

2023

Abitur

Original-Prüfungsaufgaben
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Niedersachsen

Mathematik eA

- + Übungsaufgaben
- + Zusätzliche Aufgaben als PDF
- + Lernvideos zur GTR/CAS-Nutzung

ActiveBook
• Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1	Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung	I
2	Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase	III
3	Bewertung der Prüfungsarbeiten	VI
4	Operatoren in zentralen Prüfungsaufgaben Mathematik	VI
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung ...	X
6	Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern ..	XI
7	Weiterführende Informationen	XVIII

Übungsaufgaben zum Pflichtteil

Analysis	1
Stochastik	3
Analytische Geometrie	4
Lösungsvorschlag	5

Übungsaufgaben zum Wahlteil

Analysis

Übungsaufgabe 1: Faulgas (100 Min., CAS)	16
Übungsaufgabe 2: Temperaturen in Friesoythe (100 Min., CAS)	22
Übungsaufgabe 3: Kantig und rund (100 Min., CAS)	30

Fortsetzung siehe nächste Seite

Übungsaufgabe 4: Perlenkette und Hochspannungsleitung (100 Min., CAS) ...	35
Übungsaufgabe 5: Zauberbohnen (100 Min., CAS)	40

Stochastik

Übungsaufgabe 1: Gewicht von Puten (50 Min., GTR/CAS)	45
Übungsaufgabe 2: Sehbeteiligung (50 Min., GTR/CAS)	49
Übungsaufgabe 3: Dopingtest (50 Min., GTR/CAS)	53
Übungsaufgabe 4: Datenanalyse (50 Min., CAS)	57

Analytische Geometrie

Übungsaufgabe 1: Ölbohrinsel (50 Min., GTR/CAS)	62
Übungsaufgabe 2: Die Pyramide des Pharao (50 Min., GTR/CAS)	66
Übungsaufgabe 3: Atommodell (50 Min., CAS)	70
Übungsaufgabe 4: Im Bergwerk (50 Min., CAS)	75

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MyStark.

Abiturprüfung 2017

Pflichtteil	2017-1
Aufgabe 1A – Rechnerart: CAS – Analysis	2017-6
Aufgabe 1B – Rechnerart: CAS – Analysis	2017-14
Aufgabe 2A – Rechnerart: CAS/GTR – Stochastik	2017-23
Aufgabe 2B – Rechnerart: CAS/GTR – Stochastik	2017-29
Aufgabe 3A – Rechnerart: CAS – Geometrie/Algebra	2017-34
Aufgabe 3B – Rechnerart: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2017-40

Abiturprüfung 2018

Pflichtteil	2018-1
Aufgabe 1A – Rechnerart: CAS – Analysis	2018-6
Aufgabe 1B – Rechnerart: CAS – Analysis	2018-17
Aufgabe 2A – Rechnerart: CAS/GTR – Stochastik	2018-26
Aufgabe 2B – Rechnerart: CAS/GTR – Stochastik	2018-33
Aufgabe 3A – Rechnerart: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2018-39
Aufgabe 3B – Rechnerart: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2018-43

Abiturprüfung 2019

Pflichtteil	2019-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS – Analysis	2019-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS – Analysis	2019-14
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS/GTR – Stochastik	2019-24
Aufgabe 2B – Rechnertyp: CAS/GTR – Stochastik	2019-30
Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2019-37
Aufgabe 3B – Rechnertyp: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2019-45

Der Jahrgang 2020 fehlt, da wegen der Umstellung von G8 auf G9 in diesem Jahr nur für sehr wenige Schüler eine Abiturprüfung stattgefunden hat.

Abiturprüfung 2021

Pflichtteil	2021-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS/GTR – Analysis	2021-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS – Analysis	2021-15
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS – Stochastik	2021-23
Aufgabe 2C – Rechnertyp: CAS/GTR – Stochastik	2021-29
Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2021-36
Aufgabe 3B – Rechnertyp: CAS/GTR – Geometrie/Algebra	2021-42

Abiturprüfung 2022 www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).



Bei MyStark finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019, 2021 und 2022** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autoren

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2019, 2021 und 2022)

Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2018)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2023 im Erhöhten Anforderungsniveau in Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Erhöhte Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2023** sowie zum **Pflichtteil**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019, 2021 und 2022**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
 - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
 - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
 - **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
 - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019, 2021 und 2022**, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Josef Rolfs



ActiveBook
Interaktives
Training

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen, einem **Pflichtteil**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist (auch länderübergreifende Aufgaben), und einem **Wahlteil**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann (Niedersachsen-spezifische Aufgaben).

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Pflichtteil** werden Ihnen zum einen **vier Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie/Lineare Algebra vorgelegt, die länderübergreifend gestellt werden. Hinzu kommen Niedersachsen-spezifisch **ein oder zwei weitere Aufgaben**. Die Aufgaben dieses Pflichtteils sind etwa gleichgewichtet und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.

Im **Wahlteil** werden Ihnen drei Aufgabenblöcke mit jeweils zwei Aufgaben A und B vorgelegt. Der Aufgabenblock 1 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis (Aufgabe 1A bzw. 1B), der Aufgabenblock 2 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Stochastik (Aufgabe 2A bzw. 2B) und der Aufgabenblock 3 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Aufgabe 3A bzw. 3B). Sie müssen aus jedem der drei Blöcke jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.

Die Gewichtung der drei Aufgabenblöcke erfolgt etwa im Verhältnis 2:1:1. Somit wird im Wahlteil die Analysisaufgabe (Aufgabenblock 1) mit einem Anteil von etwa 50 % am stärksten gewichtet. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

	Block 1	Block 2	Block 3
Aus jedem Block muss genau eine Aufgabe bearbeitet werden.	Aufgabe 1A (Analysis)	Aufgabe 2A (Stochastik)	Aufgabe 3A (Geometrie/Algebra)
	Aufgabe 1B (Analysis)	Aufgabe 2B (Stochastik)	Aufgabe 3B (Geometrie/Algebra)
Gewichtung	2	1	1

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit für den Pflichtteil beträgt 70 Minuten und für den Wahlteil 200 Minuten. Hinzu kommen für den Wahlteil 30 Minuten Auswahlzeit.

Nach Ablauf der Bearbeitungszeit des Pflichtteils müssen Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben für den Wahlteil, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen Sie die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.
- Vernetzte Rechner sind in der Abiturprüfung nicht zugelassen.

Weiter sind zur Abiturprüfung gedruckte **Formelsammlungen** der Schulbuchverlage und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2023“ weitere Angaben gemacht.

Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

Bitte beachten Sie: Aufgrund der besonderen, coronabedingten Lernsituation in den letzten Schuljahren werden **einzelne** Lehrplaninhalte in der schriftlichen Abiturprüfung 2023 nicht geprüft. Diese sind in der nachfolgenden Aufstellung markiert.

2.1 Analysis

Einführungsphase

Elementare Funktionenlehre

- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (auch Wurzelfunktionen)
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten

Ableitungen

- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$
- Summen, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

Übungsaufgabe 2 (100 Min., CAS)

Temperaturen in Friesoythe

Die Monatsmitteltemperaturen von Friesoythe seien durch die folgende Tabelle gegeben.

Monat	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Mitteltemperatur (in °C)	1,3	1,9	4,6	8,1	12,8	15,9	17,3	16,9	13,9	10,0	5,4	2,5

- a) Für eine vereinfachte Modellierung des Jahresverlaufs werde angenommen, dass jeder Monat 30 Tage hat und die Monatsmitteltemperatur jeweils am 15. eines Monats exakt erreicht wird. Somit ergibt sich eine Wertetabelle mit 360 Wertepaaren, von denen 12 bekannt sind.

Tag des Jahres	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345
Temperatur	1,3	1,9	4,6	8,1	12,8	15,9	17,3	16,9	13,9	10,0	5,4	2,5

Ermitteln Sie als Modell eine Sinuskurve, die exakt durch den Hochpunkt und durch den Tiefpunkt der Daten geht. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise. Ermitteln Sie mithilfe der Funktion die mittlere Temperatur im Juli und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

- b) Für eine andere Klimastation sei die Modellierung der Klimadaten gegeben durch f mit dem Funktionsterm $f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9$, wobei x den Tag des Jahres angibt (bei 360 Tagen im Jahr).

Ermitteln Sie die Tage mit maximaler Änderungsrate sowie die Tage mit Extremtemperaturen und skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgrund von Umweltbeobachtungen erwartet man, dass die Temperaturschwankungen jährlich um $0,07^\circ\text{C}$ zunehmen und die Temperatur jährlich um $0,5\%$ zunimmt.

Bestimmen Sie den Term $g(x)$, der für die durch f beschriebene Station diese Annahmen berücksichtigt.

Ermitteln Sie aufgrund dieser Annahmen die theoretisch erwartete Jahresmitteltemperatur in 100 Jahren sowie die maximale und minimale Temperatur in 100 Jahren.

- c) Claudia hat festgestellt, dass in der ersten Tabelle die Daten von April bis August auf dem Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades liegen.

Ermitteln Sie den Term dieser Funktion h .

Der Graph einer weiteren ganzrationalen Funktion soll die Daten von September bis Oktober darstellen und an den Graphen von h stetig und differenzierbar anschließen.

Bestimmen Sie auch diesen Funktionsterm.

Teilaufgabe a

Ermitteln des Modells und Beschreiben der Vorgehensweise

Die geforderte Sinuskurve hat allgemein die Gleichung

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d.$$

Welche geometrische Bedeutung haben die Parameter a , b , c und d ?

Lassen Sie den Rechner die Daten darstellen. Dazu geben Sie die Daten als Listen unter **Lists&Spreadsheets** ein und definieren den Plot unter **Graphs** als Streudiagramm. Wählen Sie die Fenstereinstellungen geeignet aus.

Aus dieser Darstellung erhalten Sie eine Vorstellung, wie die gewünschte Sinuskurve verlaufen soll.

Sie müssen die Amplitude, die Periode und die Verschiebungen in x - und y -Richtung ermitteln.

Die Amplitude ergibt sich aus dem vertikalen Abstand der Extrempunkte.

Die Verschiebung in y -Richtung ergibt sich aus dem Mittelwert der Extremwerte.

Die Periode ist 1 Jahr bzw. die Anzahl der Tage, die der Wertetabelle zugrunde liegen.

Für die Verschiebung in x -Richtung können Sie eine Extremstelle betrachten. Überlegen Sie, an welcher Stelle sie bei der einfachen Sinuskurve liegt und an welcher Stelle sie hier liegen soll.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Grafik. Achten Sie auf die Bogenmaßeinstellung.

Bestimmung des Mittelwertes im Juli

Berechnen Sie den Juli-Mittelwert mithilfe eines Integrals.

Die Grenzen des Intervalls sind die Tage des Jahres, die dem Monat Juli entsprechen.

Das Ergebnis der Integration wird durch die Anzahl der Tage des Monats dividiert.

Erläutern des Ergebnisses

Eine Erläuterung des Ergebnisses ist dann besonders interessant, wenn es von den vorgegebenen Werten abweicht.

Überlegen Sie, was der Grund für diese Abweichung sein könnte.

Teilaufgabe b

Ermitteln der Tage mit maximaler Temperaturänderung und Extremtemperaturen

Die Tage mit maximaler Temperaturänderung können Sie mit der zweiten Ableitung bestimmen.

Notwendig ist, dass die zweite Ableitung den Wert 0 aufweist.

Vergessen Sie nicht das Prüfen einer hinreichenden Bedingung.

Bestimmen Sie die Tage mit Extremtemperaturen mit der ersten Ableitung.

Notwendig ist, dass die erste Ableitung den Wert 0 aufweist.

Vergessen Sie auch hier nicht das Prüfen einer hinreichenden Bedingung.

Skizzieren des Graphen von f

Zeichnen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschriften Sie die Achsen.

Wählen Sie geeignete Einheiten auf den Achsen und zeichnen Sie den Graphen von f .

Bestimmen des Terms $g(x)$

Die Temperaturschwankungen werden durch die Amplitude angegeben.

Wenn sich die Temperaturschwankungen um $0,07^\circ\text{C}$ erhöhen, so erhöht sich jedes Jahr die Amplitude um $0,07^\circ\text{C}$.

Die Jahresmitteltemperatur ist durch die Konstante im Funktionsterm gegeben.

Erhöht sich die Jahresmitteltemperatur um $0,5\%$, so erhöht sich die Konstante mit dem Faktor $1,005$.

Ermitteln der Jahresmitteltemperatur und der extremen Tagestemperaturen

Berechnen Sie Amplitude und Konstante in 100 Jahren.

Geben Sie diesen Funktionsterm in den Rechner ein und bestimmen Sie Jahresmitteltemperatur, Minimum und Maximum in 100 Jahren.

Teilaufgabe c

Ermitteln des Terms $h(x)$

Ein Polynom 3. Grades hat vier Koeffizienten.

Vier Bedingungen genügen, um die Koeffizienten zu berechnen.

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, indem Sie vier der Wertepaare einsetzen.

Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Rechner.

Überprüfen Sie, ob auch das 5. Wertepaar die Gleichung erfüllt.

Bestimmen des Funktionsterms

Für die stetige und differenzierbare Fortsetzung müssen vier Bedingungen erfüllt sein.

Die drei Punkte $(8|16,9)$, $(9|13,9)$ und $(10|10)$ müssen auf dem Graphen liegen und die Steigung an der Übergangsstelle $x=8$ muss rechts und links gleich sein.

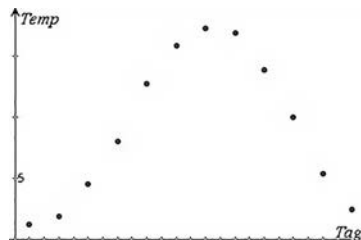
Mit vier Bedingungen wählt man als Ansatz ein Polynom 3. Grades.

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf und lassen Sie es vom Rechner lösen.

Lösungsvorschlag

a) Ermitteln des Modells und Beschreiben der Vorgehensweise:

A tag	B temp	C
=seq(15+30*i,i,0,11)		
1	15	1.3
2	45	1.9
3	75	4.6
4	105	8.1
5	135	12.8



Mit der Reduzierung des Jahres auf 360 Tage kann man von einer Sinusfunktion mit der Periode $\frac{2\pi}{360}$ ausgehen.

Das Maximum der Daten liegt bei H(195 | 17,3) und das Minimum liegt bei T(15 | 1,3).

Wenn die Sinuskurve in H ihr Maximum und in T ihr Minimum erreichen soll, dann gilt für die Amplitude a:

$$a = \frac{1}{2}(17,3 - 1,3) = 8$$

Die vertikale Verschiebung d errechnet sich aus dem Mittelwert von Maximal- und Minimalwert:

$$d = \frac{1}{2}(17,3 + 1,3) = 9,3$$

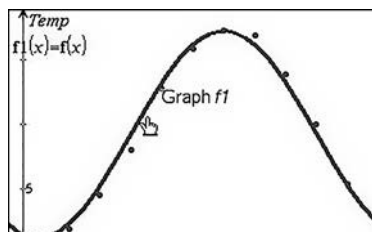
Für die horizontale Verschiebung c betrachtet man die Extremstellen. Bei 90 hätte der Sinus im Gradmaß sein Maximum, also muss die Kurve um 105 nach rechts verschoben werden, damit das Maximum bei H liegt.

Es folgt für den Term der Sinusfunktion:

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (x - 105)\right) + 9,3$$

Der Graph wird zusammen mit den Daten gezeichnet.

$\frac{17,3-1,3}{2} \rightarrow a$	8
$\frac{17,3+1,3}{2} \rightarrow d$	$\frac{93}{10}$
$\frac{2 \cdot \pi}{360} \rightarrow b$	$\frac{\pi}{180}$
$-105 \rightarrow c$	-105
$a \cdot \sin(b \cdot (x+c)) + d \rightarrow f(x)$	Fertig
$f(x)$	$8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot (x-105)}{180}\right) + \frac{93}{10}$



Bestimmen des Mittelwertes im Juli:

Der Juli umfasst 30 Tage zwischen 180 und 210. Den Mittelwert M erhält man durch das Integral:

$$A = \frac{1}{30} \cdot \int_{180}^{210} f(x) dx \approx 17,21$$

$\frac{1}{30} \cdot \int_{180}^{210} f(x) dx$	17.2089
---	---------

Erläutern des Ergebnisses:

Obwohl der Graph von f exakt durch den Hochpunkt $(195 | 17,3)$ geht, erhält man durch Integration eine andere Monatsmitteltemperatur. Sie liegt niedriger als der vorgegebene Wert. Sie muss auch niedriger sein, weil alle anderen Sinuswerte niedriger als das Maximum sind. Wie schon der Verlauf der Datenpunkte vermuten lässt, ist also die oben genannte Modellannahme falsch, dass genau in der Mitte des Monats Juli das Maximum liegt. Da die Mitteltemperatur des Monats August höher liegt als die des Monats Juni, wird das wahre Maximum erst in der zweiten Julihälfte angenommen.

b) Ermitteln der Tage mit maximaler Temperaturänderung und Extremtemperaturen:

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9$$

$$f'(x) = -\frac{2\pi}{45} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$f''(x) = \frac{\pi^2}{4050} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4050} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 120 \vee x = 300$$

Es gilt:

$$f'(0) \approx -0,07$$

$$f'(120) \approx 0,14$$

$$f'(300) \approx -0,14$$

$$f'(360) \approx -0,07$$

Daher steigt die Temperatur am 120. Tag des Jahres (30. April) am stärksten und sinkt am 300. Tag (30. Oktober) am stärksten.

$8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9 \rightarrow f(x)$	Fertig
$\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow f_s(x)$	Fertig
$\frac{d}{dx}(f_s(x)) \rightarrow f_{ss}(x)$	Fertig
$f_s(x)$	$\frac{-2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{180} + \frac{\pi}{3}\right)}{45}$
$f_{ss}(x)$	$\frac{\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{180} + \frac{\pi}{3}\right)}{4050}$
$\text{solve}(f_{ss}(x)=0, x) 0 \leq x \leq 360 \quad x=120 \text{ or } x=300$	
$f_s(0)$	-0.069813
$f_s(120)$	0.139626
$f_s(300)$	-0.139626
$f_s(360)$	-0.069813

Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

Die auf \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot (e^{-0,3x} - e^{-4x})$ modelliert für $0 \leq x \leq 12$ die Konzentration eines Medikamentenwirkstoffes im Blut. Dabei beschreibt x die Zeit in Stunden (h) nach der Einnahme des Medikamentes und $f(x)$ die Konzentration in Milligramm pro Liter ($\frac{\text{mg}}{\ell}$).

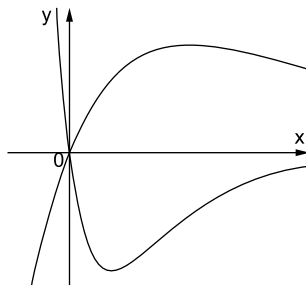
Punkte

- a) Berechnen Sie die Konzentration eine Stunde nach der Einnahme des Medikamentes.
Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Konzentration erstmals den Wert $2,8 \frac{\text{mg}}{\ell}$ annimmt.
Bestimmen Sie, wie lange die Konzentration mindestens $0,5 \frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt. 6
- b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Konzentration ungefähr 0,7 Stunden nach der Einnahme des Medikamentes mit etwa $3,75 \frac{\text{mg}}{\ell}$ am größten ist. 4
- c) Berechnen¹ Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration genauso groß ist wie zwei Stunden später. 3
- d) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$ und interpretieren Sie die Lösung im Sachzusammenhang. 4
- e) Eine vereinfachte Modellierung geht davon aus, dass bis 6 Stunden nach der Einnahme des Medikamentes die Konzentration durch f beschrieben wird und danach die Abnahmerate der Konzentration konstant ist. Dabei ist die konstante Abnahmerate so groß wie die Änderungsrate der durch f beschriebenen Konzentration nach 6 Stunden.
Berechnen Sie den Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikamentes, zu dem die Konzentration nach diesem Modell null ist. 4
- f) Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Die Gesamtkonzentration ist zu jedem Zeitpunkt die Summe der durch f beschriebenen Konzentrationen, die sich aus der ersten und zweiten Einnahme ergeben. Die Gesamtkonzentration soll $6 \frac{\text{mg}}{\ell}$ nicht übersteigen.
Untersuchen Sie, ob diese Vorgabe eingehalten wird. 4

¹ In der **GTR-Variante** ist der Operator „bestimmen“.

Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = e^{-a \cdot x} - e^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 4$, gegeben.

In der Abbildung sind zwei Graphen der Schar dargestellt. Jeder Graph der Funktionenschar hat genau einen Extrempunkt.



(GTR-Variante: Eine Stammfunktion von f_a ist durch $F_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot x} + \frac{1}{4} \cdot e^{-4x}$ gegeben.)

- g) Berechnen Sie die Werte von a , für die die Fläche zwischen dem Graph von f_a und der x -Achse im Intervall $[0; 1]$ den Inhalt 0,2 hat. 4
- h) Entscheiden Sie, für welche Werte von a an der Extremstelle ein Maximum und für welche ein Minimum vorliegt. Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Berechnung der Extremstelle. 6
- i) Der Graph von f_a wird an der x -Achse gespiegelt. Berechnen Sie die Werte von a , für die sich der gespiegelte Graph und der Graph von f_a unter einem rechten Winkel schneiden. 5

40

TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

Teilaufgabe a

Berechnen der Konzentration nach einer Stunde

Der Term zur Berechnung der Konzentration ist im einführenden Text definiert.

$f(1)$ gibt die Konzentration nach einer Stunde an.

Formulieren Sie einen Antwortsatz mit der korrekten Maßeinheit.

Angaben des Zeitpunktes

Sie benötigen zunächst die Zeitpunkte, an denen die Konzentration den Wert $2,8 \frac{\text{mg}}{\ell}$ aufweist.

Lösen Sie die entsprechende Gleichung mit dem **solve**-Befehl des Rechners.

Geben Sie nun den Zeitpunkt an, zu dem die Konzentration zum ersten Mal $2,8 \frac{\text{mg}}{\ell}$ erreicht.

Bestimmen der Zeitdauer

Sie benötigen zunächst die Zeitpunkte, an denen die Konzentration den Wert $0,5 \frac{\text{mg}}{\ell}$ aufweist.

Lösen Sie die entsprechende Gleichung mit dem **solve**-Befehl des Rechners.
Vergessen Sie am Ende nicht, die Länge des Zeitraumes anzugeben.

Teilaufgabe b

Rechnerischer Nachweis des Zeitpunktes der maximalen Konzentration

Zu ermitteln sind die absolute Maximumstelle und der absolute Maximalwert im Intervall $[0; 12]$.

Als eine notwendige Bedingung muss bei relativen Extremstellen die erste Ableitung null sein.

Bestimmen Sie mithilfe des Rechners die Nullstellen der ersten Ableitung.

Als hinreichende Bedingung können Sie z. B. den Vergleich der Funktionswerte nutzen, um den entsprechenden Zeitpunkt zu bestimmen. Dies bietet sich hier an, da Sie ohnehin die Funktionswerte am Rand des Definitionsbereiches untersuchen müssen.

Formulieren Sie im Sachzusammenhang einen passenden Antwortsatz.

Teilaufgabe c

Berechnen des Zeitpunktes

Wenn x der zu bestimmende Zeitpunkt ist, ist $x + 2$ der Zeitpunkt in 2 Stunden.

$f(x)$ und $f(x + 2)$ sind die Konzentrationen zu diesen beiden Zeitpunkten.

Diese sollen gleich sein.

Lösen Sie die entsprechende Gleichung mit dem **solve**-Befehl des Rechners.

Teilaufgabe d

Bestimmen der Lösung der Gleichung

Geben Sie die Gleichung in den Rechner ein und lösen Sie sie mit dem **solve**-Befehl.

Interpretieren der Lösung im Sachzusammenhang

Um die Lösung zu interpretieren, müssen Sie die Bedeutung der Gleichung im Sachzusammenhang erfassen.

$f'(x)$ gibt geometrisch eine Tangentensteigung an (zeitlich: momentane Änderung).

$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$ gibt geometrisch eine Sekantensteigung an (zeitlich: durchschnittliche Änderung).

Beschreiben Sie in Ihrem Antwortsatz genau, was die Lösung (der Zeitpunkt) x der Gleichung im Sachzusammenhang angibt.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

- a) Berechnen der Konzentration nach einer Stunde:

$$f(1) = 5 \cdot (e^{-0,3} - e^{-4}) = 3,6125... \approx 3,6$$

Eine Stunde nach der Einnahme des Medikamentes beträgt die Konzentration des Medikamentenwirkstoffes im Blut etwa $3,6 \frac{\text{mg}}{\ell}$.

Angaben des Zeitpunktes:

$$f(x) = 2,8$$

$$\Leftrightarrow x = 0,2501... \vee x = 1,9300...$$

CAS

Δ solve($f(x)=2.8,x$) $x=0.250113973$ or $x=1.93008327$

Das erste Mal wird nach etwa 0,25 Stunden bzw. nach einer Viertelstunde eine Konzentration von $2,8 \frac{\text{mg}}{\ell}$ erreicht.

Bestimmen der Zeitdauer:

$$f(x) = 0,5$$

$$\Leftrightarrow x = 0,0287... \vee x = 7,6752...$$

CAS

Δ solve($f(x)=0.5,x$) $x=0.028735942$ or $x=7.67528364$

Da nach etwa 0,25 Stunden die Konzentration von $2,8 \frac{\text{mg}}{\ell}$ erreicht wird, liegt die Konzentration zwischen den berechneten Zeitpunkten oberhalb von $0,5 \frac{\text{mg}}{\ell}$.

$$7,6752... - 0,0287... = 7,6465... \approx 7,6$$

Also ist die Konzentration etwa 7,6 Stunden mindestens $0,5 \frac{\text{mg}}{\ell}$ hoch.

- b) Rechnerischer Nachweis des Zeitpunktes der maximalen Konzentration:

Zu ermitteln ist das absolute Extremum von $f(x)$ im Intervall $[0; 12]$.

Eine notwendige Bedingung für relative Extrema ist $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{e^{-4x}}{2} \cdot \left(3 \cdot e^{\frac{37 \cdot x}{10}} - 40 \right) = 0$$

CAS

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{37} \cdot \ln\left(\frac{40}{3}\right) \approx 0,70007...$$

CAS

$\frac{d}{dx}(f(x))$ $\frac{-e^{-4 \cdot x} \cdot \left(3 \cdot e^{\frac{37 \cdot x}{10}} - 40 \right)}{2}$
$\text{solve}\left(\frac{-e^{-4 \cdot x} \cdot \left(3 \cdot e^{\frac{37 \cdot x}{10}} - 40 \right)}{2} = 0, x\right)$ $x = \frac{10 \cdot \ln\left(\frac{40}{3}\right)}{37}$
$x = \frac{10 \cdot \ln\left(\frac{40}{3}\right)}{37}$ $x = 0.700072207$

Wegen $f(0) = 0$, $f(0,7) \approx 3,75$ und $f(12) \approx 0,14$ liegt ungefähr an der Stelle $x = 0,7$ das absolute Maximum.

Damit ist die Konzentration nach etwa 0,7 Stunden mit etwa $3,75 \frac{\text{mg}}{\ell}$ am höchsten.

$f(0)$	0
$f(0.7)$	3.74887092
$f(12)$	0.136618612

c) Berechnen des Zeitpunktes:

Zu berechnen ist der Zeitpunkt x , für den $f(x) = f(x+2)$ gilt.

$$f(x) = f(x+2) \Leftrightarrow x = 0,2150\dots$$

CAS

$\text{solve}(f(x)=f(x+2),x)$	$x=0.215009419$
-------------------------------	-----------------

Damit ist nach etwa 0,2 Stunden die Konzentration genauso hoch wie 2 Stunden später.

d) Bestimmen der Lösung der Gleichung:

$$f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2,3100\dots$$

CAS

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}, x\right)$	$x=2.31005376$
--	----------------

Interpretieren der Lösung im Sachzusammenhang:

Die momentane Änderungsrate der Medikamentenkonzentration $f'(2,3)$ ist etwa 2,3 Stunden nach der Einnahme des Medikamentes genauso groß wie die durchschnittliche Änderungsrate $\frac{f(3,3) - f(1,3)}{2}$ in den zwei Stunden, die etwa 1,3 Stunden nach Medikamenteneinnahme beginnen.

e) Berechnen des Zeitpunktes mit der Konzentration 0:

Für $x \geq 6$ wird die Konzentration nun durch die Tangente beschrieben, die in $P(6 | f(6))$ an den Graphen von f anschließt.

Die Nullstelle dieser Tangente ist der gesuchte Zeitpunkt.

Die Gleichung der Tangente ist gegeben durch:

$$t(x) = f'(6) \cdot (x - 6) + f(6)$$

$$= -0,2479\dots x + 2,3141\dots$$

CAS

Für die Nullstelle der Tangente gilt:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9,3333\dots$$

CAS

Also ist nach diesem Modell das Medikament nach etwa 9,3 Stunden vollständig abgebaut.

$\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow f'(x)$	<i>Fertig</i>
$f'(6) \cdot (x-6) + f(6) \rightarrow t(x)$	<i>Fertig</i>
$t(x)$	$2.31418443 - 0.247948332 \cdot x$
$\text{solve}(t(x)=0,x)$	$x=9.33333334$

f) Untersuchen, ob die Vorgabe eingehalten wird:

Für $x \geq 4$ wird die Gesamtkonzentration durch die Funktion h beschrieben, für die gilt:

$$h(x) = f(x) + f(x-4) \text{ mit } x \geq 4$$

Zu ermitteln ist das absolute Extremum von $h(x)$ für $x \geq 4$.

Eine notwendige Bedingung für relative Extrema ist $h'(x) = 0$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,6289\dots$$

CAS

$f(x) + f(x-4) \rightarrow h(x)$	<i>Fertig</i>
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(h(x)) = 0, x\right)$	$x=4.62891481$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK