2023

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunge

MEHR
ERFAHREN

Hamburg

Mathematik

+ Online-Glossar

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhalt

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Original-Abituraufgaben

Abiturprüfung 2019

Abiturprüfung 2020

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

ActiveBook
Interaktives
Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf MyStark Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autor der Lösungen:

Dr. Jürgen Leitz

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit dem vorliegenden Buch geben wir Ihnen eine **optimale** Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung** in **Hamburg**.

- Im ersten Teil des Buches erhalten Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, die für eine gezielte Vorbereitung auf die Abiturprüfung hilfreich und wichtig sind. Hierzu gehören die komplette Auflistung der Schwerpunktthemen für das **Abitur**, die **Hinweise zum Prüfungsablauf** sowie alles Wissenswerte zum Aufbau und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Weiter geben wir Ihnen eine Vielzahl **praktischer Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als auch während der Prüfung (Klausuren) ermöglichen, gestellte Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Sie finden in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2019 bis 2021**. Die **Original-Abituraufgaben 2022** stehen Ihnen auf der **Plattform MyStark** zum Download zur Verfügung. Somit können Sie sich ein Bild davon machen, welche Anforderungen an die Abiturprüfung in den vergangenen Jahren gestellt wurden.
- Zu allen Aufgaben finden Sie vollständige und schülergerechte **Lösungsvorschläge**. Zusätzlich werden in den **Hinweisen und Tipps**, die zwischen Aufgabe und Lösung stehen, die Lösungsansätze dargestellt, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Hier können Sie nachlesen, wenn Sie nicht wissen, wie Sie mit der Lösung einer Aufgabe anfangen sollen. Die Hinweise und Tipps sind hierarchisch nach aufsteigender **Hilfestellung** sortiert, sodass Sie nach dem Lesen des ersten Tipps nochmals nachdenken sollten, ob Sie jetzt die Lösung schaffen. Erst dann lesen Sie den zweiten Hinweis, der den Lösungsansatz genauer beschreibt.
- Damit Sie in diesem Buch passende Aufgaben zum Üben heraussuchen können, z. B. für die Vorbereitung auf eine anstehende Klausur, finden Sie gleich am Anfang ein **Stichwortverzeichnis**.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung auf das Abitur und bei Ihrer Prüfung, nicht nur im Fach Mathematik!

Dr. Jürgen Leitz und Stark Verlag

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

Zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung bildet den Abschluss der zweijährigen Studienstufe, die in Hamburg als Profiloberstufe ausgestaltet ist. An allen allgemeinbildenden und den berufsbildenden Gymnasien sowie an den Stadtteilschulen in Hamburg wird das Abitur mit zentraler Aufgabenstellung durchgeführt. Die Abituraufgaben werden in der Hamburger Behörde für Schule und Bildung entwickelt.
Das Abitur kann in Mathematik auf dem grundlegenden oder dem erhöhten Anforderungsniveau abgelegt werden. Ob das Anforderungsniveau in Mathematik grundlegend oder erhöht ist, wurde vor dem Eintritt in die Profiloberstufe verbindlich festgelegt, die Prüfung muss in dem gewählten Niveau abgelegt werden.
Den ersten von vier Aufgabenblöcken bildet der **hilfsmittelfreie Teil**. Im Rahmen dieses Aufgabenblocks müssen **mehrere kleinere** Aufgaben, die die Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie bzw. Lineare Algebra und Stochastik umfassen, bearbeitet werden. Die Bearbeitung dieses Teils muss – wie der Name schon andeutet – ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner und Formelsammlung erfolgen.

