

2023

Zentrale Klausur

Original-Prüfungen
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Gymnasium

Mathematik

+ Übungsaufgaben

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhalt

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zur Zentralen Klausur

1 Ablauf der Prüfung	I
2 Thematisch-inhaltliche Schwerpunkte für die Zentrale Klausur 2023	II
3 Leistungsanforderung und Bewertung	III
4 Operatoren	IV
5 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur Zentralen Klausur	VI
6 Hinweise zum Lösen mit dem GTR bzw. CAS	IX

Übungsaufgaben

Hilfsmittelfreie Aufgaben

Analysis	1
Stochastik	16
Koordinatengeometrie*	28

Aufgaben mit Hilfsmitteln (GTR/CAS, Formelsammlung)

Analysisaufgaben mit GTR	38
Analysisaufgaben mit CAS	61

* Sie finden dazu einen ausführlichen Hinweis im Kapitel „Hinweise und Tipps zur Zentralen Klausur“ auf Seite II.

Zentrale Klausur 2016

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil	2016-1
Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln	2016-5

Fortsetzung siehe nächste Seite

Zentrale Klausur 2017

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel	2017-1
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmittel	2017-7

Zentrale Klausur 2018

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel	2018-1
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmittel	2018-6

Zentrale Klausur 2019

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel	2019-1
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmittel	2019-5

Zentrale Klausuren 2020 und 2021

Wegen des Corona-Virus fanden 2020 und 2021 keine Zentralen Klausuren am Ende der Einführungsphase statt. Für die beiden Jahre können daher keine Original-Aufgaben abgedruckt werden.

Zentrale Klausur 2022 www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Aufgaben der Zentralen Klausur 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Autor

Herbert Kompernaß

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

im Laufe der Einführungsphase schreiben Sie im Fach Mathematik insgesamt vier Klausuren. Die letzte von diesen wird vom Schulministerium des Landes Nordrhein-Westfalen **zentral** gestellt. Diese sogenannte Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase findet im Schuljahr 2022/23 voraussichtlich am **31. Mai 2023** statt.

Das Buch enthält die **offiziellen Aufgaben der Jahre 2016 bis 2019** und darüber hinaus einige **Übungsaufgaben** zum eigenständigen Üben und Wiederholen.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen:

- einem **hilfsmittelfreien** Teil (Teil I bzw. Prüfungsteil A)
- einer innermathematischen und einer kontextbezogenen Aufgabe **mit Hilfsmitteln** (Teil II bzw. Prüfungsteil B)

Die Prüfungen 2016 bis 2019 zeigen Ihnen den Prüfungsaufbau. Dieser ist auch ausführlich in den Hinweisen auf Seite I beschrieben.

Die Übungsaufgaben in diesem Buch eignen sich bestens zum Vorbereiten auf beide Prüfungsteile.

Zu jeder Aufgabe finden Sie **vollständige** und **ausführlich kommentierte Lösungen**. Sollten Sie einmal nicht weiterkommen, helfen Ihnen **Tipps und Hinweise** auf den richtigen Weg. Schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie Schritt für Schritt die Lösungstipps.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes wichtige Änderungen in der Zentralen Klausur 2023 vom Landesinstitut für Schule Nordrhein-Westfalen bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet auf der Plattform MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Zentralen Klausur!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zur Zentralen Klausur

1 Ablauf der Prüfung

Die schriftliche Zentrale Klausur

Im Fach Mathematik wird die Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase verpflichtend geschrieben. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Weiterbildung von einer Fachkommission erstellt und von Gutachtern bewertet. Grundlage für die gestellten Aufgaben der Zentralen Klausur sind Inhalte des Lehrplans der Einführungsphase.

Die Zentrale Klausur ersetzt die vierte (sonst von der Fachlehrkraft erstellte) Klausur der Einführungsphase.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Zentrale Klausur umfasst 2 Aufgabenteile:

- ein **hilfsmittelfreier** Teil (Teil I bzw. Aufgabenteil A) mit Aufgaben aus den Bereichen Analysis, Stochastik und evtl. Koordinatengeometrie
- eine innermathematische und kontextbezogene Aufgabe **mit Hilfsmitteln** (Teil II bzw. Prüfungsteil B) aus dem Bereich Analysis

Für den hilfsmittelfreien Teil stehen Ihnen maximal 20 Minuten, für den Teil mit Hilfsmitteln mindestens 80 Minuten zur Verfügung, insgesamt auf jeden Fall 100 Minuten. Die Bewertungseinheiten entsprechen den Zeitanteilen.

Zu Beginn der Klausur wird der hilfsmittelfreie Teil bearbeitet. Wenn Sie die Lösung dieses Teils abgeben, erhalten Sie den zweiten Aufgabenteil sowie Ihren Taschenrechner und Ihre Formelsammlung.

Die Prüfung beginnt zur 1. Stunde, unabhängig davon, wann der Unterricht an Ihrer Schule einsetzt.

Zugelassene Hilfsmittel für Prüfungsteil I bzw. A

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung

Zugelassene Hilfsmittel für Prüfungsteil II bzw. B

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
oder
CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung

5 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur Zentralen Klausur

Vorbereitung

- Bereiten Sie sich **längerfristig** auf die Zentrale Klausur vor und fertigen Sie sich eine Übersicht über die von Ihnen bereits bearbeiteten Themen, Inhalte und Verfahren an.
Es ist zweckmäßig, alle schriftlichen Bearbeitungen dieser Aufgaben übersichtlich aufzubewahren, das erleichtert spätere Wiederholungen.
- Benutzen Sie zur Prüfungsvorbereitung neben diesem Übungsbuch Ihre **Unterrichtsaufzeichnungen** und das Lehrbuch.
- Verwenden Sie während der Prüfungsvorbereitung grundsätzlich die **Hilfsmittel**, die auch in der Prüfung zugelassen sind. Prägen Sie sich wichtige Seiten in Ihrer Formelsammlung ein und nutzen Sie Ihren Taschenrechner mit allen Funktionen.
- Oft ist der Zeitfaktor ein großes Problem. Testen Sie, ob Sie eine Beispielklau-
suraufgabe in der dafür vorgegebenen Zeit allein lösen können. **Simulieren Sie selbst eine Prüfungssituation.**
- Gehen Sie optimistisch in die Prüfung. Wer sich gut vorbereitet hat, braucht sich keine Sorgen zu machen.

Bearbeitung der Prüfung

- Es ist hilfreich, wenn Sie bei der Analyse der Aufgabenstellungen wichtige Angaben oder Informationen (z. B. gegebene Größen, Lösungshinweise) **farbig markieren**.
- Um den Lösungsansatz zu einer Aufgabe zu finden oder die gegebene Problemstellung zu veranschaulichen, kann das **Anfertigen einer Skizze** nützlich sein.
- Beachten Sie, dass in manchen Teilaufgaben „**Zwischenlösungen**“ angegeben sind, die Ihnen als Kontrolle dienen bzw. mit denen Sie weiterarbeiten können.
- Falls Sie mit einer Aufgabe gar nicht weiterkommen, so halten Sie sich nicht zu lange damit auf. Versuchen Sie, mit der nächsten Teilaufgabe weiterzumachen. Wenn Sie die anderen Aufgaben bearbeitet haben, kommen Sie nochmals auf die angefangene Aufgabe zurück und versuchen Sie in Ruhe, eine Lösung zu finden.
- Orientieren Sie sich an der angegebenen **Punktezahl**: Je mehr Punkte eine Aufgabe ergibt, desto mehr Zeit sollte für die Bearbeitung eingeplant werden.
- Achten Sie auf die **sprachliche Richtigkeit** und eine **saubere äußere Form** Ihrer Lösungen.

Lösungsplan

Beim Lösen der Aufgaben empfiehlt es sich stets, systematisch zu arbeiten. Folgende Vorgehensweise hilft Ihnen dabei:

Schritt 1:

Nehmen Sie sich ausreichend Zeit zum **Analysieren** der Aufgabenstellung. Stellen Sie fest, um was es in der Aufgabe geht. Sammeln Sie alle Informationen, welche direkt gegeben sind, und achten Sie darauf, ob eventuell versteckte Informationen enthalten sind.

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2019
Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1: Analysis

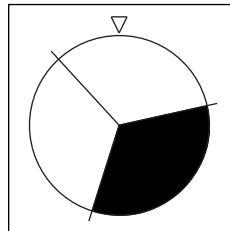
Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^3 + 0,5 \cdot x^2 - 2 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Berechnen Sie $f'(1)$. (3 P)
- (2) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 | f(1))$. (3 P)

Aufgabe 2: Stochastik

Bei einem Spiel wird das Glücksrad aus der Abbildung zweimal gedreht. Der Einsatz für das zweimalige Drehen beträgt 1 €.

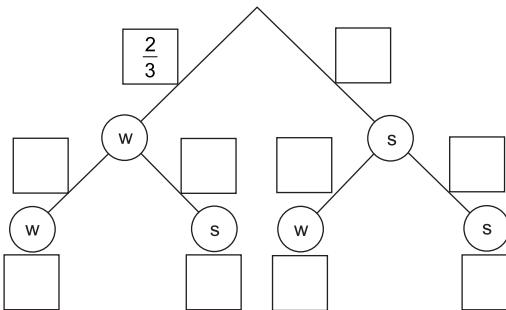
- Erscheint zweimal das schwarze Feld, so bekommt man den Einsatz zurück und weitere 4 € ausgezahlt.
- Erscheint zweimal ein weißes Feld, so wird nur der Einsatz zurückgezahlt.
- Andernfalls verliert man den Einsatz.



Abbildung

- (1) Geben Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in den Kästchen des folgenden Baumdiagrammes an.

Geben Sie die fehlenden Gewinne/Verluste auf den Linien unter dem Baumdiagramm an.



Gewinn /
Verlust -----

-1 €

----- (3 P)

- (2) Ein Spiel ist „fair“, wenn ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht. Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist. (3 P)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1

- ◆ Bilden Sie die Ableitungsfunktion mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel.
- ◆ Berechnen Sie die Ableitung an der Stelle $x = 1$ durch Einsetzen von 1 in den Term der Ableitungsfunktion.
- ◆ Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P ist gleich der Steigung des Graphen im Punkt P .
- ◆ Berechnen Sie den Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$.
- ◆ Bestimmen Sie mithilfe der berechneten Steigung (siehe Aufgabenteil (1)) und der Koordinaten des Punktes P den y-Achsenabschnitt.
- ◆ Geben Sie die Gleichung der Tangente an.

Aufgabe 2

- ◆ Denken Sie daran, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse beim mehrmaligen Drehen eines Glücksrades nicht ändert.
- ◆ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die zu den von einem Verzweigungspunkt ausgehenden Ästen gehören, ist gleich 1.
- ◆ Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses am Ende eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades (Pfadmultiplikationsregel).
- ◆ Ordnen Sie den Ergebnissen am Ende der Pfade die Gewinne/Verluste zu.
- ◆ Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaiger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n$$

- ◆ Ein Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich 0 ist.

Lösung

Aufgabe 1

- (1) Ableiten der Funktion $f(x) = -x^3 + 0,5 \cdot x^2 - 2 \cdot x$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel führt zu:

$$f'(x) = -3 \cdot x^2 + x - 2$$

Einsetzen von 1 als Argument in die Ableitungsfunktion f' ergibt:

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = -4$$

- (2) Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P ist gleich der Steigung des Graphen im Punkt P . Nach Aufgabenteil (1) ist die Steigung $m = -4$. Berechnen des Funktionswertes an der Stelle $x = 1$:

$$f(1) = -1^3 + 0,5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = -2,5$$

Damit ergeben sich die Koordinaten des Punktes $P(1 | -2,5)$. Einsetzen dieser Koordinaten und der Steigung $m = -4$ in die allgemeine Form der Geraden-Gleichung $y = m \cdot x + n$ liefert:

$$-2,5 = -4 \cdot 1 + n$$

$$n = 1,5$$

Die Tangente hat die Gleichung $t(x) = -4 \cdot x + 1,5$.

Aufgabe 2

- (1) Beim Drehen des Glücksrades ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse nicht, wenn mehr als einmal gedreht wird. Im Baumdiagramm gelten zudem die folgenden Regeln:
- (I) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist gleich 1.
 - (II) Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses am Ende eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades (Pfadmultiplikationsregel).

Es folgt:

$$p(w) = \frac{2}{3}; p(s) = 1 - p(w) = \frac{1}{3}$$

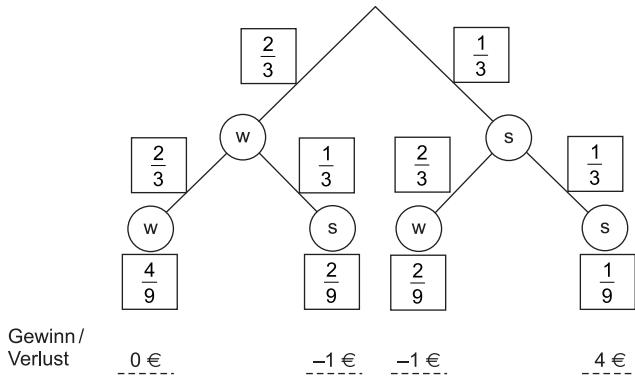
$$p(w; w) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$p(w; s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p(s; w) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p(s; s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Damit erhält man das folgende Baumdiagramm:



- (2) Gibt die Zufallsgröße X den Gewinn/Verlust an, so erhält man folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für X:

	w; w	w; s	s; w	s; s
x_i	$x_1 = 0 \text{ €}$	$x_2 = -1 \text{ €}$	$x_3 = -1 \text{ €}$	$x_4 = 4 \text{ €}$
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 p_i \cdot x_i = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_4 \cdot x_4$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{4}{9} \cdot 0 \text{ €} + \frac{2}{9} \cdot (-1 \text{ €}) + \frac{2}{9} \cdot (-1 \text{ €}) + \frac{1}{9} \cdot 4 \text{ €} \\ &= -\frac{2}{9} \text{ €} - \frac{2}{9} \text{ €} + \frac{4}{9} \text{ €} = 0 \text{ €} \end{aligned}$$

Da der Erwartungswert gleich 0 € ist, der Spieler also auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht, ist das Spiel fair.



© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK