebra (Vektorgeometrie bzw. Matrizen), um eine Vorauswahl durch die Lehrkraft je nach Behandlung im Unterricht zu ermöglichen.

## Hinweise und Tipps

1.1.1 **Tipps:**

- Zerlegen Sie den Funktionsterm in Faktoren.
- Lesen Sie daraus die Nullstellen ab.
- Was bedeutet eine doppelte Nullstelle für den Verlauf des Schaubilds?
- Welche Möglichkeiten des Verlaufs gibt es für das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$?

1.1.2 **Tipps:**

- Für die Steigung benötigen Sie die Ableitung.
- Setzen Sie f'(x) gleich $\frac{3}{2}$ und lösen Sie die Gleichung nach x auf.

1.2 **Tipps:**

- (1) Aus welcher Ableitung liest man die Krümmung einer Kurve ab?
  Lesen Sie aus dem Schaubild die Krümmung bei $x = 4$ ab.
- (2) Lesen Sie die Steigungen des Schaubilds von s im Bereich $0 < x < 2$ ab.
  Unterscheiden Sie dabei die Bereiche $0 < x < 1$ und $1 < x < 2$.
  Für welchen x-Wert ist die Steigung am größten, hat also ein Maximum?
- (3) Betrachten Sie für die Untersuchung des Integrals die Bereiche $0 < x < 1$ und $1 < x < 4$.

1.3 **Tipps:**

- (1) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Funktionen D und d?
  Welche y-Werte nimmt die Funktion $d = D'$ für alle positiven x-Werte an?
- (2) Mit welcher Ableitung bestimmt man Wendestellen?
  Betrachten Sie D'', also d', und bestimmen Sie daraus die positiven einfachen Nullstellen von D''.

## 2 **Vorschlag 1**

2.1.1 **Tipps:**

- Die angegebene Wahrscheinlichkeit ist eine Bernoulli-Kette, die auch in der Form $P(A) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$ geschrieben werden kann.
- Vergleicht man dies mit der allgemeinen Form einer Bernoulli-Kette, so lässt sich mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ die Anzahl n der Durchführungen (Spiele) und die Anzahl k der Treffer (gewonnene Spiele) ablesen. Von wie vielen durchgeführten Spielen n gewinnt die Fußballmannschaft genau k?

2.1.2 **Tipps:**

- Sie können sich zunächst überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass die Fußballmannschaft bei vier Spielen zwei aufeinanderfolgende gewinnt.
- Da die Wahrscheinlichkeit, ein Fußballspiel zu gewinnen bzw. nicht, unabhängig vom Ausgang der anderen Spiele ist, gewinnt die Mannschaft ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und gewinnt es nicht mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- Wie oft enthält somit das Produkt zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit den Faktor $\frac{2}{3}$, wie oft den Faktor $\frac{1}{3}$? Multiplizieren Sie dann die so erhaltene Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Möglichkeiten.

## Lösungen

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2;\; x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist $K_f$.

1.1.1 **Nullstellen**

Bedingung für Nullstellen: $f(x) = 0$

Also $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0$

$$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = 0 \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

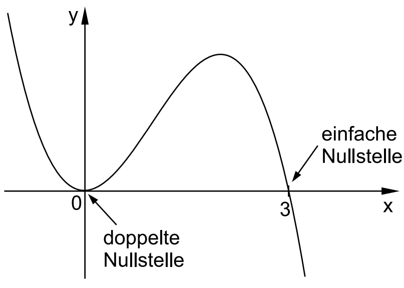
$$-\frac{1}{2}x = -\frac{3}{2} \quad \Big| \cdot (-2)$$

$$x_3 = 3$$

Nullstellen: $x_{1/2} = 0;\quad x_3 = 3$

**Skizze**

Gesucht ist eine Skizze ohne weitere Rechnung.
f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Das Schaubild verläuft entweder von links unten nach rechts oben oder von links oben nach rechts unten.
Wegen des Minuszeichens vor $x^3$ gehen für $x \to \infty$ die y-Werte gegen $-\infty$, das Schaubild also nach unten.
$x_{1/2} = 0$ ist eine doppelte Nullstelle, dort liegt dann ein Extrempunkt vor, $x_3 = 3$ ist eine einfache Nullstelle, die Kurve schneidet die x-Achse.




1.1.2 **x-Koordinate des Punktes, in dem $K_f$ die Steigung $\frac{3}{2}$ hat**

Für die Steigung benötigt man die Ableitung von f.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

Die Steigung soll $\frac{3}{2}$ sein, also:

$$-\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2} \qquad \Big| \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x^2 - 2x = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x_{1/2} = 1$$

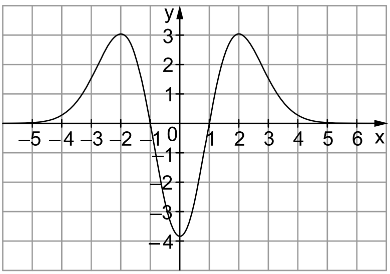
Die gesuchte x-Koordinate heißt $x = 1$.

y-Wert (nicht gefragt!):

$$f(1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

## 1.2 Bewertung von Aussagen

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion s:

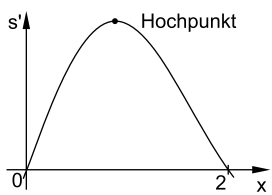



(1) $s''(4) < 0$

Die 2. Ableitung macht eine Aussage über die Krümmung einer Kurve.
Bei negativer 2. Ableitung ist eine Kurve rechtsgekrümmt, bei positiver 2. Ableitung ist eine Kurve linksgekrümmt.
Laut Schaubild ist die Kurve in einer Umgebung von $x = 4$ linksgekrümmt, also ist die Aussage falsch.

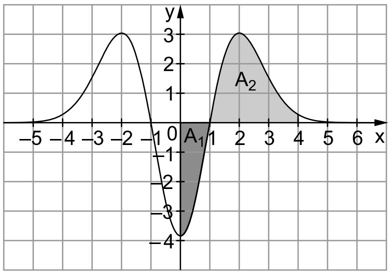
(2) Hochpunkt der Ableitungsfunktion s' zwischen $x = 0$ und $x = 2$

Die Steigung der gegebenen Funktion ist für den Bereich $0 < x < 2$ positiv, wird von $x = 0$ bis etwa $x = 1$ immer größer, danach nimmt sie wieder ab bis zu 0 bei $x = 2$.
Damit liegt ein Hochpunkt von s' in diesem Bereich, die Aussage ist also richtig.




*Alternative Formulierung:*
Das Schaubild von s hat bei etwa $x = 1$ einen Wendepunkt, es geht dort von einer Links- in eine Rechtskurve über.
$\Rightarrow$ Beim Wendepunkt ist die Steigung am größten, das Schaubild der Ableitungsfunktion s' hat also dort einen Hochpunkt.

(3) $\int_0^4 s(x)\,dx > 0$




Da $A_2 > A_1$ gilt, folgt: $\int_0^4 s(x)\,dx = A_2 - A_1 > 0$

Die Aussage ist also richtig.

1.3 **Nachweis zweier Behauptungen**

Gegeben ist die Funktion d durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2;\ x > 0.$

D ist eine Stammfunktion von d.

(1) Zu zeigen ist, dass die Funktion D für $x > 0$ monoton wachsend ist.

Da D eine Stammfunktion von d ist, gilt:

$D'(x) = d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$

Für alle positiven x-Werte ist $d(x) > 0$, weil jeweils wegen des Quadrats zwei positive Zahlen addiert werden.
Die Ableitung von D und damit die Steigungswerte von D sind positiv, d. h., D ist monoton wachsend.

(2) Zu zeigen ist, dass die Stelle $x = 1$ die einzige Wendestelle von D ist.

Eine Wendestelle berechnet man mit der 2. Ableitung.

$D'(x) = d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2 = x^{-2} + x^2$

$D''(x) = d'(x) = -2x^{-3} + 2x = -\frac{2}{x^3} + 2x = \frac{-2 + 2x^4}{x^3}$

$= 2 \cdot \frac{x^4 - 1}{x^3} = 2 \cdot \frac{(x^2+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{x^3}$

Die einzige positive Lösung der Gleichung $D''(x) = 0$ heißt $x = 1$. Sie ist eine einfache Nullstelle von D", somit liegt dort ein Vorzeichenwechsel vor.
Also ist $x = 1$ die einzige Wendestelle von D für $x > 0$.

## 2 Vorschlag 1

### 2.1.1 Formulierung des Ereignisses A im Sachzusammenhang

Die Fußballmannschaft gewinnt ein Fußballspiel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und gewinnt es nicht mit der Wahrscheinlichkeit $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Die angegebene Wahrscheinlichkeit ist eine Bernoulli-Kette, die auch in der Form $P(A)=\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1$ geschrieben werden kann.

Vergleicht man diese Wahrscheinlichkeit mit der allgemeinen Form einer Bernoulli-Kette $\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, so lässt sich mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p=\frac{2}{3}$ die Anzahl n der Durchführungen (= Spiele) und die Anzahl k der Treffer (= gewonnene Spiele) daraus ablesen. Von $n=10$ durchgeführten Spielen gewinnt die Fußballmannschaft genau $k=9$ Spiele.

Die gesuchte Formulierung im Sachzusammenhang für das Ereignis A lautet daher:

A: Die Fußballmannschaft gewinnt genau 9 von 10 durchgeführten Spielen.

### 2.1.2 Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinanderfolgen

Unabhängig vom Ausgang der anderen drei Spiele gewinnt die Fußballmannschaft ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und gewinnt es nicht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

Betrachtet wird das Ereignis

B: Die Mannschaft gewinnt von vier Spielen genau zwei und diese folgen aufeinander.

Bezeichnet g ein gewonnenes Spiel und $\overline{g}$ ein nicht gewonnenes Spiel der Mannschaft, so tritt das Ereignis B genau dann ein, wenn die vier Spiele wie folgt ausgehen:

$gg\overline{g}\overline{g}$ oder $\overline{g}gg\overline{g}$ oder $\overline{g}\overline{g}gg$

Mit $P(g)=\frac{2}{3}$ und $P(\overline{g})=\frac{1}{3}$ enthält die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Fälle zweimal den Faktor $\frac{2}{3}$ und zweimal den Faktor $\frac{1}{3}$:

$$P(gg\overline{g}\overline{g})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \qquad P(\overline{g}gg\overline{g})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \qquad P(\overline{g}\overline{g}gg)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

Da bei der Multiplikation das Kommutativgesetz gilt, ergibt sich:

$$P(gg\overline{g}\overline{g})=P(\overline{g}gg\overline{g})=P(\overline{g}\overline{g}gg)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

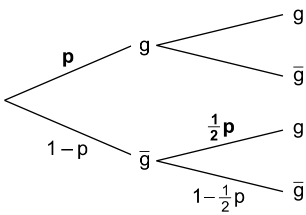
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(B)=P(gg\overline{g}\overline{g})+P(\overline{g}gg\overline{g})+P(\overline{g}\overline{g}gg)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=3\cdot\frac{4}{81}=\frac{4}{27}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei gewinnt und diese aufeinanderfolgen, beträgt $\frac{4}{27}$.

**2.2 Begründung für die Bedeutung der Lösung einer Gleichung**

Die zwei nacheinander stattfindenden Spiele der anderen Mannschaft können als zweistufiges Zufallsexperiment aufgefasst werden. In der Aufgabenstellung sind einige (nicht alle) Wahrscheinlichkeiten dieses Zufallsexperiments angegeben. Das erste Spiel gewinnt diese Mannschaft mit einer Wahrscheinlichkeit p und gewinnt es folglich nicht mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$. Gewinnt die Mannschaft das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dann das zweite Spiel zu gewinnen, nur noch halb so groß, nämlich $\frac{1}{2}p$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach nicht gewonnenem ersten Spiel das zweite Spiel auch nicht gewinnt, ist folglich $1-\frac{1}{2}p$. Überträgt man nun die gegebenen (fett gedruckt dargestellt) und die hieraus erschließbaren Wahrscheinlichkeiten in ein Baumdiagramm, kann die beschriebene Situation wie folgt dargestellt werden:




(Die Wahrscheinlichkeiten, das zweite Spiel zu gewinnen bzw. nicht zu gewinnen, falls das erste Spiel gewonnen wurde, sind in der Aufgabenstellung nicht gegeben.)

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt laut Aufgabentext $\frac{4}{9}$. Aus der angegebenen Gleichung lässt sich daher folgern, dass sich mit dem Term $1-(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls berechnen lassen muss. Für die gesuchte Begründung muss somit dargelegt werden, dass gilt:

$$P(\text{die Mannschaft gewinnt mindestens eines der beiden Spiele}) = 1-(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)$$

Definiert man das Ereignis

G: Die Mannschaft gewinnt mindestens eines der beiden Spiele.

so lautet das Gegenereignis $\overline{G}$ zu G:

$\overline{G}$: Die Mannschaft gewinnt keines der beiden Spiele.

Das Ereignis $\overline{G}$ tritt genau dann ein, wenn das Ergebnis $\overline{g}\,\overline{g}$ eintritt. Aus dem Baumdiagramm lässt sich mithilfe der Pfadmultiplikationsregel die Wahrscheinlichkeit ablesen, dass die Mannschaft beide Spiele nicht gewinnt:

$$P(\overline{G}) = P(\overline{g}\,\overline{g}) = (1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)$$

Da für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis $P(G)=1-P(\overline{G})$ gilt, ergibt sich die angegebene Gleichung:

$$P(G) = 1-(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)=\frac{4}{9}$$