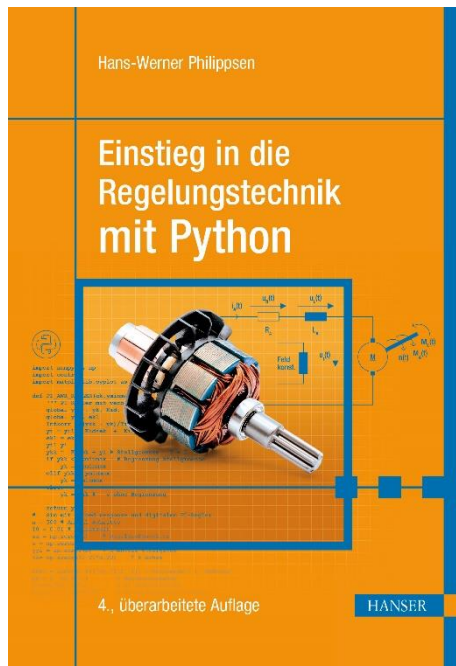


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Einstieg in die Regelungstechnik mit Python

von Hans-Werner Philippsen

Print-ISBN: 978-3-446-47282-2

E-Book-ISBN: 978-3-446-47433-8

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446472822>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort zur 4. Auflage

Die vierte Auflage des Fachbuchs *Einstieg in die Regelungstechnik* wurde überarbeitet und erweitert. Hinzugefügt wurden die Themen Regelung von integralwirkenden Strecken, von Strecken mit Totzeit, Modellreduktion und die numerische Optimierung. Besonders hervorzuheben ist die durchgängige Nutzung der kostenlosen Programmiersprache Python. Mit Hilfe von Python und den freien Paketen NumPy, SciPy und Control lassen sich Regelkreise vollständig berechnen und entwerfen.



## web###

Alle Beispielprogramme, die unter der URL [www.einstieg-rt.de](http://www.einstieg-rt.de) zum Download bereitstehen, sind im Buch mit dem Kürzel web### gekennzeichnet. ### ist hier der Platzhalter für die jeweilige Listingnummer im Buch. Web201 z. B. bezeichnet das erste Listing in Kapitel 2. Durch die Eingabe von [einstieg-rt.de/web###](http://einstieg-rt.de/web###) gelangen Sie direkt zum Code.

Leser des E-Books klicken in der PDF-Datei auf den Hinweis web### und werden direkt zum Code weitergeleitet.

Moderne Regler sind digital und können u. a. auf der Grundlage von Python auf einem PC oder auf dem Mikrorechner Raspberry Pi oder auf einem Microcontroller realisiert werden. Mit Hilfe der Programmiersprache MicroPython, die für die direkte Ausführung von Python-Code auf Microcontrollern konzipiert wurde, können regelungstechnische Projekte realisiert werden, ohne eine neue Programmiersprache lernen zu müssen. Python hilft zudem bei der Erarbeitung des Stoffes und bietet auch für andere Fachgebiete eine Fülle von Paketen wie z. B. für die Bildverarbeitung, KI und Kommunikationstechnik.

Das Buch wendet sich an Bachelor-Studierende ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge, die das Fach Regelungstechnik als Pflicht- oder Wahlmodul studieren. Darüber hinaus wurde das Buch für den praktisch tätigen Ingenieur konzipiert. Ziel ist es, einen praxisnahen und einfachen Einstieg in die Regelungstechnik zu ermöglichen. Aus diesem Grunde wurden weitere Beispiele hinzugefügt, Zeichnungen erneuert und an einigen Stellen der Text überarbeitet sowie Fehler korrigiert.

Die im Rahmen dieses Buches häufige Verwendung von Wirkungsplänen dient der vereinfachten Darstellung abstrakter Zusammenhänge.

Die Regelungstechnik ist ein Fachgebiet mit einer sehr langen Geschichte. Seit den ersten industriellen Anwendungen im 18. Jahrhundert und den ersten theoretischen Arbeiten Mitte des 19. Jahrhunderts kann bis heute eine reichhaltige Entwicklung festgestellt wer-

den. Aus diesem Grunde haben Fachbücher der Regelungstechnik oft einen erheblichen Umfang und sind durch einen großen mathematischen Anteil geprägt. Ein Lehrbuch der Regelungstechnik sollte m.E. die Studierenden in die Lage versetzen, mit möglichst einfachen Mitteln und Software-Unterstützung ausgehend vom Prozess zum eingestellten Regler zu kommen.

Viel Erfolg bei der Erarbeitung des Fachgebietes und der Nutzung der Python-Beispiele!

Bedanken möchte ich mich bei Frau Sylvia Hasselbach für Übernahme des Lektorats und die sehr gute Zusammenarbeit. Der gleiche Dank auch an Frau Kristin Rothe und Frau Irene Weihart vom Hanser-Verlag für die Arbeit am Text und den vielen Bildern. Meinem Sohn Tom danke ich sehr für die Realisierung des Internet-Auftritts.

Bremen, im April 2022

*Hans-Werner Philippsen*

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Das Prinzip der Steuerung	2
1.2	Das Prinzip der Regelung	2
1.3	Signale und Komponenten des Regelkreises	3
1.4	Klassifikation von Regelungen	4
1.5	Regelungsstrategien	5
1.6	„Beste“ Einstellung eines Reglers	6
1.7	Statisches Übertragungsverhalten	10
1.8	Dynamisches Verhalten linearer Übertragungsglieder	16
1.9	Besondere Führungsgrößen	21
1.10	Vorgehensmodell Reglerentwurf	22
<b>2</b>	<b>Einführung Python und Pakete</b>	<b>27</b>
2.1	Python	27
2.2	Matplotlib	32
2.3	NumPy	35
2.4	SciPy	37
2.5	Python Control Systems Library	40
2.6	MicroPython	41
<b>3</b>	<b>Mathematische Modelle</b>	<b>47</b>
3.1	Lösung der Differenzialgleichung mithilfe eines Simulators	47
3.2	Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Laplace-Transformation	48
3.2.1	Regeln für das Rechnen mit Übertragungsfunktionen	53
3.2.2	Anfangswert- und Endwertsätze	55
3.3	Frequenzgang	59
3.3.1	Berechnung und Messung des Frequenzgangs	59
3.3.2	Darstellung des Frequenzgangs in der Ortskurve	62
3.3.3	Darstellung des Frequenzgangs im Bode-Diagramm	64
3.4	Python-Beispiel	66
3.5	Mathematische Signalmodelle	68
3.6	Elementare Übertragungsglieder	69
3.6.1	Proportionalglied (P-Glied)	69
3.6.2	Integrierendes Glied (I-Glied)	71
3.6.3	Differenzierendes Glied (D-Glied)	73
3.6.4	Totzeitglied ( $T_t$ -Glied)	74
3.7	Wirkungsplan-Elemente der Elektrotechnik	75

<b>4 Regelstrecken</b>	<b>79</b>
4.1 Verzögerungsglied 1. Ordnung ( $P-T_1$ -Glied)	79
4.2 Verzögerungsglied n-ter Ordnung ( $P-T_n$ -Glied)	81
4.3 Verzögerungsglied 2. Ordnung ( $P-T_2$ -Glied)	85
4.4 Totzeit-Strecke mit Verzögerung	92
4.5 Integrale Strecke mit Verzögerung ( $I-T_1$ -Glied)	95
4.6 Lead-Lag-Glied	98
4.7 Das allgemeine rationale Übertragungsglied	100
4.8 Strecke ohne Ausgleich: Beispiel Fahrzeuglenkung	102
4.9 Strecke mit Ausgleich: Beispiel DC-Motor	107
4.10 Nicht lineare Strecke mit Ausgleich: Beispiel Fahrzeug	115
4.11 Nicht lineare Strecke mit Ausgleich: Beispiel Tiefsetzsteller	119
<b>5 PID-Regler</b>	<b>123</b>
5.1 PI-Regler	123
5.2 PD-Regler	128
5.3 PD- $T_1$ -Regler	129
5.4 PID-Regler	132
5.5 PID- $T_1$ -Regler	133
5.6 Industrielle PID-Regler	135
5.6.1 Kompaktregler	135
5.6.2 Regler-Software-Baustein	138
5.6.3 Servo-Regler	140
<b>6 Reglerentwurf</b>	<b>143</b>
6.1 Stationäres Regelkreisverhalten	144
6.2 Dynamisches Regelkreisverhalten	150
6.3 Stabilität	152
6.4 Frequenzkennlinienverfahren	161
6.5 Kompensationsreglerentwurf	164
6.6 Entwurfsverfahren für PID-Regler	165
6.6.1 PID-Kompensationsregler	165
6.6.2 Das Betragsoptimum	169
6.6.3 Einstellregel nach Ziegler und Nichols	173
6.6.4 T-Summen-Einstellregel	174
6.6.5 Einstellregel von Chien, Hrones und Reswick	176
6.7 Regelung von $I-T_1$ -Strecken	179
6.8 Regelung von Strecken mit Totzeit	191
6.9 Numerische Optimierung der Reglerparameter	196
6.9.1 Optimierung mithilfe von evolutionären Algorithmen	197
6.9.2 Numerische Optimierung für den robusten Entwurf	200

---

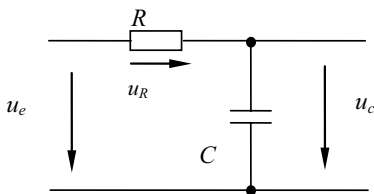
<b>7</b>	<b>Besondere Strukturen der Regelungstechnik</b>	<b>207</b>
7.1	Störgrößenaufschaltung	207
7.1.1	Statische Störgrößenaufschaltung	208
7.1.2	Dynamische Störgrößenaufschaltung	209
7.2	Kaskadenregler	210
7.3	Regelkreis mit Vorfilter und Vorsteuerung	213
7.4	Regler in der Rückführung	216
7.5	Entkopplung von Mehrgrößensystemen	217
7.6	Schaltende Regler	220
7.7	Zustandsraumbeschreibung	226
7.7.1	Einführung Zustandsraum	226
7.7.2	Zustandsraummodell DC-Motor	233
7.7.3	Ähnlichkeitstransformation	235
7.8	Zustandsregler	239
7.8.1	Struktur eines Zustandsreglers	239
7.8.2	Entwurf Zustandsregler	241
7.8.3	Beispiel Portalkran	248
7.9	Beobachter	256
7.10	Modellreduktion	260
<b>8</b>	<b>Digitale Regelungen</b>	<b>265</b>
8.1	Analog-Digital-Wandlung	268
8.2	Signale des digitalen Regelkreises	271
8.3	Mathematische Beschreibung des Abtastvorgangs	272
8.3.1	Abtasttheorem von Shannon	273
8.3.2	Wahl der Abtastzeit	274
8.3.3	Abtast-Halteglied	274
8.4	Diskretisierung linearer Systeme	278
8.4.1	Diskretisierung P-T <sub>1</sub> -Glied	278
8.4.2	Diskretisierung I-Glied	281
8.5	Diskretisierte Grundregler	282
8.5.1	Diskretisierter P-Regler	284
8.5.2	Diskretisierter I-Regler	284
8.5.3	Diskretisierter PI-Regler	285
8.5.4	Diskretisierter D-T <sub>1</sub> -Regler	285
8.6	Regleralgorithmen	286
8.7	Z-Transformation	289
8.8	Stabilität zeitdiskreter Systeme	299
8.9	Bilineare Transformation	301
8.10	Entwurf digitaler Regler	306
8.11	Motion Control	310

<b>9</b>	<b>Beispiele und Aufgaben</b>	<b>325</b>
9.1	Beispiele	325
9.1.1	Temperaturregelstrecke	325
9.1.2	Drehzahlregelung Elektromotor	333
9.1.3	Pendel	338
9.1.4	Dreifachkaskade	343
9.1.5	Querdynamikregelung	352
9.2	Aufgaben	360
9.2.1	Rechnen mit Wirkungsplänen und Übertragungsfunktionen	360
9.2.2	Elektrische Netzwerke	361
9.2.3	Bestimmung von Kenngrößen	361
9.2.4	Berechnung der Sprungantwort	362
9.2.5	Verhalten von PID-Reglern	362
9.2.6	Berechnung von Regelkreisen	362
9.2.7	Reglerentwurf	363
9.2.8	Diskretisierung von Systemen	363
9.2.9	Modellbildung und Reglerentwurf	364
9.3	Lösungen der Übungsaufgaben	364
<b>10</b>	<b>Anhang</b>	<b>369</b>
10.1	Laplace-Korrespondenztabelle	369
10.2	Berechnung der Sprungantwort eines $P-T_2$ -Gliedes	370
10.3	Bestimmung der Überschwingweite eines $P-T_2$ -Gliedes	373
10.4	Reglerentwurf gemäß Betragsoptimum	375
10.5	Installation der Software	377
10.6	Jupyter Notebooks	379
10.7	Input Output Systems ioSys	381
10.8	Formelzeichen	387
10.9	Abkürzungen	390
10.10	Literatur	391
<b>Index</b>		<b>393</b>

# 4

## Regelstrecken

Strecken werden grundsätzlich in zwei Klassen eingeteilt, in Strecken mit Ausgleich und Strecken ohne Ausgleich. Eine Strecke ohne Ausgleich besitzt keine Begrenzung der Ausgangsgröße, d. h., auf einen begrenzten Sprung der Eingangsgröße reagiert die Ausgangsgröße mit einer Funktion, die gegen unendlich strebt. Ein Integrator ist ein Beispiel für dieses instabile Verhalten. In Abschnitt 6.3 wird im Rahmen der Stabilitätsbetrachtung von Regelkreisen genauer auf dieses Verhalten eingegangen. Ein Beispiel für eine Strecke mit Ausgleich ist das Verzögerungsglied 1. Ordnung. In der RC-Schaltung gemäß Bild 4.1 wirkt im Falle einer sprungförmigen Veränderung der Eingangsspannung die Kondensatorspannung der Eingangsspannung *ausgleichend* entgegen. Während des Ladevorgangs reduziert sich die Spannung  $u_R(t)$  und infolge auch der Ladestrom.



**Bild 4.1** Beispiel für eine Strecke mit Ausgleich

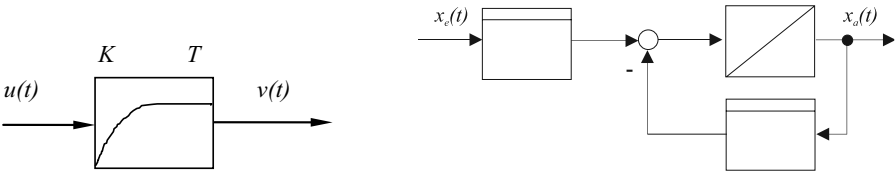
Eine Strecke mit Ausgleich ist ein stabiles System, das auch ohne Regelung auf einen konstanten Eingangswert nach einer Übergangszeit mit einem konstanten Ausgangswert antwortet.

### ■ 4.1 Verzögerungsglied 1. Ordnung (P-T<sub>1</sub>-Glied)

Das Verzögerungsglied 1. Ordnung wurde bereits in den Abschnitten 3.1 und 3.3 ausführlich im Zeit- und Frequenzbereich behandelt. In Bild 4.2 werden die Darstellung im Wirkungsplan und die Realisierung mit elementaren Übertragungsgliedern gezeigt.

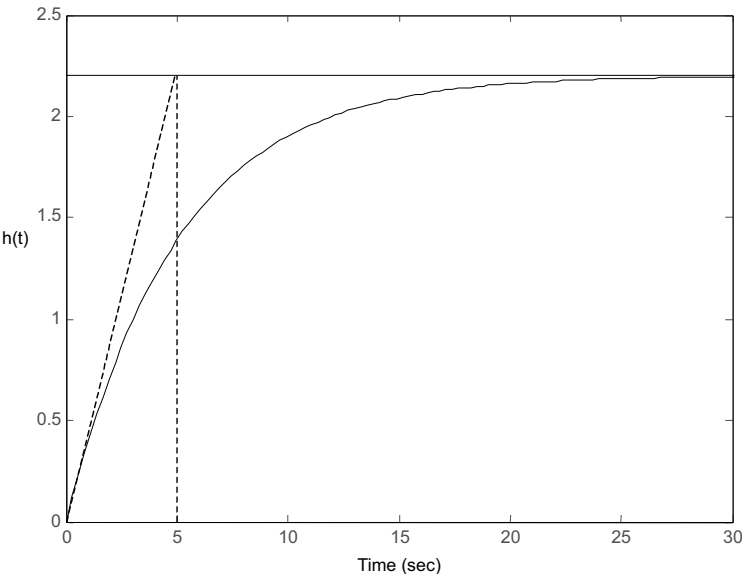
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$	Verzögerungszeit: $T$ Verstärkung: $K$
Frequenzgang	$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$	
Übergangsfunktion (Sprungantwort)	$h(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \sigma(t)$	





**Bild 4.2** Blockdarstellung sowie Realisierung mit P- und I-Gliedern

Das P-T<sub>1</sub>-Glied lässt sich, wie bereits gezeigt, durch eine RC-Schaltung realisieren (Bild 4.1). Die Abkürzung P-T<sub>1</sub> steht für die Reihenschaltung eines Proportionalgliedes und eines einfachen Zeitgliedes (T für Time). P-T<sub>1</sub> ist die normgerechte Bezeichnung für das Verzögerungsglied 1. Ordnung, jedoch ist die Abkürzung VZ<sub>1</sub> ebenso verbreitet! Die Zeitkonstante ist direkt aus der Sprungantwort mithilfe der Steigungstangente oder der 63%-Regel ablesbar, wenn keine Störungen vorliegen.



**Bild 4.3** Identifikation P-T<sub>1</sub>-Glied

Die Bestimmung der Parameter bzw. die Identifikation eines P-T<sub>1</sub>-Gliedes mithilfe einer Sprungantwort ist in Bild 4.3 dargestellt. Die Sprunghöhe der Eingangssprungfunktion beträgt 1. Somit ist die Verstärkung direkt dem Endwert zu entnehmen ( $K_p = 2,2$ ). Die Tangente im Zeitpunkt  $t = 0$  schneidet die Tangente des Endwertes zum Zeitpunkt  $t = 5$ . Die Zeitkonstante des P-T<sub>1</sub>-Gliedes beträgt 5 Sekunden. Das Anlegen einer Tangente ist im Fall einer gemessenen Sprungantwort schwierig, da Messrauschen und Störungen den Verlauf beeinträchtigen. Als Ausweg bietet sich die Bestimmung der Steuerfläche an (siehe nachfolgender Abschnitt).

## ■ 4.2 Verzögerungsglied n-ter Ordnung (P-T<sub>n</sub>-Glied)

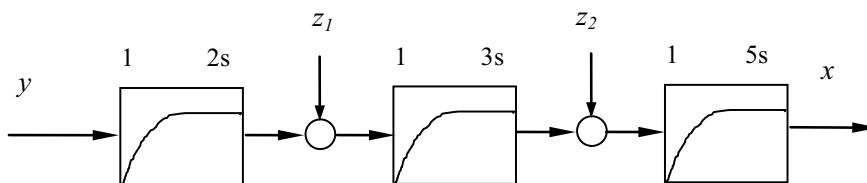
Das Verzögerungsglied  $n$ -ter Ordnung entsteht durch Reihenschaltung mehrerer Verzögerungsglieder 1. Ordnung. Sehr viele Regelstrecken der Praxis lassen sich durch das Verzögerungsglied  $n$ -ter Ordnung beschreiben oder annähern. Verzögerungsglieder  $n$ -ter Ordnung haben  $n$  Zeitkonstanten bzw.  $n$  Energiespeicher. Die Ermittlung der Zeitkonstanten ist nicht mehr so einfach möglich wie beim P-T<sub>1</sub>-Glied.

Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{K_1}{(1+T_1s)} \frac{K_2}{(1+T_2s)} \cdots \frac{K_n}{(1+T_ns)}$
Frequenzgang	$G(j\omega) = \frac{K_1}{(1+j\omega T_1)} \frac{K_2}{(1+j\omega T_2)} \cdots \frac{K_n}{(1+j\omega T_n)}$
Verstärkung	$K = K_1 K_2 \cdots K_n$
Übergangsfunktion (Sprungantwort)	$h(t) = K_p \left[ 1 - C_i \sum_{i=1}^n e^{s_i t} \right] \text{ mit } C_i = \frac{1}{s} (s - s_i) G(s) \Big _{s=s_i}$

Für die Sprungantwort wurde eine Formel angegeben [Ope72], [Ise88], diese ist jedoch mehr von theoretischem Interesse, da der genaue Verlauf mithilfe eines Simulationswerkzeuges einfach ermittelbar ist. Ein Beispiel für ein P-T<sub>n</sub>-Glied ist die P-T<sub>3</sub>-Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{(1+2s)} \frac{1}{(1+3s)} \frac{1}{(1+5s)} = \frac{1}{30s^3 + 31s^2 + 10s + 1}$$

und dem Wirkungsplan:

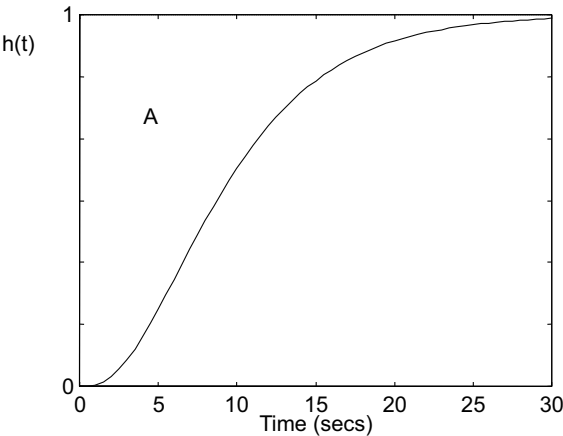


Die zusätzlichen Eingänge  $z_1$  und  $z_2$  stellen eine praxisnahe Einkopplung von Störsignalen in das Streckenmodell dar. Diese Strecke wird im Rahmen von Beispielen als Standardregelstrecke ausführlich behandelt. Die Simulation der Übergangsfunktion (ohne Störeinkopplung) ergibt das in Bild 4.4 gezeigte Diagramm.



web401

**Listing 4.1** P-T<sub>n</sub> Strecke, siehe *einstieg-rt.de/web401*

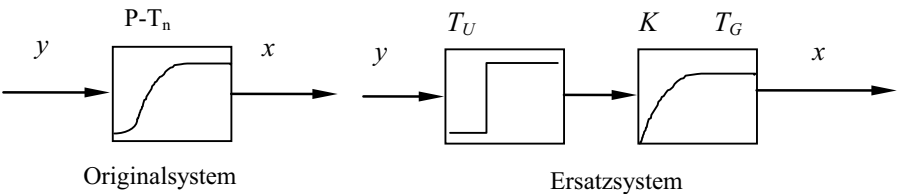


**Bild 4.4** Sprungantwort der Standardregelstrecke (P-T<sub>n</sub>-Glieder)

Kennzeichen eines P-T<sub>n</sub>-Gliedes ist der s-förmige Verlauf der Sprungantwort. Die Zeitkonstanten sind leider nicht auf der Grundlage einer gemessenen Sprungantwort durch einfache Verfahren identifizierbar. Es existieren für regelungstechnische Anwendungen jedoch zwei einfache Näherungen auf der Grundlage eines Ersatzmodells.

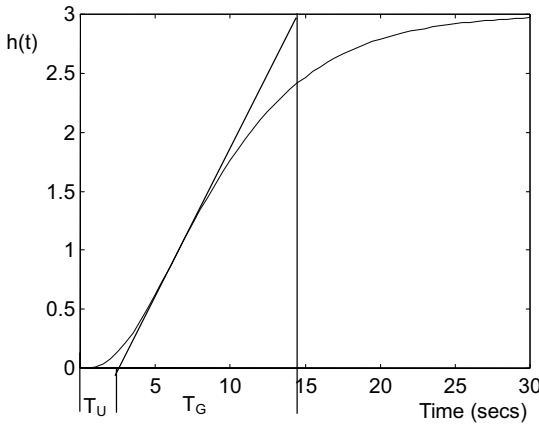
**1. Ersatzmodell: Totzeitglied und P-T<sub>1</sub>-Glieder**

In Bild 4.5 ist die Bildung eines Ersatzmodells auf der Grundlage einer Reihenschaltung von Totzeit- und P-T<sub>1</sub>-Glieder dargestellt.



**Bild 4.5** Original- und Ersatzmodell

Die Verzugszeit (Totzeit)  $T_U$  und die Ausgleichszeit  $T_G$  sind durch Anlegen einer Wendetan- gente an  $h(t)$  zu bestimmen. Der Sprungantwort in Bild 4.6 sind zu entnehmen: Verzugs- zeit  $T_U \approx 2$  Sekunden und Ausgleichszeit  $T_G \approx 11$  Sekunden.

Bild 4.6 Ermittlung  $T_U$  und  $T_G$ 

## 2. Ersatzmodell: Reihenschaltung von $n$ gleichen P-T<sub>1</sub>-Gliedern

Die Fläche vor der Sprungantwort

$$A = \int_0^{\infty} (h(\infty) - h(t)) dt$$

die sogenannte Steuerfläche, gibt Auskunft über die Summenzeitkonstante

$$T_{\Sigma} = T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{A}{h(\infty)}$$

des P-T<sub>n</sub>-Gliedes. Der Beweis ist in [Ise88] angegeben.  $A$  und damit  $T_{\Sigma}$  sind messtechnisch einfach und genau bestimmbar. Ist die Ordnung  $n$  bekannt oder ist  $n$  gut abzuschätzen, kann ein P-T<sub>n</sub>-Glied durch  $n$  gleiche in Reihe geschaltete P-T<sub>1</sub>-Glieder angenähert werden. Die Ersatzzeitkonstante ist dann

$$T_E = \frac{T_{\Sigma}}{n}$$

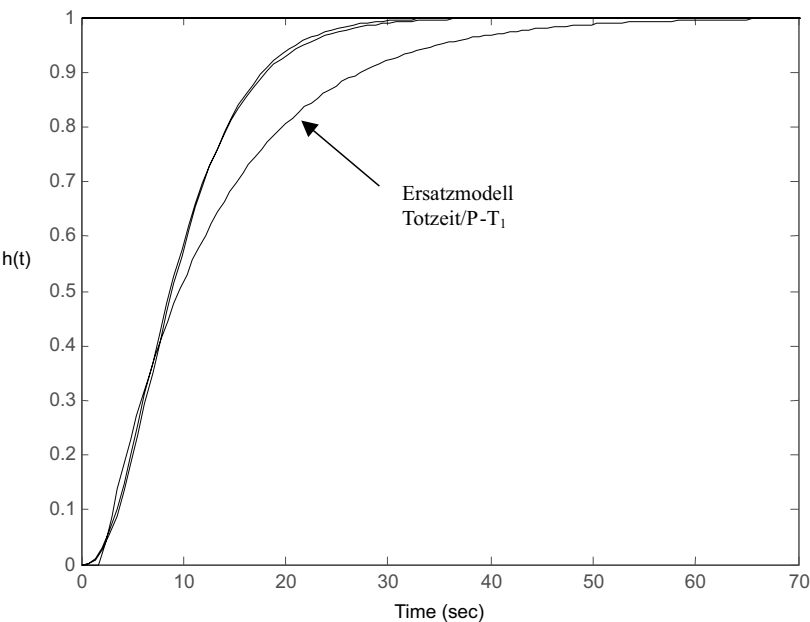
und das Ersatzmodell:

$$G_E(s) = \frac{K}{(1 + T_E s)^n}$$

Das Ersatzsystem der Standardregelstrecke ist:

$$G_E(s) = \frac{1}{(1 + 3,33s)^3}$$

Das Ersatzsystem hat die gleiche Steuerfläche und eine ähnliche Sprungantwort wie das Originalsystem. Den Vergleich beider Näherungsansätze zeigt Bild 4.7. Das Ersatzmodell der Standardregelstrecke, das auf der Grundlage dreier gleicher P-T<sub>1</sub>-Glieder erstellt wurde, weist in diesem Fall die beste Näherung auf (fast deckungsgleicher Verlauf).



**Bild 4.7** Zwei Ersatzmodelle für ein P-T<sub>n</sub>-Glied

Die Ordnung kann mithilfe der Zeitprozentkennwerte abgeschätzt werden. Ein Zeitprozentkennwert gibt die Zeitdauer an, die die Übergangsfunktion benötigt, um z. B. 10 % des Endwertes zu erreichen. Aus den Zeitprozentkennwerten  $t_{10}$  (10 %) und  $t_{90}$  (90 %) wird der Quotient

$$\mu = \frac{t_{10}}{t_{90}}$$

gebildet. Die Abschätzung der Ordnung wird mithilfe der durch Simulationsrechnungen erstellten Tabelle 4.1 durchgeführt.

**Tabelle 4.1:** Bestimmung der Ordnung mittels Zeitprozentkennwerten

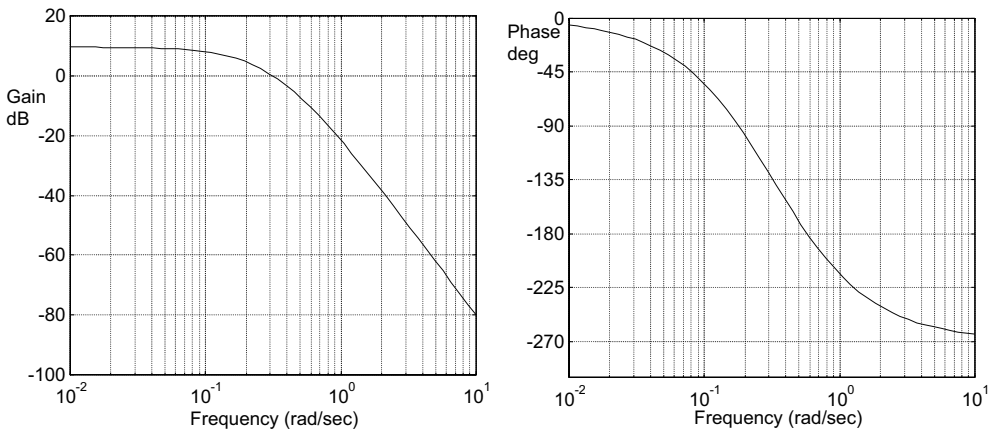
Ordnung	$\mu$
1	0,046
2	0,137
3	0,207
4	0,261
5	0,304
6	0,340
7	0,370
8	0,396

Wird ein Quotient von ca. 0,26 bestimmt, dann liegt ein System 4. Ordnung vor. Eine Bestimmung der Parameter der Strecke kann auch mit sogenannten mathematischen Identifikationsverfahren erfolgen. Für derartige Methoden existieren Software-Pakete (z. B. WinFact oder die Matlab Identification Toolbox. Die theoretischen Grundlagen der Identifikation linearer Systeme werden in [Ise88] und [Unb98] vermittelt.

Der Frequenzgang der P-T<sub>n</sub>-Regelstrecke

$$G(j\omega) = \frac{2}{(1+2j\omega)} \frac{1,5}{(1+3j\omega)} \frac{1}{(1+5j\omega)}$$

wird im Bode-Diagramm (Bild 4.8) dargestellt:



**Bild 4.8** Bode-Diagramm P-T<sub>n</sub>-Glied 3. Ordnung

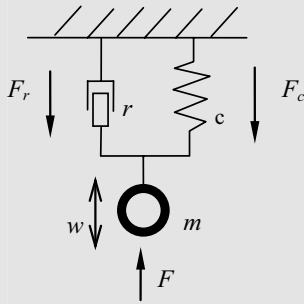
In der Dekade  $10^0 \leq \omega \leq 10^1$  fällt der Amplitudengang um 60 dB bzw. dreimal 20 dB. Die Phasenverschiebung nähert sich dem Wert -270 Grad bzw. dreimal -90 Grad. Beide Aussagen belegen das Vorhandensein von drei Integratoren.

## ■ 4.3 Verzögerungsglied 2. Ordnung (P-T<sub>2</sub>-Glied)

Das Verzögerungsglied 2. Ordnung wurde bereits in einem elektrotechnischen Beispiel (Bild 1.25, Reihenschwingkreis) behandelt. Als mechanisches Beispiel soll ein System Feder-Masse-Dämpfung dienen (Bild 4.9). Eine Modellbildung geht von der Kräftesumme am Rad aus. Die von unten auf das Rad wirkende Kraft ist die Eingangsgröße. Die entgegenwirkenden Kräfte sind die Federkraft, die Reibkraft des Stoßdämpfers und die Trägheitskraft der im Rad konzentrierten Masse.

**Beispiel 4.1:**

Radaufhängung mit Radmasse



F: Eingangsgröße

w: Ausgangsgröße (Weg)

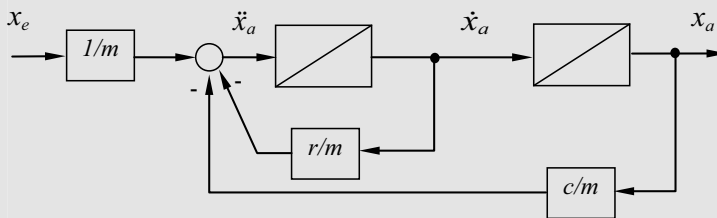
$$F = F_m + F_r + F_c$$

$$x_e = m\ddot{x}_a + r\dot{x}_a + cx_a$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + rs + c}$$

**Bild 4.9** P-T<sub>2</sub>-Glied

Ausgehend von der nach  $\ddot{x}_a(t)$  umgestellten DGL ergibt sich der in Bild 4.10 gezeigte Wirkungsplan.

**Bild 4.10** Wirkungsplan Beispiel P-T<sub>2</sub>-Glied

In Abhängigkeit von der Reibung bzw. Dämpfung wird dieses System mehr oder weniger stark schwingen.

Um das Schwingverhalten von den Parametern her ablesen zu können, sind zwei Darstellungsformen von P-T<sub>2</sub>-Gliedern verbreitet:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}$$

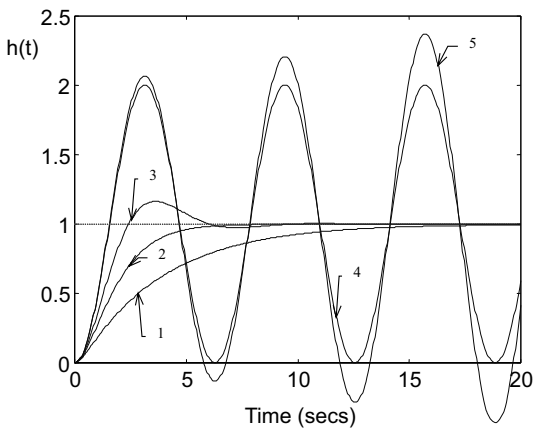
bzw. mit der Kennkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{T}$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Die Sprungantwort ist sehr deutlich von der Dämpfung bzw. dem Dämpfungsgrad  $d$  abhängig, wie in der Tabelle 4.2 und im Diagramm möglicher Sprungantworten gezeigt wird (Bild 4.11).

**Tabelle 4.2:** Wirkung der Dämpfung auf  $h(t)$

	Dämpfung	Verlauf von $h(t)$	stabil/instabil
1	$d > 1$	aperiodisch	stabil
2	$d = 1$	aperiodischer Grenzfall	stabil
3	$1 > d > 0$	periodisch gedämpft	stabil
4	$d = 0$	periodisch ungedämpft	grenzstabil
5	$d < 0$	periodisch aufklingend	instabil



**Bild 4.11** Simulation möglicher Sprungantworten  $\omega_0 = 1$ ,  $d = 2, 1, 0,5, 0, -0,02$

Die Kurve 3 weist eine Dämpfung von  $d = 0,5$  auf und hat einen deutlichen Überschwinger. In der Regelungstechnik wird häufig eine Überschwingweite von kleiner 5 % angestrebt. Im Fall von  $x_m = 5\%$  beträgt die Dämpfung

$$d \approx 0,7 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Im Folgenden werden nur stabile Systeme 2. Ordnung betrachtet. Das Nennerpolynom

$$s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2$$

hat die Nullstellen:

$$s_{1/2} = -d\omega_0 \pm \sqrt{d^2\omega_0^2 - \omega_0^2}$$

$$s_{1/2} = -d\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$$

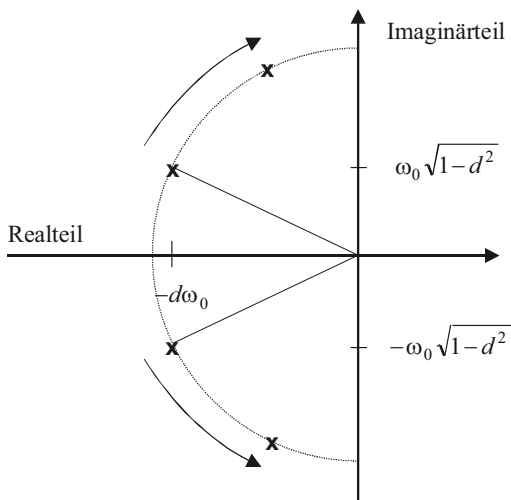


Liegt eine Dämpfung von  $0 < d < 1$  vor, dann sind die Nullstellen konjugiert komplex und das System weist ein Überschwingen in der Sprungantwort auf. Ein schwingfähiges Verzögerungsglied 2. Ordnung wird mit P-T<sub>2s</sub> gekennzeichnet. Im Fall einer Dämpfung von  $d = 1$  sind  $s_{1/2}$  reell und  $s_1 = s_2$ . Liegt eine Dämpfung von  $d > 1$  vor, sind  $s_{1/2}$  reell und  $s_1 \neq s_2$ .

Wie wir gesehen haben, übt die Dämpfung einen entscheidenden Einfluss auf die Überschwingweite aus. Ein weiterer Indikator der Art des Einschwingverhaltens stellt die Lage der Pole der Übertragungsfunktion in der komplexen Zahlenebene dar. Die Pole sind die Nullstellen des Nennerpolynoms, wobei für  $d < 1$  geschrieben werden darf:

$$s_{1/2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-d^2}$$

In der komplexen Zahlenebene (Bild 4.12) beträgt der Abstand eines Poles zum Ursprung  $\omega_0$ . Wird für ein konstantes  $\omega_0$  und eine veränderte Dämpfung die Verschiebung der Pole betrachtet, so wandern die Pole auf einem Kreisabschnitt. In Bild 4.12 ist die Verschiebung eines Polpaares aufgrund einer verkleinerten Dämpfung eingezeichnet, wobei die Pole näher zur Imaginärachse wandern. Für den Fall  $d \geq 1$  sind die Pole auf der reellen Achse zu finden.



**Bild 4.12** Lage der Pole eines P-T<sub>2</sub>-Gliedes in der komplexen Zahlenebene

Die Pollage gibt nicht nur für P-T<sub>2</sub>-Glieder einen Hinweis auf das dynamische Verhalten, sondern auch für alle anderen Systeme.



**web402**

**Listing 4.2** P-T<sub>2s</sub> Strecke, siehe [einstieg-rt.de/web402](http://einstieg-rt.de/web402)

Die Formel für die Berechnung der Sprungantwort für den Fall  $d < 1$  ist:

$$h(t) = K - \frac{K}{w} e^{-d\omega_0 t} (d \sin(\omega_e t) + w \cos(\omega_e t))$$

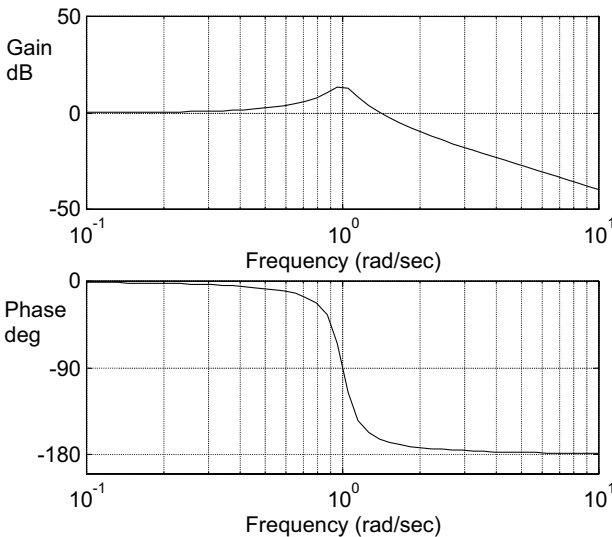
$$w = \sqrt{1 - d^2} \quad \omega_e = w\omega_0$$

Die Herleitung ist im Anhang zu finden. Das Bode-Diagramm eines schwingfähigen P-T<sub>2</sub>-Gliedes zeigt Bild 4.13. Eine Resonanzüberhöhung im Amplitudengang tritt auf, wenn

$$d < \sqrt{2}/2$$

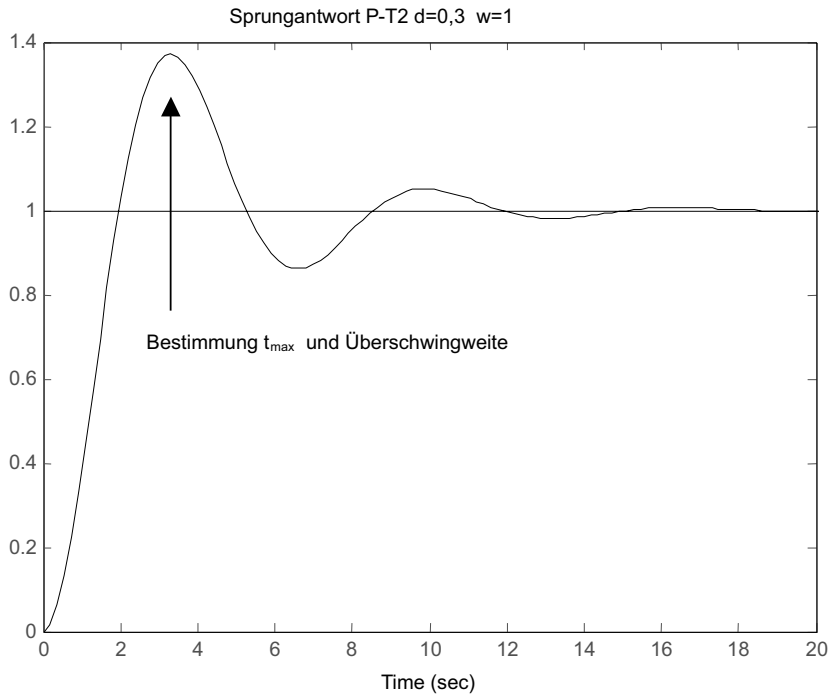
Die Resonanzfrequenz beträgt in diesem Fall:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2d^2}$$



**Bild 4.13** Bode-Diagramm eines P-T<sub>2</sub>-Systems  $\omega_0 = 1$   $d = 0,1$ .

Die Resonanzüberhöhung bei  $\omega \approx 1$  ist in Abhängigkeit von der Dämpfung mehr oder weniger ausgeprägt. Ein schwingfähiges P-T<sub>2</sub>-Glied ist messtechnisch an der Resonanzüberhöhung (wenn  $d < 0,707$ ) und am Überschwinger in der Sprungantwort zu erkennen. Die Parameter  $K$ ,  $d$  und  $\omega_0$  lassen sich auf der Grundlage einer Sprungantwort ermitteln, siehe Bild 4.14.



**Bild 4.14** Sprungantwort eines periodisch gedämpften P-T<sub>2</sub>-Gliedes

Die Dämpfung des Systems ist unmittelbar aus der Überswingweite  $x_m$  berechenbar:

$$x_m = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}}$$

$$d = \left| \frac{\ln(x_m)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln x_m)^2}} \right|$$

und  $\omega_0$  kann bestimmt werden, wenn der Zeitpunkt  $t_{\max}$  des maximalen Überschwings bekannt ist:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_{\max} \sqrt{1 - d^2}}$$

Die Herleitung für beide Formeln ist im Anhang angegeben.

**Beispiel 4.2:**

Die Reihenschaltung von zwei P-T<sub>1</sub>-Gliedern führt zu einem P-T<sub>2</sub>-Glied mit der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

Wenn  $T_1 = T_2$ , beträgt die Dämpfung  $d = 1$ . Für  $T_1 \neq T_2$  ist die Dämpfung  $d > 1$ . Es erfolgt für diesen Fall eine Herleitung der Formel für die Berechnung der Sprungantwort, wobei eine Partialbruchzerlegung Verwendung findet.

$$G(s) = \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{A}{(1 + T_1 s)} + \frac{B}{(1 + T_2 s)}$$

Die Koeffizienten  $A$  und  $B$  werden durch Multiplikation obiger Gleichung mit dem Nenner von  $G(s)$  bestimmt:

$$1 = A(1 + T_2 s) + B(1 + T_1 s)$$

$$1 = A + B + \underbrace{AT_2 s + BT_1 s}_0$$

$$A = 1 - B$$

$$0 = (1 - B)T_2 s + BT_1 s$$

$$B = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

$$A = 1 - \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Dann ist

$$G(s) = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \frac{1}{(1 + T_1 s)} + \frac{T_2}{T_2 - T_1} \frac{1}{(1 + T_2 s)}$$

Die Umformung ergibt zwei parallel geschaltete P-T<sub>1</sub>-Glieder, d.h., die Sprungantwort kann aus der Addition der Sprungantworten der einzelnen P-T<sub>1</sub>-Glieder (siehe bekannte Laplace-Rücktransformation) berechnet werden.

$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \frac{1}{s(1 + T_1 s)} + \frac{T_2}{T_2 - T_1} \frac{1}{s(1 + T_2 s)}$$

$$h(t) = \frac{T_1}{T_1 - T_2} (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + \frac{T_2}{T_2 - T_1} (1 - e^{-\frac{t}{T_2}})$$

Die Übertragungsfunktion regelungstechnischer Systeme kann in Polynomdarstellung oder in Produktform angegeben werden.

$$G(s) = \frac{\text{Zähler}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} = \frac{\text{Zähler}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

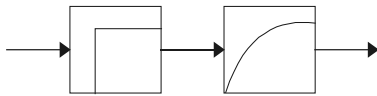
Die Polynomdarstellung ist aus der Produktform durch Multiplikation aller Terme bestimmbar. Die Bildung der Produktform aus der Polynomdarstellung erfordert die Suche der Nullstellen des Polynoms und damit der Eigenwerte.

$$T_i = -\frac{1}{s_i} = -\frac{1}{\lambda_i}$$

In der gezeigten Produktform sind die reellen Nullstellen des Nennerpolynoms ablesbar.

## ■ 4.4 Totzeit-Strecke mit Verzögerung

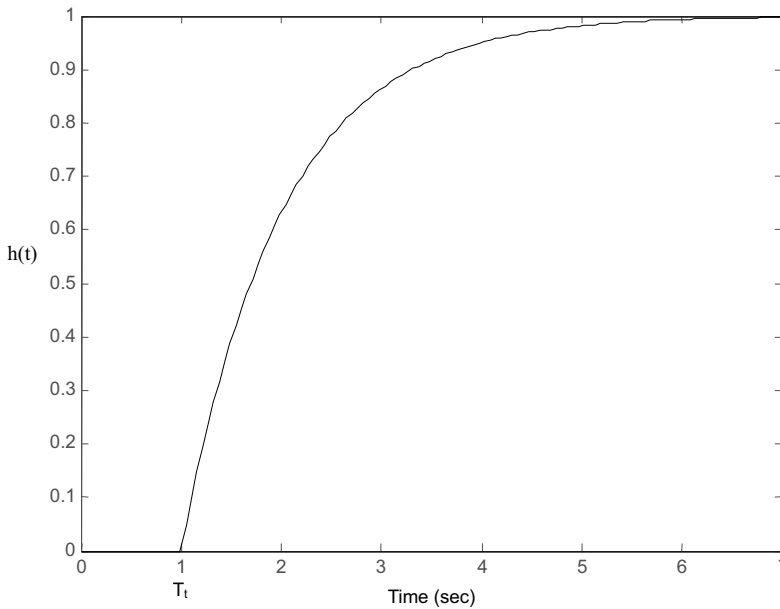
Die Klassifikation von Regelstrecken umfasst auch Systeme, die aus der Reihenschaltung von elementaren Übertragungsgliedern und einem  $P-T_1$ -Glied bestehen. Das Totzeitglied und der Integrierer haben in diesem Zusammenhang eine Bedeutung für die praktische Regelungstechnik. Die Reihenschaltung aus Totzeitglied und  $P-T_1$ -Glied ergibt die Totzeit-Strecke mit Verzögerung:



mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sT_r}$$

Derartige Streckenmodelle ergeben sich, wenn z. B. Transportvorgänge vorliegen. Die Totzeit, Verstärkung und auch die Zeitkonstante  $T$  sind auf der Grundlage der Sprungantwort ermittelbar (Bild 4.15).



**Bild 4.15** Sprungantwort Totzeit mit Verzögerung



#### web403

**Listing 4.3** Totzeit mit Verzögerung mit Padé-Approximation, siehe *einstieg-rt.de/web403*

Liegt eine Reihenschaltung aus Totzeit und P-T<sub>n</sub>-Glieder vor, dann ist die Bestimmung der Totzeit und des P-T<sub>n</sub>-Ersatzmodells nicht mehr mit einfachen Mitteln durchführbar.

Um eine Totzeit im Rahmen des Reglerentwurfs berücksichtigen zu können, sind Ersatzmodelle z. B. in Form von Verzögerungsgliedern P-T<sub>1</sub> oder P-T<sub>n</sub> geeignet (siehe Abschnitt 4.1 und 4.2). Die beste Näherung erhalten wir mit Ersatzmodellen hoher Ordnung, z. B. mit einem P-T<sub>n</sub> mit  $n$  Ersatzzeitkonstanten  $T_E = T_t/n$ . Die Python Control Library stellt die Funktion `pade(T,n,numdeg)` zur Verfügung. Auf Grundlage der Padé-Approximation wird eine gebrochen rationale Funktion mit dem Zählergrad  $n$  sowie dem Nennergrad `numdeg` berechnet und eine Übertragungsfunktion gebildet, siehe auch *einstieg-rt.de/web403*. Derartige Übertragungsfunktionen bieten eine gute Approximation einer Totzeit.

Der Reglerentwurf für Strecken mit Totzeit wird oft im Frequenzbereich durchgeführt. Eine Totzeit verursacht im offenen Kreis eine große Phasendrehung, die die Amplituden- und Phasenreserve reduziert. Daher sollte eine Approximation der Totzeit gerade im Frequenzbereich gut sein. Der Verlauf der Ortskurve des Totzeitgliedes ist kreisförmig (Bild 4.16), und der Verlauf der Ortskurve eines P-T<sub>1</sub> bildet einen Halbkreis (Bild 4.17).

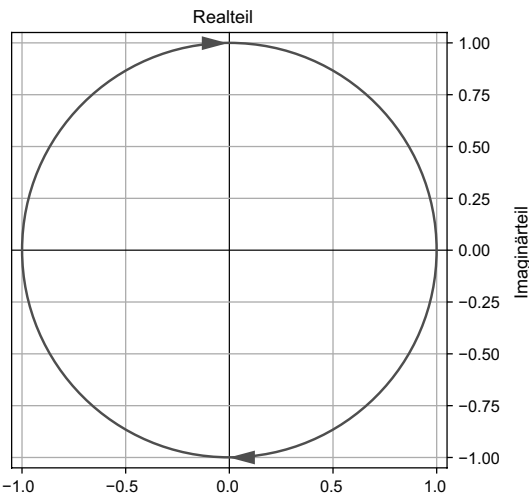


Bild 4.16: Ortskurve Totzeitglied

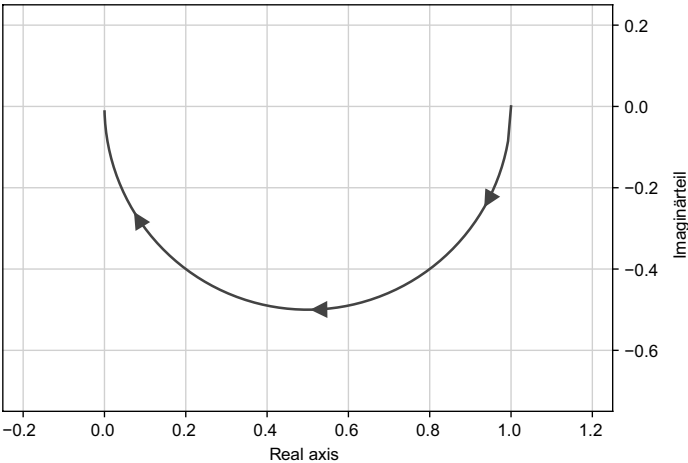
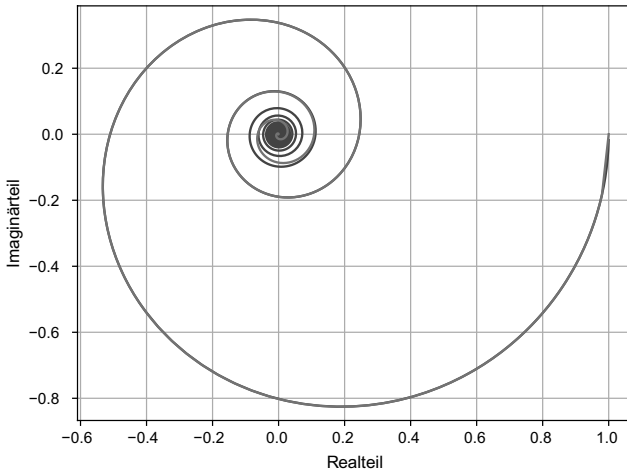


Bild 4.17: Ortskurve P-T<sub>1</sub>

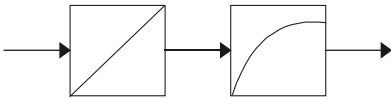
Ein  $T_1P-T_1$ -Glieder, d. h. die Reihenschaltung von Totzeitglied und  $P-T_1$ , führt zu einer Ortskurve in Spiralform (Bild 4.18). Ebenfalls in Bild 4.18 eingezeichnet ist die Ortskurve einer Approximation der Totzeit gemäß Padé in einer Reihe mit einem  $P-T_1$ . Im äußeren Bereich sind die Ortskurven deckungsgleich. Dieser Bereich ist wichtig für die Ermittlung der Phasen- und Amplitudenreserve beim Reglerentwurf (siehe Abschnitt 6.3 und 6.4).



**Bild 4.18** Ortskurve T<sub>1</sub>P-T<sub>1</sub>-Glieder und Ortskurve P-T<sub>1</sub> mit Padé-Approximation der Totzeit

## ■ 4.5 Integrale Strecke mit Verzögerung (I-T<sub>1</sub>-Glieder)

Die Reihenschaltung von Integrator und P-T<sub>1</sub>-Glieder ergibt die integrale Strecke mit Verzögerung, die auch als I-T<sub>1</sub>-Glieder bezeichnet wird.

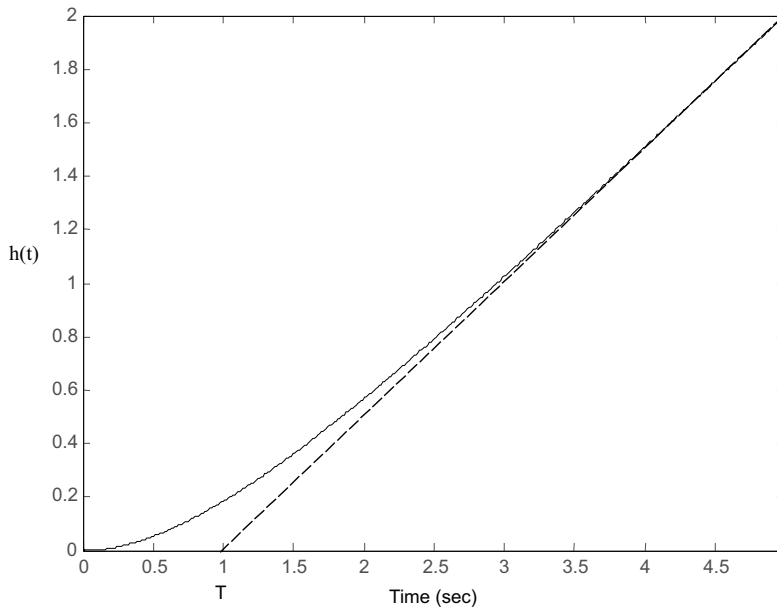


Das I-T<sub>1</sub>-Glieder hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

und weist eine Sprungantwort gemäß Bild 4.19 auf.





**Bild 4.19** Sprungantwort I-T<sub>1</sub>-Glied ( $K = 0,5$  und  $T = 1$ )

Die Zeitkonstante  $T$  ist, wie in Bild 4.19 gezeigt, einfach mithilfe einer Tangente ermittelbar. Die Verstärkung ergibt sich aus der Steigung der Sprungantwort nach dem Einschwingen des P-T<sub>1</sub>-Gliedes:

$$K = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2}{4}$$

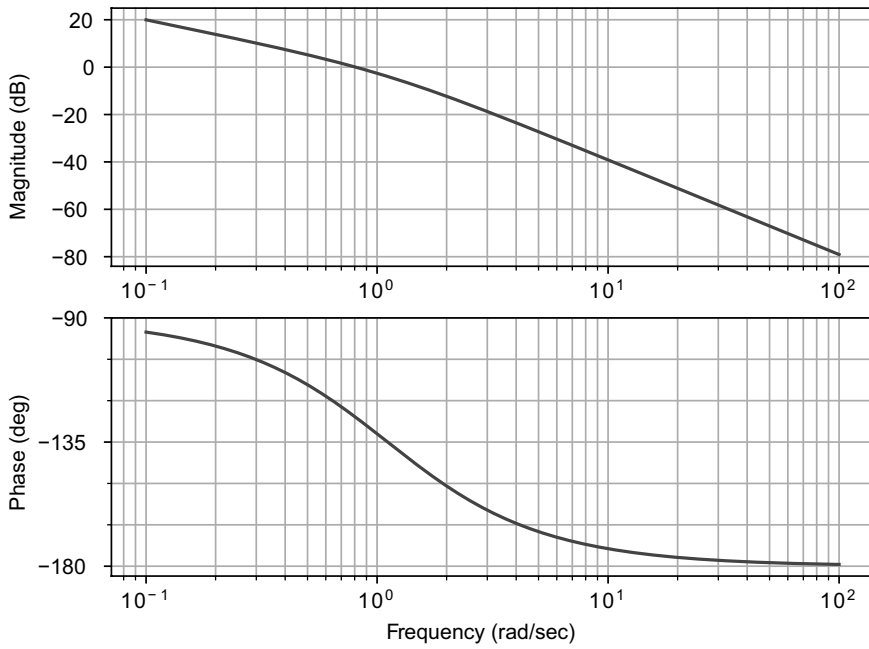
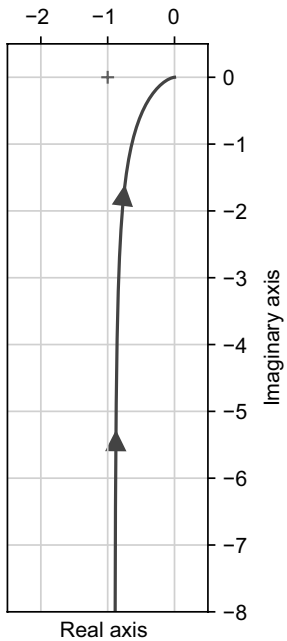


**web404**

**Listing 4.4** I-T<sub>1</sub> - Strecke, siehe [einstieg-rt.de/web404](http://einstieg-rt.de/web404)

Die gezeigte I-T<sub>1</sub>-Strecke gehört zu den Strecken ohne Ausgleich, da das Systemverhalten nicht mehr als stabil gilt.

Im Frequenzbereich weist ein I-T<sub>1</sub> einen fallenden Amplitudengang auf. Die Phase beginnt bei  $-90$  Grad und fällt auf  $-180$  Grad, wie das Bode-Diagramm in Bild 4.20 zeigt. Die Ortskurve beginnt im negativen Unendlichen und endet im Ursprung. Die Darstellung der Ortskurve kann bei diesem Systemtyp und der Verwendung der Befehle `nyquist()` bzw. `nyquist_plot()` aus der Control Systems Library einen anderen Verlauf aufweisen. Zum einen erfolgt dort die Darstellung des Verlaufs auch für negative Frequenzen, und zum anderen beginnt die Ortskurve an der reellen Achse. In diesem Buch wird diese Darstellung nicht verwendet, sondern die in Bild 4.21 gezeigte.

**Bild 4.20:** Bode-Diagramm IT1**Bild 4.21:** Ortskurve IT1

## ■ 4.6 Lead-Lag-Glied

Das nachfolgende System erster Ordnung wird als Lead-Lag-Glied bezeichnet. In Abhängigkeit vom Parameter  $a$  kann ein phasenhebendes Verhalten ( $a > 1$ , Lead) oder ein phasenabsenkendes Verhalten ( $a < 1$ , Lag) erzielt werden.

$$G(j\omega) = \frac{aTj\omega + 1}{Tj\omega + 1}$$

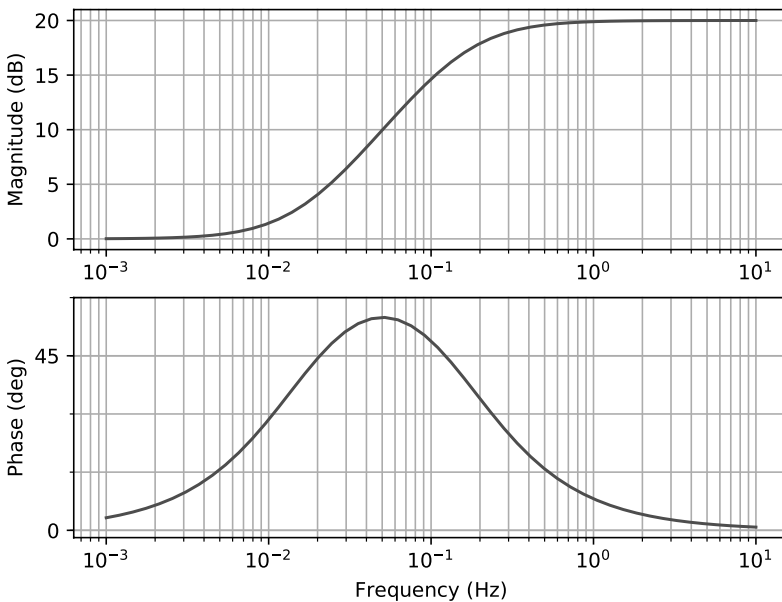
Das Lead-Glied entspricht einem PD- $T_1$ -Regler, siehe Abschnitt 5.3. Die Beeinflussung der Phase erfolgt in einem eingeschränkten Frequenzbereich. Die Verstärkung bleibt nach einem Übergangsbereich konstant. Die Berechnung des Bode-Diagramms erfolgt mit den folgenden Aufrufen:



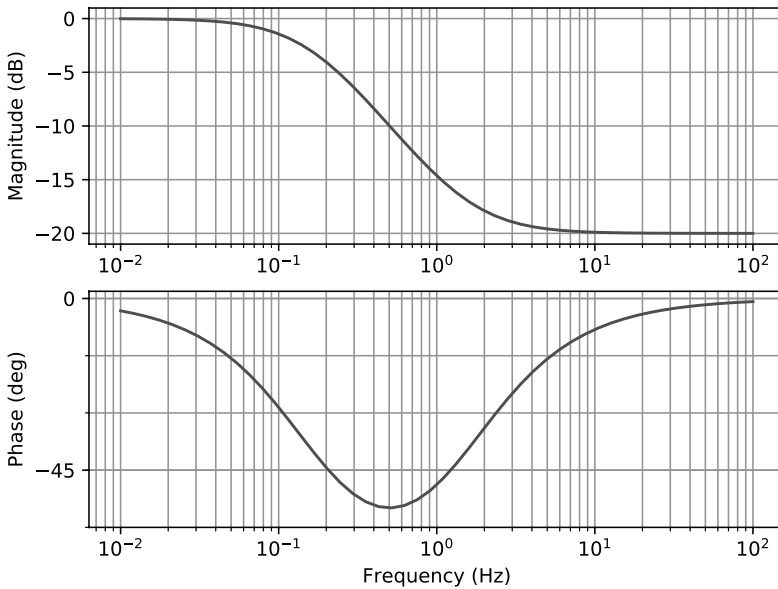
### web405

**Listing 4.5** Lead-Lag, siehe [einstieg-rt.de/web405](http://einstieg-rt.de/web405)

```
T = 1
a = 10
GLL = tf([a*T, 1],[T, 1]) # Lead Lag
mag, phase, w = control.matlab.bode(GLL)
```



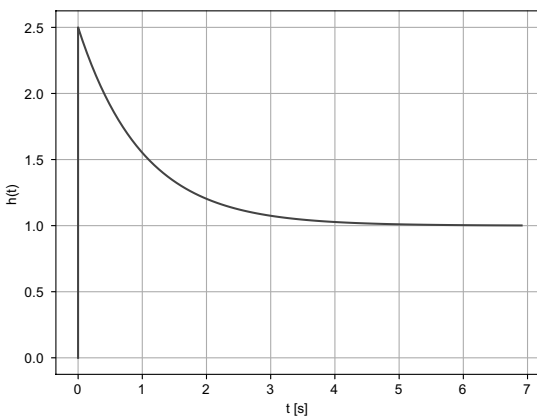
**Bild 4.22** Lead mit  $a = 10$  und  $T = 1$



**Bild 4.23** Lag mit  $a = 0.1$  und  $T = 1$

Lead- und Lag-Glieder können miteinander kombiniert werden, um einen bestimmten Frequenzgang zu erzeugen. In Abschnitt 9.1.4 und 9.1.5 wird auf das Lead-Glied nochmal eingegangen.

Die Sprungantwort des Lead-Gliedes ( $a > 1$ ) zeigt Bild 4.24. Die Sprungantwort beginnt beim Maximalwert und fällt auf den Endwert, der für  $t > 0$  das Minimum darstellt. Diese Sprungantwort weist ebenfalls der PD-Regler auf, der die gleiche Übertragungsfunktion hat. Die Sprungantwort des Lag-Gliedes ( $a < 1$ ) zeigt Bild 4.25. Die Sprungantwort beginnt in diesem Beispiel beim Wert 0,5 und steigt auf den Endwert, der das Maximum darstellt.



**Bild 4.24:** Sprungantwort Lead

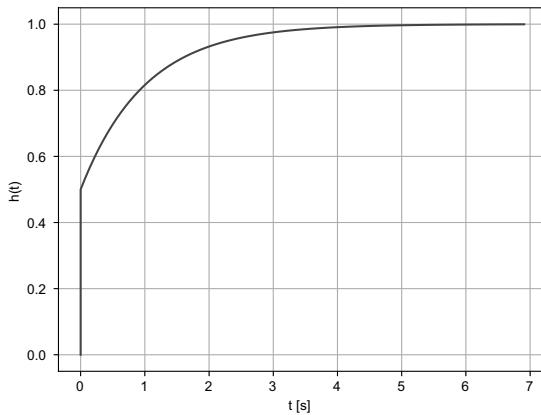


Bild 4.25: Sprungantwort Lag

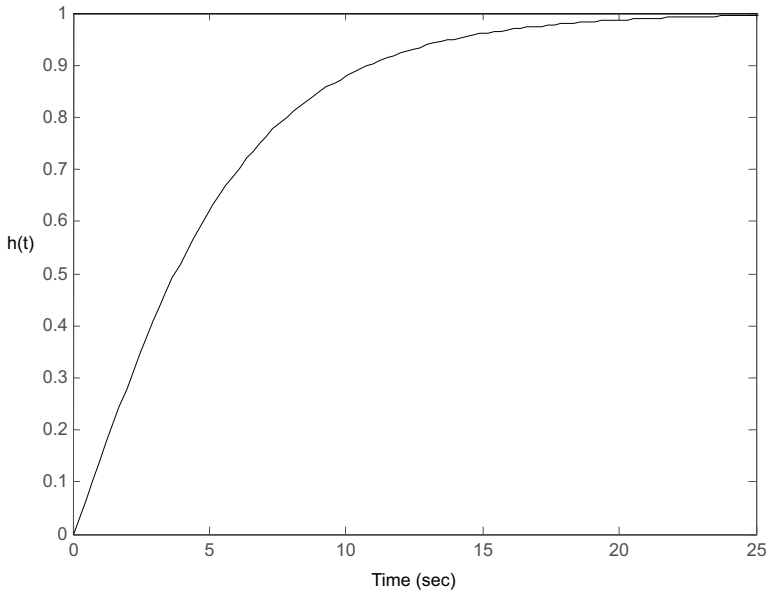
## ■ 4.7 Das allgemeine rationale Übertragungsglied

Die bisher behandelten Streckentypen wiesen im Zähler der Übertragungsfunktion lediglich den Koeffizienten  $b_0$  auf. Das allgemeine Übertragungsglied

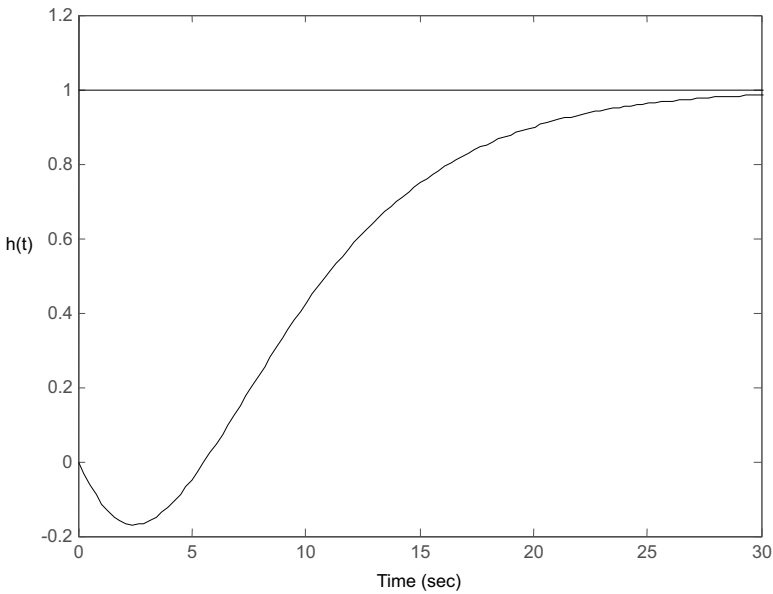
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad m < n$$

ist durch ein Nenner- und ein Zählerpolynom gekennzeichnet. Die Ordnung des Zählerpolynoms ist kleiner als die des Nennerpolynoms. Diese Bedingung gilt für physikalische Systeme, die nicht sprungfähig sein können. Das dynamische Verhalten eines allgemeinen Übertragungsgliedes ist nicht mehr einfach charakterisierbar. In Abhängigkeit von den Polen (d.h. Nullstellen des Nennerpolynoms) und den Nullstellen des Zählerpolynoms ergeben sich unterschiedlichste Übergangsfunktionen.

$$G_A(s) = \frac{(4s+1)(s+1)}{(5s+1)(3s+1)(2s+1)}$$



$$G_B(s) = \frac{(-4s+1)(s+1)}{(5s+1)(3s+1)(2s+1)}$$



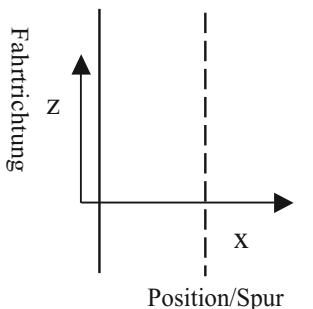
**Bild 4.26** Übergangsfunktionen allgemeines Übertragungsglied  $G_A(s)$  und  $G_B(s)$

Die Übertragungsfunktionen in Bild 4.26 unterscheiden sich in den Nullstellen des Nennerpolynoms.  $G_A(s)$  besitzt zwei negative Nullstellen. Die dazugehörige Sprungantwort hat große Ähnlichkeit mit der Sprungantwort eines P-T<sub>1</sub>-Systems, obwohl die Ordnung  $n =$

3 beträgt.  $G_B(s)$  hat eine positive und eine negative Nullstelle und ein originelles dynamisches Verhalten. Die Sprungantwort verläuft zunächst in negativer Richtung, um dann wie ein  $P-T_n$ -System zu verlaufen. Derartige Systeme werden nichtminimalphasige Systeme bzw. Systeme mit Allpassverhalten genannt [Föl94], [Fra02] und können beim Reglerentwurf für einige Probleme sorgen. Die Wirkung des Ruders eines Schiffes führt zunächst zu einer negativen Auslenkung des Hecks. Ein weiteres Beispiel für ein Allpass-System stellt ein DC-Motor dar, der über das Feld gesteuert wird.

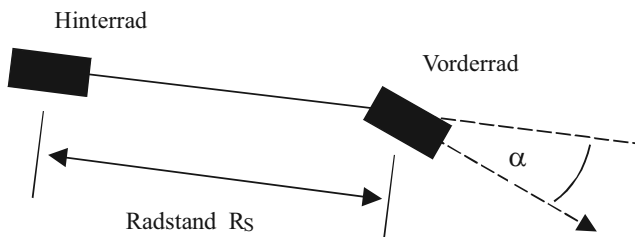
## ■ 4.8 Strecke ohne Ausgleich: Beispiel Fahrzeuglenkung

Das vorgestellte Modell soll die Wirkung der Lenkung auf die Ortsänderung eines Fahrzeuges, d. h. die Querdynamik, beschreiben. Voraussetzung ist zunächst eine konstante und geringe Geschwindigkeit, d. h., Querbeschleunigungen aufgrund von Zentrifugalkräften werden ausgeschlossen. Besondere Bedeutung haben die Koordinatensysteme des Fahrzeuges und der Umwelt. Das Umweltkoordinatensystem zeigt den Ort des Fahrzeuges auf der Fahrbahn (Bild 4.27). Das Fahrzeug wird auf dieses Koordinatensystem bezogen. Die Modellbildung erfolgt mithilfe des **Einspurmodells**, bei dem die Räder einer Achse als ein Rad zusammengefasst werden und damit die Fahrzeugbreite unbetrachtet bleibt (Bild 4.28).



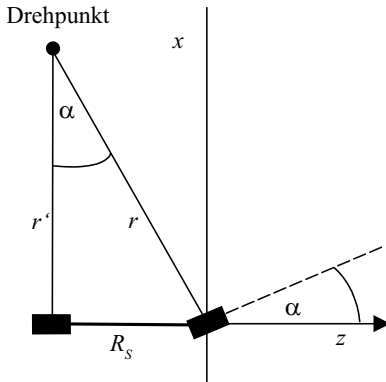
**Bild 4.27** Umweltkoordinatensystem

Wichtig für einen Reglerentwurf ist die Betrachtung der Spurkoordinate, die die Regelgröße darstellt. Aus diesem Grunde wird abweichend von den Bezeichnungen der Automobilhersteller die Längsrichtung des Fahrzeuges mit  $z$  und die Seitenrichtung mit  $x$  gekennzeichnet.



**Bild 4.28** Einspurmodell

Das Ackermann-Gesetz beschreibt bei fliehkraftfreier Fahrt den Zusammenhang zwischen Lenkwinkel  $\alpha$ , Fahrzeuglänge (Radstand)  $R_s$  und Kurvenradius  $r$  (siehe auch [Hak11]). Die Achsen des Fahrzeuges zeigen auf den Mittelpunkt des Kreises (Bild 4.29).



**Bild 4.29** Beginn Kreisfahrt im Koordinatensystem

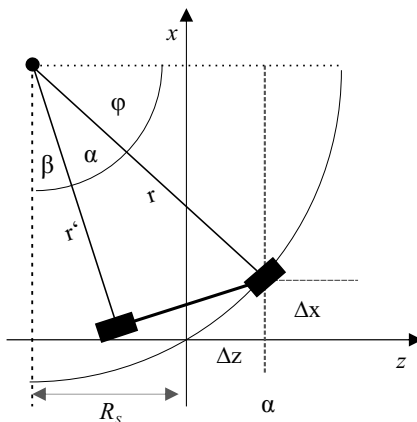
Der Kurvenradius bei Kreisfahrt ergibt sich aus:

$$r = \frac{R_s}{\sin \alpha}$$

und der Radius der Kreisfahrt bezogen auf das Hinterrad gemäß:

$$r' = \frac{R_s}{\tan \alpha}$$

Bewegt sich das Fahrzeug mit dem konstanten Lenkwinkel  $\alpha \neq 0$  auf einer Kreisbahn, legt es startend im Ursprung die Strecke  $dl$  auf dem Kreisbogen zurück und erreicht den Punkt  $\Delta x, \Delta z$  (Bild 4.30):



**Bild 4.30** Fahrt auf Kreisabschnitt



Das auf den Drehpunkt bezogene Fahrzeug dreht sich um den Winkel

$$\beta = dl/r$$

Die Punkte  $\Delta x$  sowie  $\Delta z$  sind mithilfe des Winkels  $\varphi$  berechenbar:

$$\Delta x = r' - r \sin \varphi \quad \Delta z = r \cos \varphi - R_s$$

Der Winkel  $\varphi$  ergibt sich für kleine Wegstrecken gemäß  $\varphi = 90^\circ - \alpha - \beta$  und folglich ist

$$\Delta x = r' - r \cos(\alpha + \beta) \quad \Delta z = r \sin(\alpha + \beta) - R_s$$

Die Ableitung nach der Zeit unter Annahme eines konstanten Lenkwinkels ergibt

$$\dot{\beta} = \frac{v}{r} = \frac{v}{R_s} \sin \alpha$$

und

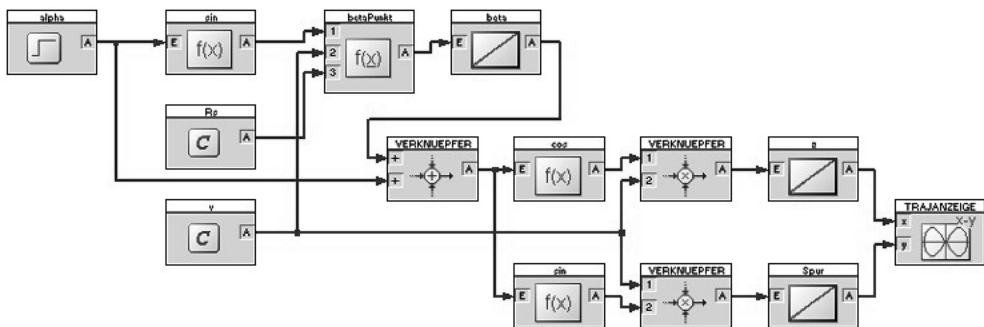
$$\dot{x} = v \sin(\alpha + \beta) \quad \dot{z} = v \cos(\alpha + \beta)$$



#### web406

**Listing 4.6** Simulation mit Python, siehe [einstieg-rt.de/web406](http://einstieg-rt.de/web406)

Diese drei verkoppelten nicht linearen Differenzialgleichungen können mit WinFact, wie in Bild 4.31 gezeigt, simuliert werden.



**Bild 4.31** Modell Querdynamik

Das Spurmodell muss noch für den Reglerentwurf linearisiert werden. Ausgehend von

$$\Delta x = r' - r \cos(\alpha + \beta) = \frac{R_s}{\tan \alpha} - \frac{R_s}{\sin \alpha} \cos(\alpha + \beta)$$

und

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Delta x = \frac{R_s}{\sin \alpha} [\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)]$$

sowie den Näherungen

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{und} \quad \beta \approx \frac{dl}{R_s} \alpha$$

sowie mit

$$dl = vt$$

ist

$$x \approx \frac{R_s}{\alpha} \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2} - 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2} \right] \approx R_s \left[ \beta + \frac{\beta^2}{2\alpha} \right]$$

$$x \approx dl\alpha + \frac{dl^2}{2R_s} \alpha \approx vt\alpha + \frac{v^2}{R_s} \frac{t^2}{2} \alpha$$

Eine Laplace-Transformation dieser Sprungantwort,  $\alpha$  wird ja als konstant angenommen, ergibt:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} v\alpha + \frac{1}{s^3} \frac{v^2}{R_s} \alpha$$

und schließlich die Übertragungsfunktion des linearisierten Modells:

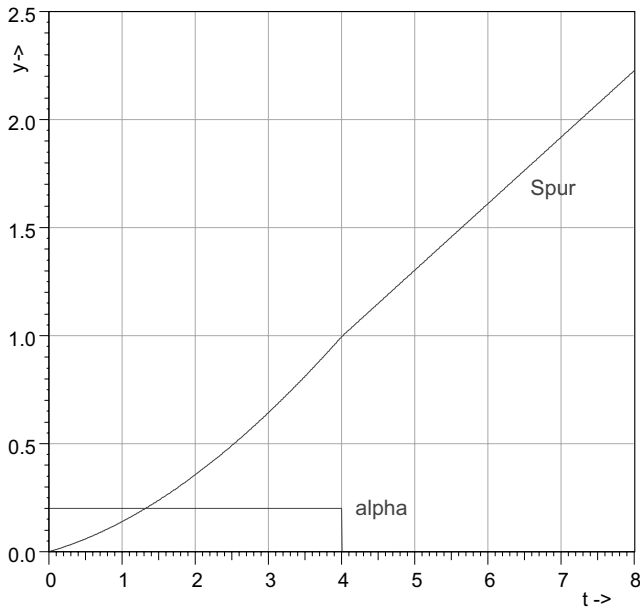
$$G(s) = \frac{1}{s} v + \frac{1}{s^2} \frac{v^2}{R_s} = \frac{vs + \cancel{v^2} / R_s}{s^2}$$

Falls hohe Geschwindigkeiten vorliegen, kann mit einem noch einfacheren Modell gearbeitet werden:

$$G(s) = \frac{\cancel{v^2} / R_s}{s^2}$$

In beiden Fällen liegt ein Doppelintegrierer vor, der einen D-Anteil im Regler zur Kompensation erfordert.

In Bild 4.32 wird die Reaktion der x-Koordinate (Spur) auf einen Impuls des Lenkwinkels von  $0,2 \text{ rad}$  für die Dauer von vier Sekunden gezeigt. Das Fahrzeug hat die Daten  $R_s = 0,6 \text{ m}$  und  $v = 0,5 \text{ m/s}$ .



**Bild 4.32** Reaktion der Spur auf eine impulsförmige Änderung des Lenkwinkels

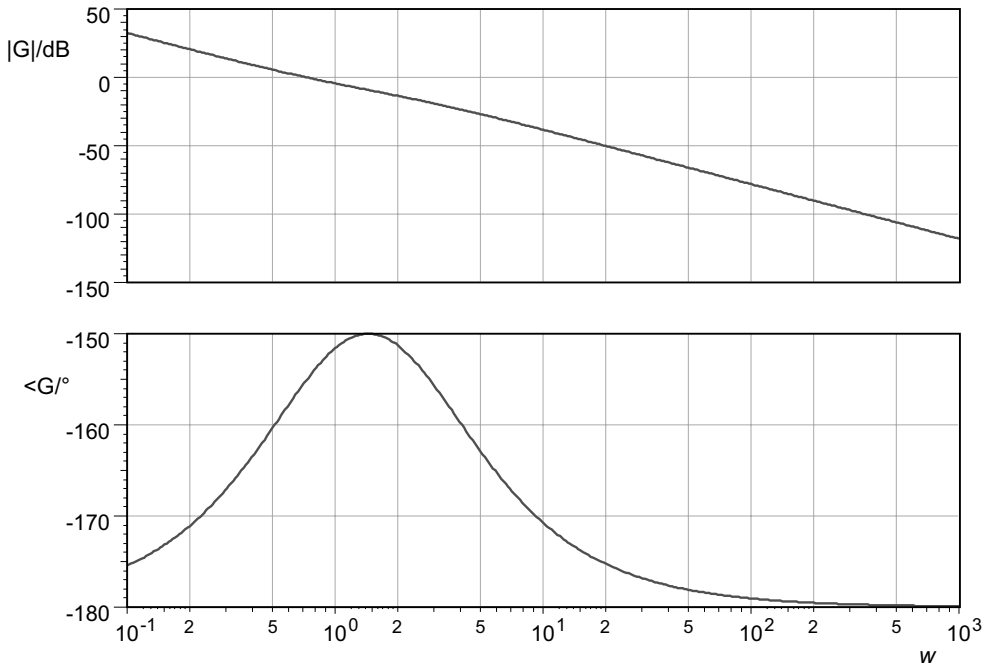
Die Ausgangsgröße strebt im vorliegenden Fall einer impulsförmigen Eingangsgröße gegen unendlich. Obwohl die Eingangsgröße nach vier Sekunden den Wert null aufweist, vergrößert sich die Ausgangsgröße. Ursächlich dafür ist der erste Integrierer, der nach vier Sekunden einen positiven Ausgangswert speichert, wobei dieser die Eingangsgröße des zweiten Integrierers darstellt. Somit wächst die Ausgangsgröße des zweiten Integrierers nach vier Sekunden in Form einer Rampenfunktion. Die Regelung einer Strecke mit Doppelintegrierer erfordert das Zurückführen der Ausgangsgröße des ersten Integrierers auf 0. Dann und nur dann wird die Ausgangsgröße eines Doppelintegrierers einen konstanten Wert annehmen.

Damit  $x(t)$  wieder einen konstanten Wert annimmt bzw. wieder den Wert 0 (Fahrbahnmittelpunkt) aufweist, muss  $\alpha$  in negativer Richtung verändert werden und danach null sein. Im Fall eines Spurwechsels muss ein Gegenlenken erfolgen! In Abschnitt 9.1.5 wird ein Reglerentwurf für die Fahrzeuglenkung behandelt.

Die Verstellung des Vorderrades wird im Fall eines autonomen Fahrzeuges von einem Lenkmotor mit Lenkwinkelregelung erfolgen. Diese zusätzliche Dynamik kann mit einem  $P-T_1$  Ersatzmodell berücksichtigt werden.

$$G(s) = \frac{v_s + v^2 / R_s}{s^2 (T_1 s + 1)}$$

Die Betrachtung der Strecke im Frequenzbereich zeigt im Bode-Diagramm (Bild 4.33) ein Maximum der Phasenverschiebung im Bereich 1–2 rad/s.



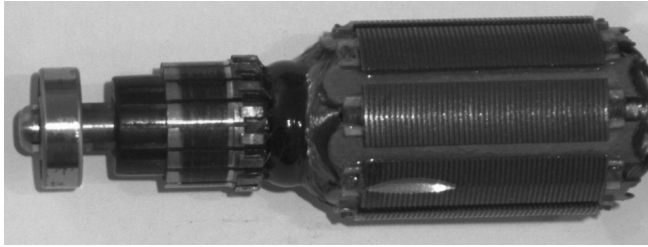
**Bild 4.33** Bode-Diagramm der Strecke

Aufgrund des Doppelintegrierers beginnt die Phasenkennlinie bei  $-180^\circ$ , erfährt eine Anhebung und fällt wieder mit steigender Frequenz auf  $-180^\circ$ . Dieser Verlauf wird im Zusammenhang mit Antriebsregelungen in Abschnitt 9.1.4 und der Querdynamikregelung in Abschnitt 9.1.5 von Bedeutung sein.

## ■ 4.9 Strecke mit Ausgleich: Beispiel DC-Motor

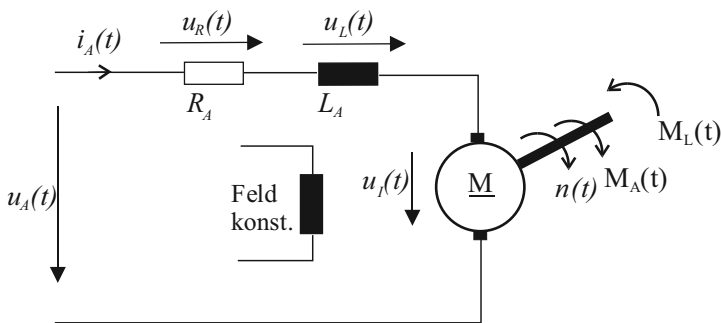
Elektromotoren sind seit weit über 100 Jahren fester Bestandteil vieler industrieller und privater Anwendungen. Oft findet eine Drehzahlregelung Verwendung. Im Rahmen einer Modellbildung für einen Gleichstrom-Nebenschlussmotor wird die Wirkung der Ankerspannung auf die Drehzahl herausgearbeitet. Es werden die für die Regelung des Motors wichtigen Aspekte betrachtet. Ein DC-Motor besteht prinzipiell aus einer drehbaren Leiter-schleife, die aufgrund eines Stromflusses ein Magnetfeld aufweist und eine Kraftwirkung auf ein fest stehendes Magnetfeld ausübt. Die Drehbewegung wird durch mechanisches

Umschalten mithilfe eines Kommutators aufrechterhalten. Bild 4.34 zeigt den drehbaren Anker mit Kommutator, wobei Kohlebürsten zur Übertragung des Stromes verwendet werden.



**Bild 4.34** Anker eines DC-Motors

Eine einfache elektrotechnische Darstellung (Bild 4.35) umfasst im Wesentlichen die Induktivität und den Widerstand der Ankerwicklung. Die Wirkungen des Kommutators sowie Nichtlinearitäten und Rückwirkungen zwischen den Feldern werden vernachlässigt.



**Bild 4.35** Einfaches elektrotechnisches Ersatzbild

Die Feldwicklung kann parallel zur Ankerspannung geschaltet oder variabel bestromt werden. Permanentmagnete können ebenfalls das feststehende Statorfeld bilden. Die nachfolgende Modellbildung gilt für den Nebenschlussmotor mit konstantem Feld gemäß Bild 4.35. Ein DC-Motor wird durch zwei Gleichungen beschrieben, und zwar durch die 1. Hauptgleichung der Gleichstrommaschine:

$$u_I = 2\pi c\Psi n$$

und durch die 2. Hauptgleichung:

$$M_A = c\Psi i_A$$

wobei  $c$  die Motorkonstante,  $\Psi$  den Fluss,  $i_A$  den Ankerstrom und  $n$  die Drehzahl darstellen.

Aufgrund der Drehbewegung des Ankers bzw. Läufers wird eine Spannung  $u_I$  in der Leitterschleife induziert. Dieser Zusammenhang wird durch die 1. Hauptgleichung beschrieben.

Der Ankerstrom verursacht gemäß 2. Hauptgleichung ein Drehmoment  $M_A$ . Wichtig ist die Betrachtung der Einheiten, da so die Korrektheit beispielsweise der 2. Gleichung überprüft werden kann.

$$M [Nm] \quad c\Psi [Vs] \quad u [V] = \left[ \frac{Nm}{C} \right] \quad i [A] = \left[ \frac{C}{s} \right]$$

C ist in diesem Zusammenhang die Ladungseinheit Coulomb. Besonders hervorzuheben ist die Einheit der Drehzahl, die üblicherweise in Umdrehungen pro Minute angegeben wird. Gerechnet wird jedoch in Umdrehungen pro Sekunde!

$$n \quad \left[ \frac{1}{s} \right]$$

In die Maschengleichung

$$u_A = u_R + u_L + u_I$$

werden

$$u_R = Ri_A \quad u_L = L \frac{di_A}{dt}$$

und die 1. Hauptgleichung eingesetzt

$$u_A = Ri_A + L \frac{di_A}{dt} + 2\pi c\Psi n$$

Einfügen der umgestellten 2. Hauptgleichung ergibt:

$$u_A = \frac{R}{c\Psi} M_A + \frac{L}{c\Psi} \dot{M}_A + 2\pi c\Psi n$$

Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen dem Ankermoment und der Drehzahl. Hier hilft der Impulsmomentensatz weiter:

$$M_B = M_A - M_L = 2\pi J \frac{dn}{dt}$$

Das Beschleunigungsmoment ergibt sich aus Anker- minus Lastmoment. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses bzw. der Drehzahl ist proportional zum Beschleunigungsmoment.  $J$  bezeichnet das Trägheitsmoment der rotierenden Massen, d. h. des Ankers und der angekuppelten Maschinen.

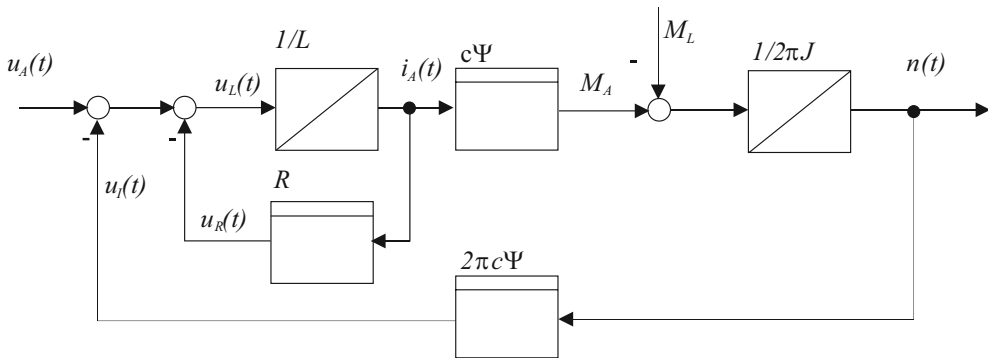
Kontrolle der Einheiten:

$$M_b \quad [Nm] = \left[ kg \frac{m}{s^2} m \right], \quad J \quad [kgm^2], \quad \frac{dn}{dt} \quad \left[ \frac{1}{s^2} \right]$$

Aus dem Impulsmomentensatz ist durch Integration die Drehzahl berechenbar.

$$n = \frac{1}{2\pi J} \int M_A - M_L dt$$

Ein Wirkungsplan des Gleichstrommotors (Nebenschluss) lässt sich direkt aus den bisherigen Einzelgleichungen entwickeln und hat die Struktur gemäß Bild 4.36.



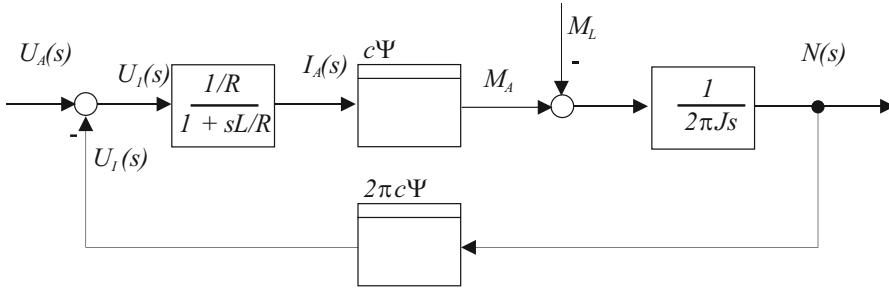
**Bild 4.36** Wirkungsplan Gleichstrom-Nebenschlussmotor

Der Wirkungsplan gemäß Bild 4.36 bietet eine gute Grundlage für eine Simulation, da keine Differenzierer enthalten sind. Der Wirkungsplan kann im Laplace-Bereich etwas vereinfacht werden, da das P- und I-Glied am Anfang durch ein P-T<sub>1</sub>-Glied ersetzbar sind (Bild 4.37). Mit

$$U_1(s) = U_A(s) - U_f(s)$$

ergibt sich für den Ankerstrom:

$$I_A(s) = \frac{1}{Ls} (U_1(s) - RI_A(s)) \quad I_A(s) = \frac{1/R}{\frac{L}{R}s + 1} U_1(s)$$



**Bild 4.37** Wirkungsplan DC-Motor mit P-T<sub>1</sub>

Für weitere regelungstechnische Betrachtungen ist die Entwicklung der DGL und schließlich der Übertragungsfunktion erforderlich. Ausgehend von der bereits hergeleiteten Gleichung:

$$u_A = \frac{R}{c\Psi} M_A + \frac{L}{c\Psi} \dot{M}_A + 2\pi c\Psi n$$

und  $M_A = 2\pi J \dot{n} + M_L$  ergibt sich die DGL

$$u_A = \frac{R}{c\Psi} (2\pi J \dot{n} + M_L) + \frac{L}{c\Psi} (2\pi J \ddot{n} + \dot{M}_L) + 2\pi c\Psi n$$

in geordneter Form

$$u_A = \frac{2\pi J L}{c\Psi} \ddot{n} + \frac{2\pi J R}{c\Psi} \dot{n} + 2\pi c\Psi n + \frac{L}{c\Psi} \dot{M}_L + \frac{R}{c\Psi} M_L$$

Aufgabe: Kontrolle der Einheiten der DGL-Terme mit den oben angegebenen Einheiten und

$$R \text{ } [\Omega] = \left[ \frac{V}{A} \right], \quad L \text{ } [H] = \left[ \frac{Vs}{A} \right]$$

Laplace-Transformation der DGL:

$$U_A(s) = \left( \frac{2\pi J L}{c\Psi} s^2 + \frac{2\pi J R}{c\Psi} s + 2\pi c\Psi \right) N(s) + \left( \frac{L}{c\Psi} s + \frac{R}{c\Psi} \right) M_L(s)$$

Umstellen nach der Ausgangsgröße N(s)

$$N(s) = \frac{1}{\frac{2\pi J L}{c\Psi} s^2 + \frac{2\pi J R}{c\Psi} s + 2\pi c\Psi} U_A(s) - \frac{\frac{L}{c\Psi} s + \frac{R}{c\Psi}}{\frac{2\pi J L}{c\Psi} s^2 + \frac{2\pi J R}{c\Psi} s + 2\pi c\Psi} M_L(s)$$

Es ergeben sich zwei Übertragungsfunktionen 2. Ordnung, die die Wirkung der Ankerspannung auf die Drehzahl und die Wirkung des Lastmomentes auf die Drehzahl des



Motors wiedergeben. Das Lastmoment wirkt mit einem negativen Vorzeichen auf die Drehzahl. Der Motor weist ein schwingfähiges Verhalten auf, wenn

$$R^2 < \frac{4L (c\Psi)^2}{J}$$

ist.

Beweisskizze: Übertragungsfunktion durch Koeffizient  $a_2$  dividieren

$$N(s) = \frac{\frac{c\Psi}{2\pi J L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{(c\Psi)^2}{JL}} U_A(s)$$

Pole bestimmen:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{(c\Psi)^2}{JL}}$$

sowie klären, wann Pole konjugiert komplex werden.

Ist der Gleichstrommotor nicht schwingfähig, was in der Regel aufgrund der Trägheitsmomente im Antriebstrang vorausgesetzt werden darf, kann weiter vereinfacht werden. Die Ankerzeitkonstante  $T_A = L / R$  ist in der Regel sehr klein gegenüber der mechanischen Zeitkonstante des Systems. Durch Vernachlässigung der Ankerinduktivität und alleinige Betrachtung der Wirkung der Ankerspannung auf die Drehzahl verbleibt die Übertragungsfunktion 1. Ordnung:

$$N(s) = \frac{1}{\frac{2\pi J R}{c\Psi} s + 2\pi c\Psi} U_A(s) \quad N(s) = \frac{\frac{1}{2\pi c\Psi}}{\frac{J R}{(c\Psi)^2} s + 1} U_A(s)$$

Dass diese Vereinfachung angemessen ist, zeigt eine Messung der Sprungantwort, d.h. Sprung der Ankerspannung am bereits vorgestellten Labor-Gleichstrommotor (Simulation in Bild 9.14). Die Messung erfolgt im Arbeitspunkt und belegt ein P-T<sub>1</sub>-Verhalten.

In den technischen Unterlagen des DC-Motors 2237 cxx von Faulhaber finden sich für das Modell mit einer Betriebsspannung von 24 V folgende Angaben:

Nennndrehzahl = 4560 1/min	Leerlaufdrehzahl = 6900 1/min ±12 %
Nennstrom = 0,46 A	Leerlaufstrom = 0,029 A
Nennmoment = 12 mNm	Drehmomentkonstante = 0.0318 Vs
Induktivität = 0,59 mH	Widerstand = 15,7 Ohm ±12 %

An der Achse des Motors ist eine Schwungmasse montiert, die inklusive Rotorträgheitsmoment einen Wert von  $J = 75 \text{ gcm}^2$  verursacht. Es wird sich ungefähr eine mechanische Zeitkonstante von

$$T_{mech} = \frac{JR}{(c\Psi)^2} = 113 \text{ ms}$$

einstellen und damit deutlich größer als die elektrische Zeitkonstante sein

$$T_{el} = \frac{L}{R} = 37,6 \text{ } \mu\text{s}$$

Der Wirkungsplan kann somit weiter vereinfacht werden, indem das P-T<sub>1</sub>-Glieder durch ein P-Glied ersetzt wird. Da eine Reibung abschätzbar ist, kann diese in Form einer linearen Abhängigkeit von der Drehzahl modelliert werden. Das Reibmoment von

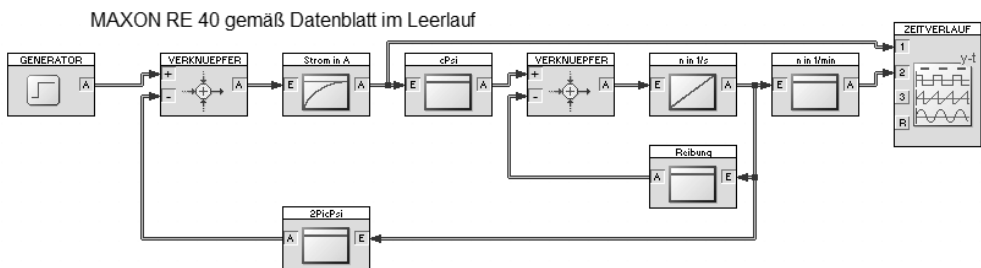
$$M_R = c\Psi i_{\infty} = 31,8 \text{ E}^{-3} \text{ Vs} \times 23 \text{ mA} = 0,73 \text{ mNm}$$

Dieses Reibmoment stellt sich bei dem (gemessenen) Strom von 23 mA und Drehzahl von 1250 1/min im eingeschwungenen Zustand ein. Im Wirkungsplan (Bild 4.38) kann die Reibung mit dem Faktor  $K_R = 35,82 \text{ E}^{-6} \text{ Nms}$  als Rückkopplung des Integrators modelliert werden.



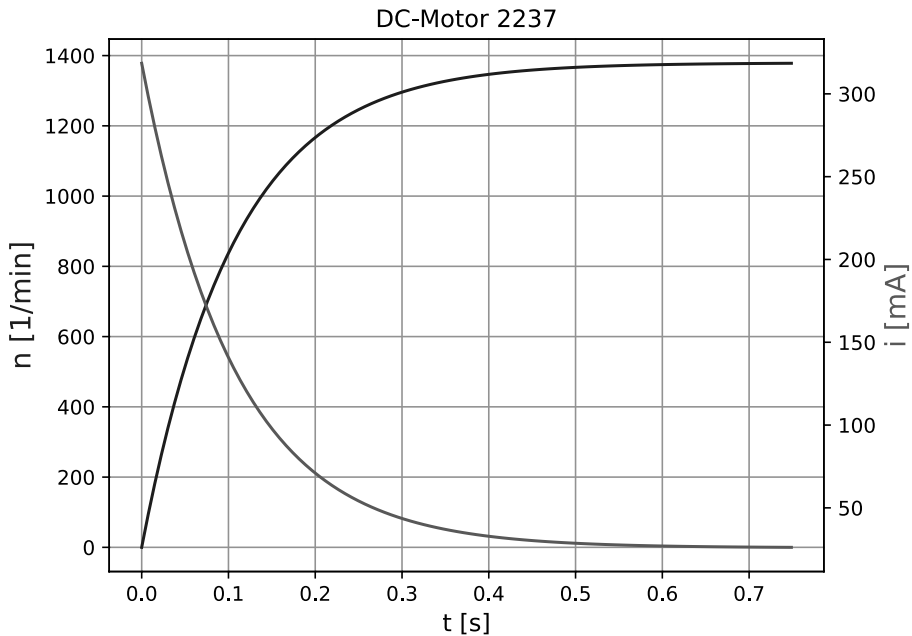
#### web407

**Listing 4.7** Simulation DC-Motor mit Python, siehe [einstieg-rt.de/web407](http://einstieg-rt.de/web407)



**Bild 4.38** Wirkungsplan Simulation DC-Motor mit WinFact

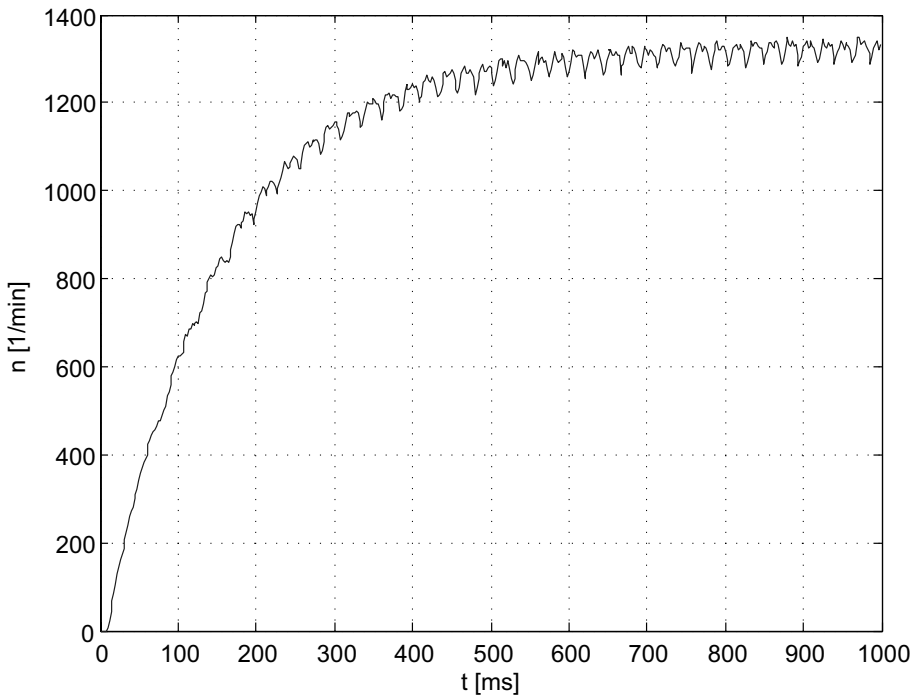
Die Simulation der Antwort auf einen Sprung der Ankerspannung von 0 auf 5 V zeigt das Bild 4.39.



**Bild 4.39** Simulation Sprungantwort Faulhaber-Motor 2237

Der Strom erreicht kurzzeitig 0,31 A und fällt auf den Leerlaufstrom. Die Drehzahl erreicht mit 1360 1/min nach ca. 500 ms den Endwert, wobei sich ein P-T<sub>1</sub>-Verlauf einstellt. Reale Messungen am 2237 bestätigen diese Aussage, wie die Sprungantwort in Bild 4.40 zeigt. Die Ankerspannung wurde mit einem Gleichspannungsverstärker sprungförmig von 0 auf 5 Volt erhöht. Der Versuch wurde mit dem Controller MC5005 und mit der Software Motion Manager durchgeführt. Die Drehzahl wurde mit 2 ms abgetastet.

Es ergibt sich eine Hochlaufzeitkonstante von ca. 140 ms und ein Endwert von 1313 1/min. Das reale Drehzahlsignal weist gleichmäßige Schwingungen auf, die typisch für einen zweipoligen Gleichstrommotor mit mechanischer Kommutierung sind.



**Bild 4.40** Reale Sprungantwort Faulhaber 2237

## ■ 4.10 Nicht lineare Strecke mit Ausgleich: Beispiel Fahrzeug

Im Rahmen des Entwurfs einer Geschwindigkeitsregelung oder Abschätzung der Reichweite von Fahrzeugen ist eine umfassende Modellbildung erforderlich. Insbesondere Elektrofahrzeuge, wie das untersuchte E-Kart (Bild 4.41), erfordern aufgrund der noch sehr begrenzten Batteriekapazität eine genaue Modellierung.



**Bild 4.41** Elektro-Kart

Werden Fahrzeuge mit hoher Geschwindigkeit bewegt, hat der Luftwiderstand einen erheblichen nicht linearen Einfluss. Der Luftwiderstand ist Bestandteil des Fahrwiderstandes eines Fahrzeuges. Der antreibenden Kraft  $F_A$ , die für die Bewegung eines Fahrzeuges erforderlich ist, wirken folgende Kräfte entgegen:

- $F_B$  Masse muss beschleunigt werden
- $F_H$  Höhenunterschied muss überwunden werden
- $F_{Reib}$  Rollwiderstand muss überwunden werden
- $F_{Luft}$  Luftwiderstand muss überwunden werden

Für die weiteren Betrachtungen wird kein Höhenunterschied angenommen. Der Beschleunigungswiderstand berechnet sich vereinfacht gemäß:

$$F_B = ma$$

Die im Fahrzeug befindlichen rotierenden Massen Motor, Getriebe, Wellen und die Räder werden hier nicht betrachtet. Ein Drehmassenzuschlag  $\varepsilon$  wird der Formel gemäß

$$F_B = (m + \varepsilon)a$$

hinzugefügt. Die Energie der beschleunigten Massen kann prinzipiell zurückgewonnen werden. Roll- und Luftwiderstand verursachen einen dissipativen Energiebedarf, d. h., es ist keine Rückgewinnung möglich.

Der Rollwiderstandsbeiwert und die Masse des Fahrzeuges gehen in die Berechnung der Rollreibung ein.

$$F_{Reib} = c_R mg$$

Die Rollreibung wird ohne Haftphase und als unabhängig von der Geschwindigkeit angenommen. Der Rollwiderstand hat mit ca. 80% [Hak11] den größten Anteil am Radwiderstand. Die Lagerreibung inklusive schleifender Bremsen sowie der Vorspurwiderstand können als konstant angenommen werden und gehen messtechnisch in  $c_R$  mit ein. Der Schwallwiderstand tritt auf im Fall nasser Fahrbahnen, der Federungswiderstand ist von der Streckenbeschaffenheit abhängig und der Kurvenwiderstand vom Streckenverlauf. Im Rahmen dieser Modellbildung wird nur die Rollreibung berücksichtigt.

Der Luftwiderstandsbeiwert, die wirksame Fahrzeugfläche, die spezifische Dichte der Luft und insbesondere die Geschwindigkeit bestimmen den Luftwiderstand.

$$F_{Luft} = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2$$

Der Kräftesumme

$$F_A = F_B + F_{Reib} + F_{Luft}$$

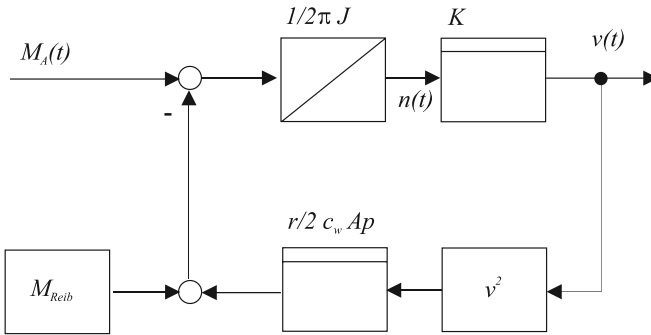
entspricht die Summe der Drehmomente an der Radachse:

$$M_A = M_B + M_{\text{Reib}} + M_{\text{Luft}} \quad \text{bzw.} \quad M_B = M_A - M_{\text{Reib}} - M_{\text{Luft}}$$

Auf Grundlage des Impulsmomentensatzes

$$M_B = 2\pi J \frac{dn}{dt}$$

kann ein Wirkungsplan erstellt werden.



**Bild 4.42** Wirkungsplan Fahrzeug

Die Drehzahl wird mit dem Faktor  $K$  in die Fahrzeuggeschwindigkeit umgerechnet. Die Fahrzeugmasse ist in  $J$  umrechenbar:

$$M = Fr$$

$$2\pi J \dot{n} = m \dot{v} r$$

$$n = \frac{v}{2\pi r} \quad \dot{n} = \frac{\dot{v}}{2\pi r} \quad \dot{v} = 2\pi r \dot{n}$$

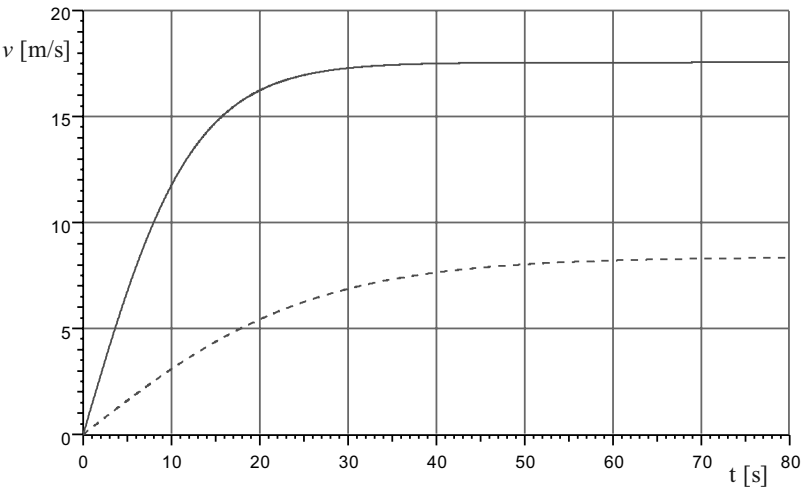
$$2\pi J \dot{n} = m 2\pi r^2 \dot{n}$$

$$J = m r^2$$

Falls die Fahrzeugmasse auf die Motorachse bezogen werden soll, ist die folgende Formel, die ohne Getriebefaktor auskommt, günstig:

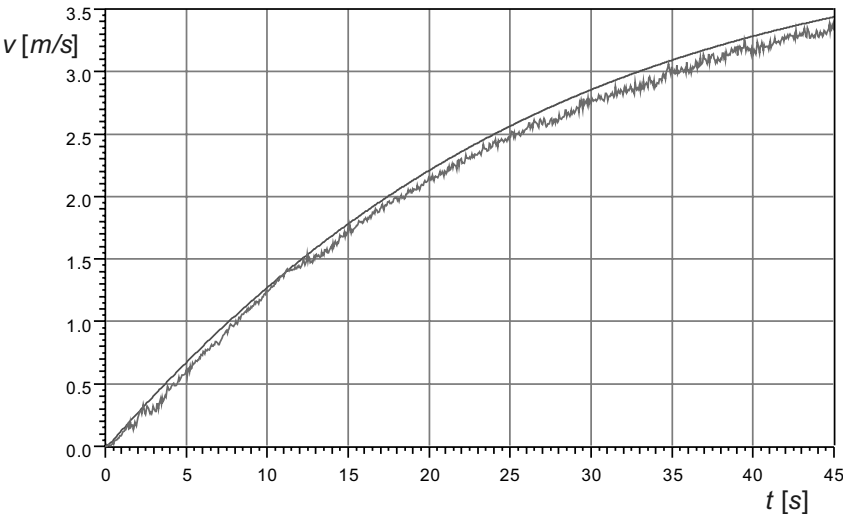
$$J = m \left( \frac{v}{2\pi n} \right)^2$$

Neben dem umgerechneten Anteil der Fahrzeugmasse müssen alle rotierenden Bestandteile des Antriebstranges, d.h. Motor, Getriebe, Kopplungen etc.  $J$ , hinzugefügt werden.



**Bild 4.43** Simulation Sprungantwort Fahrzeug für unterschiedliche Drehmomente

Das nicht lineare Verhalten verdeutlichen die Simulationen in Bild 4.43. Die gestrichelte Linie gibt den Geschwindigkeitsverlauf für einen Sprung des antreibenden Drehmomentes von 0 auf 10 Nm wieder. Die durchgezogene Linie zeigt  $v(t)$  für  $M_A = 30$  Nm. Im Fall eines linearen Systems stellt sich die dreifache Endgeschwindigkeit ein und die Hochlaufzeit wäre gleich. Das ist bei einem Fahrzeug aufgrund der quadratischen Wirkung des Luftwiderstandes anders. Das Hochlaufverhalten kann abschnittsweise durch ein  $P-T_1$ -Ersatzmodell nachgebildet werden, d. h., für unterschiedliche Geschwindigkeitsbereiche ist ein anderer  $P-T_1$ -Parametersatz gültig.

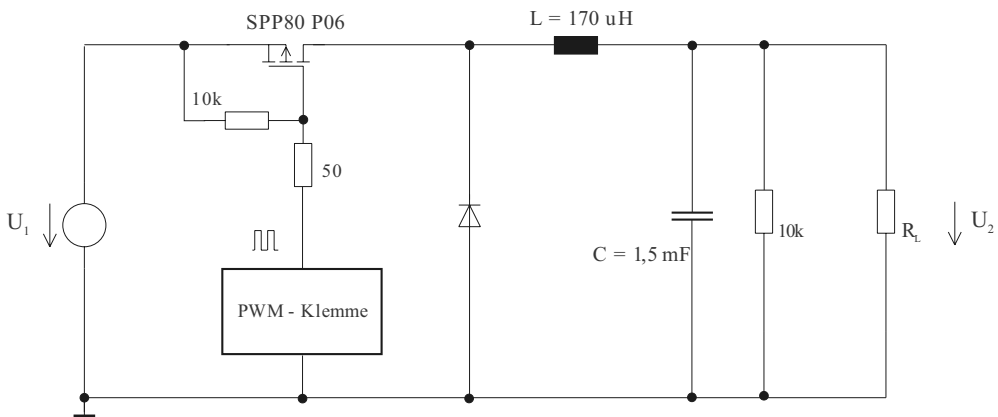


**Bild 4.44** Geschwindigkeitsverlauf Elektrofahrzeug im Vergleich mit  $P-T_1$ -Ersatzmodell

Messungen des Geschwindigkeitsverlaufs des Elektro-Karts (Bild 4.44) bestätigen die Möglichkeit, ein P-T<sub>1</sub>-Ersatzmodell verwenden zu können. Auf dieser Grundlage kann für einen bestimmten Geschwindigkeitsbereich ein Reglerentwurf für einen Tempomat mithilfe linearer Methoden durchgeführt werden.

## ■ 4.11 Nicht lineare Strecke mit Ausgleich: Beispiel Tiefsetzsteller

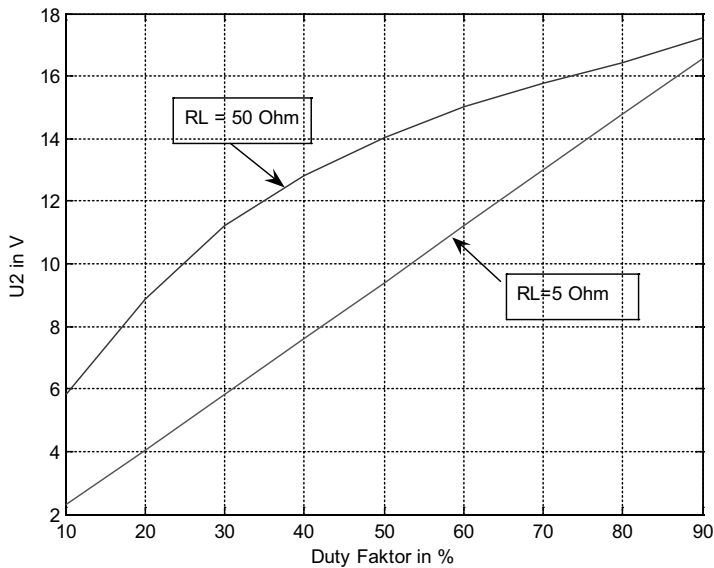
Bei einem Tiefsetzsteller, auch Abwärtswandler oder Buck-Converter genannt, handelt es sich um eine elektronische Schaltung, die eine Gleichspannung  $U_1$  in eine kleinere Gleichspannung  $U_2$  mit hohem Wirkungsgrad wandelt, siehe Bild 4.45. Gegenüber einem Längsregler, der wie ein Vorwiderstand wirkt, erfolgt beim Tiefsetzsteller ein permanentes Ein- und Ausschalten. Dadurch ist der Transistor entweder hoch- oder niederohmig (im Milliohm-Bereich) und weist entsprechend geringe Verluste auf. Die mit dem Schalten verknüpfte Welligkeit wird mithilfe einer Speicherdrossel und Diode sowie einem Kondensator geglättet.



**Bild 4.45** Tiefsetzsteller mit P-Kanal-MOSFET

Das Impuls-Pausen-Verhältnis bzw. der *Duty Factor* bestimmt die Höhe der Ausgangsspannung, wenn eine konstante Schaltfrequenz vorliegt. Der Lastwiderstand hat ebenfalls einen Einfluss auf die Spannung  $U_2$  und somit ist eine Regelung erforderlich, wenn die Ausgangsspannung konstant gehalten werden soll. Soll die Spannung  $U_2$  einen bestimmten zeitlichen Verlauf aufweisen, wird eine Regelung ebenfalls unabdingbar sein. Die Regelstrecke „Tiefsetzsteller“ ist jedoch in einigen Arbeitsbereichen stark nicht linear, was das statische und dynamische Verhalten angeht. Die statische Kennlinie in Bild 4.46 wurde für die Schaltung gemäß Bild 4.45 und einer Spannung von  $U_1 = 20\text{ V}$ , einer Schaltfrequenz von 20 kHz sowie unterschiedlichen Lastwiderständen ermittelt.

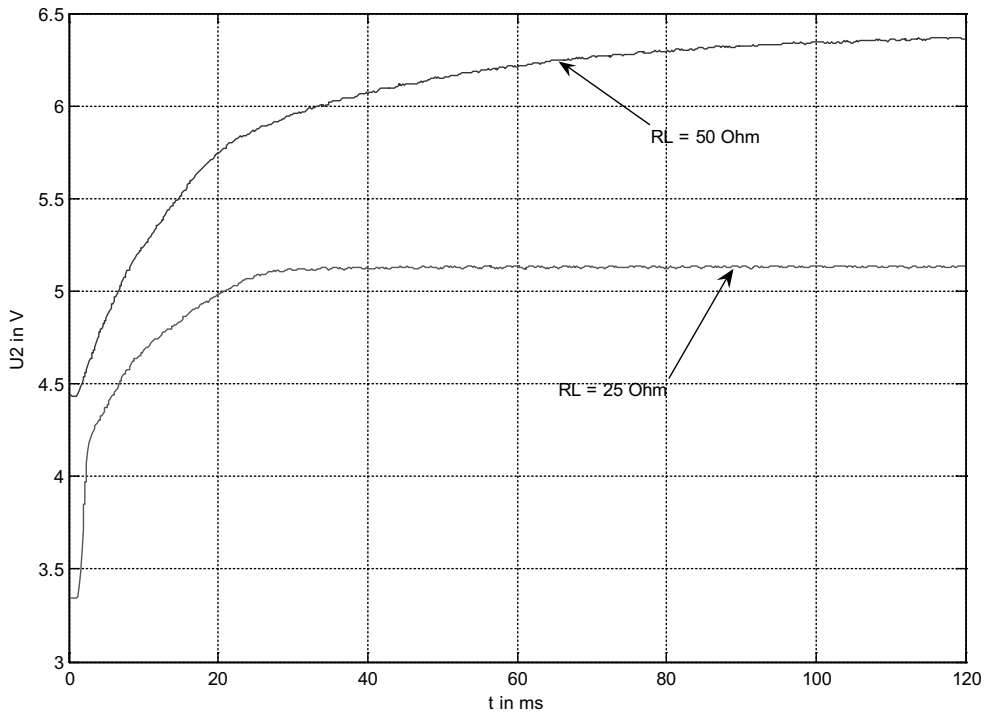




**Bild 4.46** Statische Kennlinie Tiefsetzsteller

Während interessanterweise für eine hohe Belastung ein nahezu lineares Verhalten festzustellen ist, weist eine geringe Belastung ein stark nicht lineares Verhalten auf. Ursächlich ist der sogenannte lückende bzw. nicht lückende Strom  $i_L$ . Die elektrotechnischen Hintergründe werden z.B. in [Pro20] ausführlich behandelt. Das belastungsabhängige dynamische Verhalten belegen die beiden Sprungantworten, die gemeinsam in Bild 4.47 aufgenommen wurden, wobei jeweils der Duty-Faktor von 20 auf 40 % verändert wurde.

Die Form der Sprungantworten deutet auf eine unterschiedliche nicht lineare Dynamik hin. Die Einschwingzeiten liegen weit auseinander. Die Sprungantwort im Fall einer Belastung mit  $R_L = 5 \text{ } \Omega$  weist sogar ein deutliches Überschwingen auf, hier nicht abgebildet. Üblicherweise wird von einer additiven Wirkung der Störgröße auf eine lineare Regelstrecke ausgegangen. Beim Tiefsetzsteller verändert die Störgröße, d.h. der Lastwiderstand, die Dynamik hinsichtlich Zeitkonstante und sogar Streckentyp. Mithilfe der linearen Theorie ist ein Entwurf nicht mehr möglich. Gleichwohl können die im Buch behandelten Reglerstrukturen sinnvoll verwendet werden. Eine PI-Regelung wird zumindest das statische Verhalten des Tiefsetzstellers linearisieren können, jedoch bleibt aber die Dynamik des Regelkreises von der Störgröße abhängig.



**Bild 4.47** Sprungantwort Tiefsetzsteller,  $R_L = 50 \text{ } \Omega$  und  $R_L = 25 \text{ } \Omega$ , unten



# Index

## A

Abtast-Halteglied 275  
Abtasttheorem von Shannon 272  
Abtastzeit 274  
Addition 10  
AD-Wandler 265  
Aktor 4, 266  
Allgemeines Übertragungsglied 100  
Amplitudengang 64  
Amplitudenreserve 160  
Anfahrprozedur 15  
Anfangswert 58  
Anfangswertsatz 58  
Anregelzeit 7  
Anti-Reset-Windup 288  
Arbeitsbewegung 221  
Arbeitspunkt 15, 326  
Ausgangsvektor 228  
Ausgleichszeit 82  
Ausregelzeit 7

## B

balancierte Realisierung 261  
Begrenzer 287  
Beobachtbarkeitsmatrix 259  
Beobachter 256  
Beobachtermodell 257  
Betragslineare Regelfläche 151  
Betragsoptimum 169  
Bildbereich 51, 65, 226  
Bilineare Transformation 302  
Block 9  
Bode-Diagramm 64  
Bode-Verfahren 161

## C

Charakteristische Gleichung 153  
Control Systems Toolbox 40

## D

Dämpfung 87, 88, 89  
Dämpfungsgrad 87  
D-Anteil 129  
DA-Wandler 270  
Deadbeat-Regler 306  
D-Glied 73  
Differenzengleichung 278  
Differenzialgleichung 20  
Differenzierendes Glied 73  
Digitale Regler 265  
Dirac-Impuls 68  
Diskretisierung 278  
Drehzahlregelung 333  
Dreipunktregler 220  
D-T1-Glied 208  
D-T1-Regler 286  
Durchgangsmatrix 230  
Durchtrittsfrequenz 160  
Dynamische Entkopplung 220  
Dynamisches Regelkreisverhalten 150  
Dynamische Störgrößenkompensation 209  
Dynamisches Übertragungsverhalten 10  
Dynamisches Verhalten 16

## E

Eigenwert 153  
Eingangsmatrix 230  
Eingangsvektor 226, 227  
Eingrößensystem 217  
Einstellregel von Chien, Hrones und Reswick 176  
Einstellregel von Ziegler und Nichols 173  
Elektromotor 11, 333  
Empfindlichkeitsfunktion 162  
Endwert 12, 55  
Endwertsatz 56  
Entkopplungsfilter 218  
Entwurf 9  
Ersatzmodell 83

ESP32 41  
Evolutionärer Algorithmus 198

## F

Festwertregelungen 4  
Folgeregelung 4  
Formel von Ackermann 245  
Frequenzgang 59  
Frequenzkennlinienverfahren 161  
Führungsgröße 3  
Führungsregler 210  
Führungsübertragungsfunktion 144  
Fuzzy-Logik 6

## G

gangof4 185  
Gegenkopplung 54, 152, 296  
Gesamtübertragungsfunktion 53  
Geschwindigkeitsalgorithmus 283  
Gleichstrom-Elektromotor 11  
Gleichstrom-Nebenschlussmotor 107  
Grenzstabil 87  
Grenzstabilität 152  
Grundregelkreis 3

## H

Hilfsregelgröße 210  
Hysterese 220

## I

Identifikation 80, 85  
Identifikationsverfahren 85  
I-Glied 71, 123, 281  
Impulsmomentensatz 117  
Induktivität 76  
Innere-Modell-Prinzip 147  
input/output systems 40, 381  
Instabiles System 152  
Integralkriterien 151  
Integrierendes Glied 72  
ioSys 40  
Istwert 2, 4  
I-T1 179  
I-T1-Glied 95  
ITAE-Kriterium 151

## K

Kapazität 76  
Kaskadenregelung 210  
Kennlinie 10  
Kennlinienfeld 14  
Kirchhoff 20  
Kompaktregler 135  
Kompensationsregler 164  
Komplexe Zeigergröße 60  
Kritische Verstärkung 158, 173

## L

Laplace-Transformation 48  
Lead-Lag-Glied 98  
Linearisierung 15

## M

Mathematisches Modell 20  
Matplotlib 32  
Maximale Überswingweite 7  
Mehrgrößensystem 218  
Messort 325  
Messrauschen 129, 131, 209  
Messvektor 228  
MicroPython 41  
Mitkopplung 54, 159, 296  
Modellbildung 9  
Modellreduktion 260

## N

Nachstellzeit 124  
Nennergrad 220  
Nicht lineare Kennlinie 15  
Nullstelle 87, 92  
NumPy 35  
Nyquist-Kriterium 159  
Nyquist-Stabilitätskriterium 156

## O

Offener Kreis 143  
Ohmscher Widerstand 76  
Ortskurve 62

**P**

Padé-Approximation 93  
Parallelschaltung 53, 295  
Partialbruchzerlegung 91, 153, 293, 370  
PD-Regler 128  
Pendel 338  
Phasengang 64  
Phasenreserve 160  
PID-Kompensationsregler 165  
PID-Regler 6, 132  
PID-T1-Regler 133  
PI-Regler 123, 282, 285  
PI-Zustandsregler 247  
Pol 88  
Pollage 88  
Polüberschuss 165  
Polvorgabe 240  
Polzuweisung 240  
P-Regler 123  
Proportionalbeiwert 14, 124  
Proportionalglied 70  
Prozessleitsystem 135  
P-T1-Glied 80  
P-T2-Glied 86  
P-Tn-Glied 81  
Pulsweitenmodulator 223  
pyboard 41  
Python 27

**Q**

Quadratische Regelfläche 151  
Quantisierung 268  
Quantisierungseinheit 268  
Quantisierungsfehler 269  
Quantisierungsstufe 269

**R**

Rampenfunktion 50, 68  
Regelabweichung 4  
Regelbarkeit 192  
Regelbereich 14  
Regeldifferenz 4  
Regeleinrichtung 4  
Regelfaktor 145, 163  
Regelfläche 151  
Regelgröße 4

Regelkreis 2  
Regelstrategien 5  
Regelstrecke 4  
Regelung 2  
Regler 4  
Regleralgorithmen 286  
Reglerentwurf 143  
Regler in der Rückführung 216  
Regler-Software-Baustein 138  
Reihenschaltung 53, 295  
Reihenschwingkreis 20  
Resonanzfrequenz 89  
Resonanzüberhöhung 89  
Robustheit 200  
Rückführung 54, 239, 246, 296  
Rücktransformation 49, 51

**S**

Schaltende Regler 220  
SciPy 37  
Sensor 4, 266  
Sigma-Funktion 17  
Signalmodelle 68  
SIPART DR21 135  
Sisotool 183  
Smith-Prädiktor 193  
Sollwert 3  
Speicherprogrammierbare Steuerung 135  
Sprungantwort 16, 69  
Spyder 27  
Stabilität 153, 299  
Standardregelstrecke 81  
Stationäre Entkopplung 220  
Stationäres Regelkreisverhalten 144  
Statische Kennlinie 11  
Statischer Regelfaktor 163  
Statische Störgrößenkompensation 208  
Statisches Übertragungsverhalten 10  
Stellbereich 14  
Stellglied 4  
Stellgröße 4  
Stellungsalgorithmus 283  
Steuerfläche 83  
Steuerung 2  
Störgröße 4  
Störgrößenaufschaltung 207  
Störgrößenkompensation 207  
Störübertragungsfunktion 144

Strecke 2  
Strecke mit Ausgleich 79  
Strecke ohne Ausgleich 79  
Summenzeitkonstante 83  
Superpositionsgesetz 11  
Symmetrische Optimum 181  
Systemmatrix 228

## T

Taylor-Reihenansatzes 15  
Temperaturregelstrecke 325  
Temperaturregelung 2, 270  
Thonny-Entwicklungsumgebung 41  
Tiefpassfilter 129  
Tiefsetzsteller 119  
 $t_{\max}$  90, 244  
Toleranzbereich 7  
Totzeit 74, 92, 272  
Totzeitglied 74  
Trapezregel 283  
Treppenfunktion 268, 274, 276, 289  
T-Summen-Einstellregel 174  
Tustin-Formel 302

## U

Übergangsfunktion 17  
Überlagerungsprinzip 11  
Übertragungsfunktion 52, 53  
Übertragungsglied 69  
Übertragungsmatrix 218  
Übertragungsverhalten 10

## V

Verkopplung 217  
Verzögerungsglied 1. Ordnung 79  
Verzögerungsglied 2. Ordnung 85  
Verzögerungsglied n. Ordnung 81  
Verzugszeit 82  
Verzweigung 10  
Vorfilter 185, 213, 241  
Vorlastkennlinie 16  
Vorsteuerung 214  
VZ1 80

## W

WAGO I/O-System 750 138  
Wandelzeit 270  
Wendetangente 82  
Windup 288  
Wirkungslinie 9  
Wurzelortskurve 155

## Z

Zählerpolynom 100, 231  
Zeigergröße 60  
Zeitkonstante 18  
Zeitprozentkennwert 84  
Zeitverhalten 16  
Z-Transformation 292  
Z-Übertragungsfunktion 293  
Zustandsgröße 226  
Zustandsraum 226  
Zustandsregler 239  
Zweigrößensystem 217  
Zweipunktregler 220