Die prüfungsrelevanten Inhalte der Studienstufe

Modul 1 (Von der Änderungsrate zum Bestand)

Funktionen und Änderungsraten

- zu Anwendungskontexten mit funktionalen Zusammenhängen mathematische Modelle erstellen und Funktionsgraphen darstellen
- Veränderungen der Graphen von Funktionen bei Variation von Parametern untersuchen und diese Veränderungen beschreiben
- lineare Gleichungssysteme aufstellen und lösen zur Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen
- Funktionswerte aus Argumenten bestimmen und umgekehrt, auch durch Lösen von Gleichungen, und die Ergebnisse im Anwendungskontext interpretieren
- geeignetes Verfahren auswählen und anwenden zur Lösung von linearen, quadratischen und biquadratischen Gleichungen sowie einfachen Bruch- und Wurzelgleichungen
- Sekanten- und Tangentensteigung an Funktionsgraphen bestimmen sowie die Annäherung der mittleren an die lokale Änderungsrate beschreiben
- lokale Änderungsraten berechnen und im Anwendungskontext interpretieren
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und im Anwendungskontext interpretieren
- Ableitungsgraphen aus Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt

- Funktionen mithilfe von Faktor-, Potenz-, Summen- und Kettenregel ableiten
- Ableitungen als notwendige und hinreichende Bedingungen zur Bestimmung von Monotonie, Krümmungsverhalten sowie lokalen Extrem- und Wendepunkten von Funktionen anwenden und im Anwendungskontext interpretieren
- funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen mit abschnittsweise definierten Funktionen modellieren und die Übergänge auf Sprung- und Knickfreiheit untersuchen
- Passung und Grenzen gewählter mathematischer Modelle in den jeweiligen Anwendungskontexten überprüfen und Modelle zielgerichtet modifizieren
- das Verhalten von Funktionen im Unendlichen beschreiben und ggf. senkrechte und waagerechte Asymptoten bestimmen
- erkennbare Symmetrie (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung) für Argumentationen und zur Vereinfachung von Berechnungen nutzen
- einen Plan zur Lösung von Optimierungsproblemen entwickeln und umsetzen, den Lösungsweg argumentativ darstellen und das Vorgehen reflektieren

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- Randextrema bestimmen
- Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von Funktionsscharen bestimmen in Abhängigkeit von Parametern und unter Berücksichtigung von Fallunterscheidungen
- Funktionsscharen bei der Lösung von Problemen anwenden

Bestandsänderungen

- Bestandsänderungen in Anwendungskontexten als Fläche unter Funktionsgraphen beschreiben und die Flächen als Bestandsveränderungen interpretieren
- Inhalte von Flächen unter Funktionsgraphen näherungsweise durch Berechnung von Ober- und Untersummen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation, CAS) bestimmen und deren gegenseitige Annäherung bei steigender Anzahl von Teilintervallen beschreiben
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung begründen und geometrisch veranschaulichen
- den Zusammenhang von Integral und Ableitung nutzen, auch in Anwendungskontexten
- Stammfunktion von ganzrationalen Funktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (mit Ausnahme von –1) sowie von der Sinus- und der Kosinusfunktion bestimmen, auch mithilfe der Summen- und Faktorregel
- Integrale in Anwendungskontexten zur Berechnung von Mittelwerten von Funktionen nutzen
- Integrale mithilfe von Stammfunktionen und durch Abschätzungen bestimmen, auch zur Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen
- die Volumenformel für Körper begründen, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen
- bestimmte Integrale bei Sinus- und Kosinusfunktionen mit linearen Argumenten als Bestandsänderungen berechnen
- elementare Rechenregeln für bestimmte Integrale anwenden und Symmetriebetrachtungen nutzen

II Analysis

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion
$f\colon\ x \mapsto -\dfrac{8}{27}x^3 + \dfrac{2}{3}x^2,$
die die Nullstellen 0 und $\frac{9}{4}$ hat. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Punkte

a) **Bestimmen** Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.
Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Informationen sowie des Funktionswerts für $x = -2$ in einem geeigneten Koordinatensystem. 7

b) Die Tangente an G_f im Punkt $\left(\frac{9}{4}\,\middle|\,0\right)$ wird mit t bezeichnet.
Weisen Sie **nach**, dass t durch den Punkt $\left(0\,\middle|\,\frac{27}{8}\right)$ verläuft.

Begründen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks, das G_f im ersten Quadranten mit t und der y-Achse einschließt, kleiner als $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{27}{8}$ ist. 5

2. Der Graph einer in [0; 3] definierten ganzrationalen Funktion g geht im Punkt $A(0\,|\,1{,}5)$ ohne Knick in die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}5$ über und im Punkt $B(3\,|\,-0{,}5)$ ohne Knick in die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 11{,}5$.

a) **Zeigen** Sie rechnerisch, dass der Grad von g unter den beschriebenen Bedingungen nicht zwei sein kann. 6

b) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

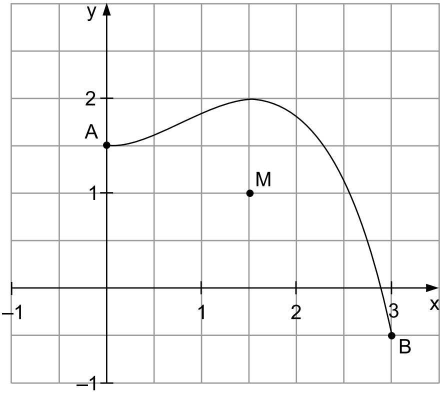

Abb. 1

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem der Abstand des Punkts $M(1{,}5\,|\,1)$ zum Graphen von g berechnet werden könnte, wenn der Funktionsterm von g bekannt wäre. 5

3. In einer Messstation wird seit 1958 kontinuierlich die CO_2-Konzentration in der Luft gemessen, die in ppm (parts per million) angegeben wird.
Die Tabelle gibt für die Jahre 1960, 1985 und 2010 jeweils den jährlichen Durchschnittswert der Messwerte an.

Jahr	1960	1985	2010
CO_2-Konzentration	317 ppm	346 ppm	390 ppm

a) Die jährlichen Durchschnittswerte haben sich im Zeitraum von 1960 bis 1985 in guter Näherung exponentiell entwickelt.
Ermitteln Sie die zugehörige jährliche Wachstumsrate in Prozent.
(Zur Kontrolle: etwa 0,35 %) 3

b) **Berechnen** Sie unter der Annahme, dass sich das exponentielle Wachstum nach 1985 in gleicher Weise fortgesetzt hat, den jährlichen Durchschnittswert für das Jahr 2010.
Vergleichen Sie diesen Wert mit dem zugehörigen Wert aus der Tabelle und **formulieren** Sie das Ergebnis Ihres Vergleichs im Sachzusammenhang. 3

Innerhalb eines Jahres schwankt die CO_2-Konzentration. Für einen bestimmten Zeitraum von acht Monaten lassen sich die gemessenen Werte modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$k\colon\ x \mapsto 3{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 406$$

beschreiben.
Dabei ist x die in diesem Zeitraum vergangene Zeit in Monaten und k(x) die CO_2-Konzentration in ppm. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

c) **Geben** Sie eine Möglichkeit **an**, wie der Graph von k schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $s\colon\ x \mapsto \sin(x)$ hervorgehen kann.
Beurteilen Sie, ob die Reihenfolge der einzelnen Schritte von Bedeutung ist. 5

d) **Bestimmen** Sie mithilfe der Funktion k für den betrachteten Zeitraum von acht Monaten die prozentuale Abweichung des Maximums der CO_2-Konzentration von der durchschnittlichen CO_2-Konzentration. 6

40

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1 a

Lage und Art der Extrempunkte

- Bilden Sie mithilfe der bekannten Regeln die 1. und die 2. Ableitungsfunktion von f.
- Verwenden Sie die notwendige Bedingung für Extremstellen.
- Prüfen Sie mithilfe der 2. Ableitungsfunktion, ob die gefundenen Extremstellen zu Hoch- oder Tiefpunkten gehören.
- Berechnen Sie die y-Koordinaten der Extrempunkte, indem Sie die Funktionswerte von f an den Extremstellen berechnen.

Skizze des Graphen

- Berechnen Sie f(–2).
- Zeichnen Sie zunächst alle bekannten Punkte ein: Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen), Extrempunkte und $(-2 \mid f(-2))$.

Teilaufgabe 1 b

Nachweis, dass die Tangente durch den Punkt $\left(0 \,\middle|\, \frac{27}{8}\right)$ *verläuft*

- Sie können die Tangentengleichung aufstellen, ausgehend von der allgemeinen Gleichung $t(x) = mx + b$.
- Der Anstieg m ist gleich dem Funktionswert von f' an der Stelle $x = \frac{9}{4}$.
- Nutzen Sie die Koordinaten des Punkts $\left(\frac{9}{4} \,\middle|\, 0\right)$, um den y-Abschnitt b zu bestimmen.
- Durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts $\left(0 \,\middle|\, \frac{27}{8}\right)$ in die Tangentengleichung weisen Sie nach, dass die Tangente durch diesen Punkt verläuft.

Flächenstück, das G_f *im ersten Quadranten mit t und der y-Achse einschließt*

- Betrachten Sie zunächst das dreieckige Flächenstück, das die Tangente t mit der x- und der y-Achse einschließt.
- Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Term, der in der Aufgabenstellung angegeben ist. Auf Basis dieses Vergleichs können Sie eine Aussage über das Flächenstück treffen, das G_f mit t und der y-Achse einschließt.

Teilaufgabe 2 a

Zeigen, dass der Grad von g nicht zwei sein kann

- Sie können die Informationen aus der Aufgabenstellung in vier Gleichungen übersetzen.
- Beachten Sie: Die Information, dass der Graph von g in einem bestimmten Punkt ohne Knick in eine Gerade übergeht, enthält zwei Aspekte: Der Graph von g verläuft durch diesen Punkt und g hat in dem Punkt denselben Anstieg wie die Gerade.

- Nehmen Sie nun an, dass g den Grad zwei hat. Die Funktionsgleichung ist dementsprechend $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
- Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem unter dieser Annahme nicht lösbar ist.

Teilaufgabe 2 b

Beschreibung des Verfahrens zur Berechnung des Abstands

- Schreiben Sie zunächst auf, wie allgemein der Abstand von M zu einem beliebigen Punkt auf dem Graphen von g berechnet werden kann.
- Erläutern Sie in einem zweiten Schritt, wie derjenige Punkt auf dem Graphen von g gefunden werden kann, dessen Abstand zu M minimal ist.

Teilaufgabe 3 a

Jährliche Wachstumsrate

- Eine jährliche Wachstumsrate p bedeutet, dass der jährliche Durchschnittswert pro Jahr mit dem Faktor $(1 + p)$ wächst.

Teilaufgabe 3 b

Durchschnittswert für 2010

- Berechnen Sie mithilfe der Wachstumsrate aus Teilaufgabe a den Wert für 2010.
- Vergleichen Sie den berechneten Wert mit dem Tabellenwert. Was können Sie daraus bezüglich des Wachstums schließen?

Teilaufgabe 3 c

Zusammenhang zwischen den Graphen von s und k

- Überlegen Sie sich für die beiden Faktoren $\frac{\pi}{6}$ und 3,3 sowie für den Summanden 406 jeweils, ob sie zu einer Streckung bzw. Stauchung oder einer Verschiebung des Graphen führen. Und in welche Richtung?
- Die Streckungen/Stauchungen und Verschiebungen in x-Richtung sind unabhängig von den Streckungen/Stauchungen und Verschiebungen in y-Richtung.

Teilaufgabe 3 d

Abweichung des Maximalwerts vom Durchschnittswert

- Der Durchschnittswert f_D einer Funktion f im Intervall $[x_0; x_1]$ berechnet sich mit:

$$f_D = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cdot dx$$

- Die Sinusfunktion kann maximal den Wert 1 annehmen.

Lösung

1. a) Mit $f(x) = -\frac{8}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2$ ergibt sich für die Ableitungsfunktionen:

$$f'(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

$$f''(x) = -\frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$$

Mit der notwendigen Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$ erhält man:

$$-\frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \frac{3}{2}$$

Überprüfung der hinreichenden Bedingung:

$$f''(0) = -\frac{16}{9} \cdot 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt } T(0 \mid f(0))$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{16}{9} \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt } H\left(\frac{3}{2} \middle| f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

Die y-Koordinaten der Extrempunkte ergeben sich mit:

$$f(0) = -\frac{8}{27} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Damit hat G_f den Tiefpunkt $T(0 \mid 0)$ und den Hochpunkt $H\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{1}{2}\right)$.

Funktionswert für $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{8}{27} \cdot (-2)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-2)^2 = \frac{136}{27} \approx 5{,}0$$

Skizze von G_f: