2023

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Niedersachs

Mathematik gA

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Stochastik

Analytische Geometrie

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MyStark.

Abiturprüfung 2017

Abiturprüfung 2018

Die mit einem * markierten Aufgaben sind wegen Lehrplanänderungen seit 2021 für das Abitur nicht mehr relevant.

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Bei MyStark finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019, 2021 und 2022** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autoren

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2018)

Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2019, 2021 und 2022)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2023** im **Grundlegenden Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Grundlegende Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2023** sowie zum **Pflichtteil**. Diese sind auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019, 2021 und 2022**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019, 2021 und 2022**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 besteht die Abiturprüfung aus zwei Teilen, einem **Pflichtteil**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und einem **Wahlteil**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Pflichtteil** werden Ihnen **fünf Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie/Lineare Algebra vorgelegt, die länderübergreifend erstellt werden. Es gibt keine Wahlmöglichkeiten, alle Aufgaben müssen bearbeitet werden. Die Aufgaben dieses Pflichtteils sind gleichgewichtet (5×5 BE) und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.

Der **Wahlteil** setzt sich aus drei Aufgabenblöcken mit jeweils zwei Aufgaben A und B zusammen:
- Block 1: zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis (Aufgabe 1A bzw. 1B)
- Block 2: zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Stochastik (Aufgabe 2A bzw. 2B)
- Block 3: zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Aufgabe 3A bzw. 3B).

Sie müssen eine Aufgabe aus Block 1 und zwei Aufgaben aus den Blöcken 2 und 3 auswählen und bearbeiten. Sie haben daher drei Auswahlmöglichkeiten:
1. Sie wählen neben der aus Block 1 gewählten Aufgabe eine weitere Aufgabe aus Block 2 und eine dritte Aufgabe aus Block 3 aus und bearbeiten somit alle drei Sachgebiete.
2. Sie wählen neben der aus Block 1 gewählten Aufgabe die beiden Aufgaben aus Block 2 aus und bearbeiten somit nur die beiden Sachgebiete Analysis und Stochastik.

3. Sie wählen neben der aus Block 1 gewählten Aufgabe die beiden Aufgaben aus Block 3 aus und bearbeiten somit nur die beiden Sachgebiete Analysis und Analytische Geometrie/Lineare Algebra.

Im Wahlteil wird die Analysisaufgabe aus Block 1 mit 35 BE gewichtet. Die Aufgaben aus den Blöcken 2 und 3 werden jeweils mit 20 BE gewichtet. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit für den Pflichtteil beträgt 60 Minuten und für den Wahlteil 165 Minuten. Hinzu kommen für den Wahlteil 30 Minuten Auswahlzeit.
Nach Ablauf der Bearbeitungszeit des Pflichtteils müssen Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben für den Wahlteil, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen Sie die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.
- Vernetzte Rechner sind in der Abiturprüfung nicht zugelassen.

Weiter sind zur Abiturprüfung gedruckte **Formelsammlungen** der Schulbuchverlage und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2023“ weitere Angaben gemacht.
Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen. Gegliedert sind diese jeweils nach den Lernbereichen.
Bitte beachten Sie: Aufgrund der besonderen, **coronabedingten** Lernsituation in den letzten Schuljahren werden **einzelne** Lehrplaninhalte in der schriftlichen Abiturprüfung 2023 nicht geprüft. Diese sind in der nachfolgenden Aufstellung markiert.

2.1 Analysis

Einführungsphase

Elementare Funktionenlehre
- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (***2023 nicht relevant:*** $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$)
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $g(x)=a \cdot f \cdot (b \cdot (x-c))+d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten

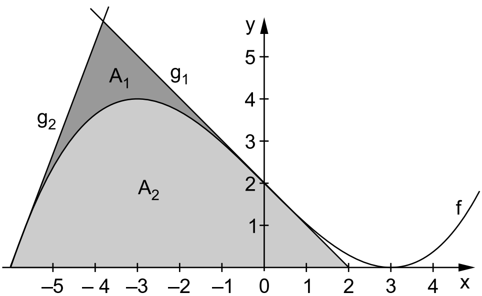
Ableitungen
- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Ableitungsgraph
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$
- Summen-, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

Übungsaufgabe 1 (80 Min., GTR)

Rutschbahn

a) Eine Rutschbahn soll wie ein Stück des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades verlaufen. Sie soll in $A(0|4)$ beginnen und in $B(6|0)$ enden, jeweils mit der Steigung null.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms.
Aus Sicherheitsgründen soll an keiner Stelle der Rutschbahn die Steigung betragsmäßig größer als 1 sein.
Untersuchen Sie, ob dies der Fall ist.

b) f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{27}(x-3)^2(x+6)$.
g_1 ist die Tangente im Wendepunkt von f, g_2 ist die Tangente in der linken Nullstelle.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von g_1 und g_2.
Es wird behauptet, der Flächeninhalt von A_2 sei genau das Fünffache des Flächeninhaltes von A_1 (siehe Abbildung).
Überprüfen Sie die Behauptung.



TIPP **Lösungshinweise – Übungsaufgabe 1**

Teilaufgabe a

Rutschbahnkurve

Hier liegt eine sogenannte „Steckbriefaufgabe“ vor. Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion 3. Grades.

Ein Polynom 3. Grades hat die Form: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die Eigenschaften der Funktion entnimmt man dem Text. Es müssen vier Bedingungen erfüllt sein, weil ein Polynom 3. Grades vier Parameter a, b, c und d hat.

Beachten Sie, dass in dem Text „Sie beginnt in $A(0|4)$ mit der Steigung null“ zwei Bedingungen stecken: „$A(0|4)$ liegt auf dem Graphen“ und „In $A(0|4)$ ist die Steigung null“. Die Steigung entspricht der ersten Ableitung.

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses nach den Parametern a, b, c und d auf.

Steigung

Steigungen berechnet man immer mit der Ableitung.

Fertigen Sie eine kleine Skizze an. Diese macht klar, dass die Steigung in den Randpunkten null ist und dazwischen ein Maximum oder ein Minimum liegen muss.

Polynomfunktionen 3. Grades sind immer symmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Der Wendepunkt liegt also in der Mitte zwischen A (Hochpunkt) und B (Tiefpunkt). Dort ist die Steigung betragsmäßig am größten.

Teilaufgabe b

Schnittpunkt und Schnittwinkel

Da hier eine maßstabsgetreue Zeichnung vorliegt, können Sie alle rechnerisch gewonnenen Ergebnisse damit kontrollieren.

Bestimmen Sie die Geradengleichungen der Geraden g_1 und g_2.

Für die Bestimmung des Wendepunktes und der Tangenten braucht man die Ableitungen der Funktion f. Falls Sie im Umgang mit der Produkt- und Kettenregel unsicher sind, so multiplizieren Sie den Funktionsterm aus.

Die Gleichungen der Tangenten erhält man am einfachsten mit der Punkt-Steigungsform.

Die Abbildung unter Teilaufgabe b zeigt, dass der Graph von f einen Wendepunkt besitzt. Im Wendepunkt muss $f''(x) = 0$ gelten. An diesem Punkt berechnen Sie dann die Steigung.

Die Nullstellen sind einfach zu finden: Da die Funktionsgleichung faktorisiert gegeben ist, können Sie „die Klammern gleich null setzen“.

Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 1

a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

A(0|4) liegt auf dem Graphen:	$f(0) = 4$	$d = 4$
B(6|0) liegt auf dem Graphen:	$f(6) = 0$	$216a + 36b + 6c + d = 0$
Die Steigung in A ist null:	$f'(0) = 0$	$c = 0$
Die Steigung in B ist null:	$f'(6) = 0$	$108a + 12b + c = 0$

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem:

$$216a + 36b + 4 = 0$$
$$\wedge \quad 108a + 12b = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -9a \quad \wedge \quad 216a - 324a = -4$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -9a \quad \wedge \quad a = \frac{1}{27}$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad a = \frac{1}{27}$$

$$\text{linSolve}\left(\begin{cases} 216\cdot a+36\cdot b+4=0 \\ 108\cdot a+12\cdot b=0 \end{cases}, \{a,b\}\right)$$
$$\left\{\frac{1}{27}, \frac{-1}{3}\right\}$$

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4$$

Das Graphenstück für die Rutschbahn liegt zwischen $x = 0$ und $x = 6$.
Aus Symmetriegründen liegt der Wendepunkt in der Mitte zwischen A und B, also W(3|2). Die Steigung im Wendepunkt beträgt:
$f'(3) = 1 - 2 = -1$
Der Graph ist im Wendepunkt zwischen A und B am steilsten, also ist die Steigung betragsmäßig nirgends größer als 1.

b) $f(x) = \frac{1}{27}(x-3)^2(x+6) = \frac{1}{27}(x^2 - 6x + 9)(x+6) = \frac{1}{27}(x^3 - 27x + 54)$

$= \frac{1}{27}x^3 - x + 2$

$f'(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$

$f''(x) = \frac{2}{9}x$

Der Wendepunkt liegt bei W(0|2).
Die Wendetangente hat die Steigung $f'(0) = -1$.
g_1 hat also folgende Gleichung:
$g_1(x) = -x + 2$

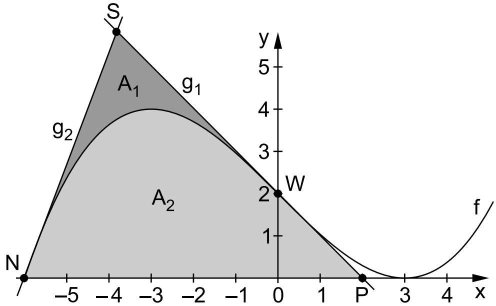
Die linke Nullstelle liegt bei $x = -6$.
Die Tangente in dieser Nullstelle hat die Steigung $f'(-6) = 3$.

g_2 hat also folgende Gleichung:
$g_2(x) = 3x + 18$

Schnittpunkt S von g_1 und g_2:

$$\begin{aligned} -x + 2 &= 3x + 18 \\ -4x &= 16 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad y = 6$
$\Rightarrow \quad S(-4\,|\,6)$



Schnittwinkel α:

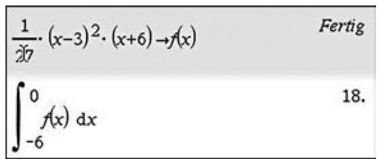
$$\begin{aligned} \alpha &= 180° - \tan^{-1}(3) + \tan^{-1}(-1) \\ &\approx 63{,}43° \end{aligned}$$

Die Gerade g_1 schneidet die x-Achse im Punkt $P(2\,|\,0)$.
Der Flächeninhalt $A_1 + A_2$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks NPS:

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

Der Flächeninhalt A_2 setzt sich zusammen aus dem Integral $\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$ und dem Flächeninhalt des Dreiecks OPW:

$$\begin{aligned} \int_{-6}^{0} f(x)\,dx &= \int_{-6}^{0} \left(\frac{1}{27}x^3 - x + 2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{108}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-6}^{0} \\ &= -12 + 18 + 12 = 18 \end{aligned}$$



$A_2 = 18 + 2 = 20$
$A_1 = 4$
Damit ist die Behauptung richtig, dass A_2 das Fünffache von A_1 ist.

Wahlteil (GTR / CAS) – Aufgabe 1 A

Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot (e^{-0,3x} - e^{-4x})$ modelliert für $0 \le x \le 12$ die Konzentration eines Medikamentenwirkstoffes im Blut. Dabei beschreibt x die Zeit in Stunden (h) nach der Einnahme des Medikamentes und f(x) die Konzentration im Blut in Milligramm pro Liter $\left(\frac{mg}{\ell}\right)$.

Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden, dass $f'(x) = 5 \cdot (-0,3e^{-0,3x} + 4e^{-4x})$ gilt.[2]

Punkte

a) Berechnen Sie die Konzentration eine Stunde nach der Einnahme des Medikamentes.
Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Konzentration erstmals den Wert $2,8 \left(\frac{mg}{\ell}\right)$ annimmt.
Bestimmen Sie, wie lange die Konzentration mindestens $0,5 \frac{mg}{\ell}$ beträgt. 6

b) Bestimmen Sie f'(0,5) und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang. 2

c) Bestimmen[3] Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration am stärksten abnimmt. 3

d) Die Konzentration im Blut sollte möglichst eine Stunde vor dem Schlafengehen am größten sein.
Ermitteln[4] Sie, wie viele Stunden vor dem Schlafengehen das Medikament optimalerweise eingenommen werden sollte. 4

e) Für $1 \le x \le 12$ hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2} f(x-1)$ keine Lösung.
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachkontext. 2

f) Untersuchen Sie, ob es ein Zeitintervall [x; 12] gibt, in dem die durchschnittliche Änderungsrate der Konzentration so groß ist wie die momentane Änderungsrate der Konzentration 0,75 Stunden nach der Einnahme. 4

g) Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Die Gesamtkonzentration ist zu jedem Zeitpunkt die Summe der Konzentrationen, die sich aus der ersten und zweiten Einnahme ergeben.
Ermitteln Sie die Gesamtkonzentration eine Stunde nach der zweiten Einnahme.
Die Gesamtkonzentration soll $6 \frac{mg}{\ell}$ nicht übersteigen.
Untersuchen Sie, ob diese Vorgabe eingehalten wird. 6

---

[2] Die Angabe der ersten Ableitung fehlt in der CAS-Variante.
[3] In der CAS-Variante lautet der Operator „berechnen".
[4] In der CAS-Variante lautet der Operator „berechnen".

Eine vereinfachte Modellierung geht davon aus, dass die Konzentration ab einem bestimmten Zeitpunkt z durch die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(z\,|\,f(z))$ beschrieben werden kann.

h) Bestimmen Sie für $z = 5$ den Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikamentes, zu dem die Konzentration nach diesem vereinfachten Modell null ist. 4

i) Untersuchen Sie, ob es nach dieser vereinfachten Modellierung einen Zeitpunkt z gibt, sodass die Konzentration genau 6 Stunden nach der Einnahme null ist. 4

35

TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil (GTR / CAS) – Aufgabe 1 A

Teilaufgabe a

Berechnung der Konzentration eine Stunde nach der Einnahme

Da der Funktionsterm f(x) die Konzentration eines Medikamentenwirkstoffs im Blut x Stunden nach der Einnahme des Medikamentes angibt, stellt der Funktionswert f(1) die Konzentration eine Stunde nach der Einnahme dar.

Geben Sie den Funktionswert f(1) an.

Ermittlung des erstmaligen Zeitpunktes für die Konzentration $2{,}8\ \frac{mg}{\ell}$

Verschaffen Sie sich mithilfe des Rechners einen Überblick über den Verlauf des Graphen von f für die ersten 12 Stunden nach der Medikamenteneinnahme.

Bestimmen Sie mithilfe des Rechners den Zeitpunkt, an dem die Konzentration erstmals $2{,}8\ \frac{mg}{\ell}$ erreicht.

Berechnung des Zeitintervalls für eine Konzentration von mindestens $0{,}5\ \frac{mg}{\ell}$

Stellen Sie zusätzlich zum Graphen von f auch den Graphen von g mit $g(x) = 0{,}5$ dar.

Bestimmen Sie mit den Rechnerfunktionen die Schnittstellen der Graphen und geben Sie die gesuchte Zeitdauer an.

Teilaufgabe b

Bestimmung und Interpretation von f'(0,5) im Sachzusammenhang

Bestimmen Sie f'(0,5).

Die Ableitung f'(x) an einer bestimmten Stelle x gibt die momentane Änderungsrate des Funktionswertes f(x) an dieser Stelle an.

Beachten Sie die Bedeutung von f(x) im Sachzusammenhang und achten Sie bei der Interpretation des Ergebnisses für $f'(0,5)$ auf den korrekten Gebrauch der Einheiten.

Teilaufgabe c

Ermittlung des Zeitpunktes der stärksten Konzentrationsabnahme

Der Graph von f zeigt, dass nach einem Konzentrationsmaximum die Konzentration immer mehr abnimmt und daher $f'(x)$ negativ wird.

Die stärkste Abnahme der Konzentration liegt an der Wendestelle vor. An dieser Wendestelle hat der Graph von f' einen Tiefpunkt.

Ermitteln Sie die Stelle des Tiefpunktes von f' mit den Rechnerfunktionen.

Beachten Sie, dass der Term $f'(x)$ der Ableitungsfunktion von f angegeben ist.

Teilaufgabe d

Ermittlung des Zeitpunktes der Medikamenteneinnahme

Der Graph von f zeigt, dass es ein Maximum in der Nähe von $x = 1$ gibt. Für diese Stelle muss $f'(x) = 0$ gelten.

Bestimmen Sie die Maximalstelle mit den Rechnerfunktionen.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt für eine optimale Einnahme des Medikamentes.

Teilaufgabe e

Interpretation der Aussage

Beachten Sie, dass f(x) die Konzentration x Stunden nach Einnahme des Medikamentes bedeutet.

Interpretieren Sie entsprechend den Term $f(x-1)$ und die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x-1)$ im Sachkontext.

Deuten Sie im Sachkontext, dass die angegebene Gleichung keine Lösung hat.

(Die Voraussetzung $1 \leq x$ ist notwendig, damit der Term $x - 1$ nicht negativ wird und $f(x-1)$ grundsätzlich definiert ist.)

Teilaufgabe f

Untersuchung zur Existenz eines Zeitintervalls [x; 12]

Die durchschnittliche Änderungsrate im Zeitintervall [x; 12] wird durch den Quotienten $\frac{f(12) - f(x)}{12 - x}$ berechnet.

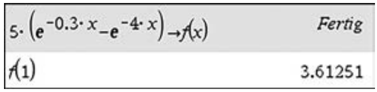
Die momentane Änderungsrate 0,75 Stunden nach der Medikamenteneinnahme entspricht der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0,75$.

Untersuchen Sie mithilfe der Rechnerfunktionen, ob es eine Stelle x gibt, für die diese beiden Änderungsraten übereinstimmen.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (GTR / CAS) – Aufgabe 1 A

a) Berechnung der Konzentration eine Stunde nach der Einnahme:
Der Funktionsterm f(x) beschreibt den zeitlichen Verlauf der Konzentration eines Medikamentenwirkstoffs im Blut in Milligramm pro Liter. Dabei ist x die Zeit in Stunden nach Einnahme des Medikamentes.

Der Funktionswert f(1) stellt die Konzentration eine Stunde nach Einnahme des Medikamentes dar.

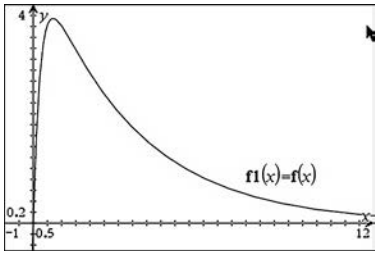


$f(1) \approx 3{,}6$

Eine Stunde nach der Einnahme des Medikamentes beträgt die Konzentration etwa $3{,}6\,\frac{mg}{\ell}$.

Ermittlung des erstmaligen Zeitpunktes für die Konzentration $2{,}8\,\frac{mg}{\ell}$:

Der Graph von f zeigt, dass der Zeitpunkt, zu dem die Konzentration erstmals den Wert $2{,}8\,\frac{mg}{\ell}$ erreicht, deutlich weniger als eine Stunde beträgt.

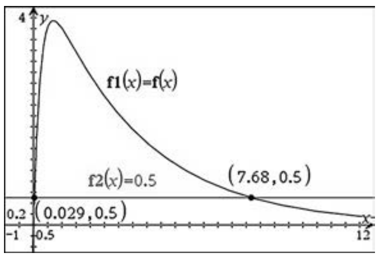


Mit dem Rechner erhält man:
$f(x) = 2{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0{,}25$

Nach etwa einer Viertelstunde ist die Konzentration auf $2{,}8\,\frac{mg}{\ell}$ angewachsen.

Berechnung des Zeitintervalls für eine Konzentration von mindestens $0{,}5\,\frac{mg}{\ell}$:

Die Abbildung zeigt neben dem Graphen von f auch den Graphen der konstanten Funktion g mit $g(x) = 0{,}5$.
Der Rechner liefert die Schnittstellen der Graphen von f und g:
$x_1 = 0{,}029$ und $x_2 = 7{,}68$



Zwischen den beiden Schnittstellen verläuft der Graph von f oberhalb des Graphen von g.
Aus $x_2 - x_1 \approx 7{,}7$ folgt, dass die Konzentration für etwa 7,7 Stunden mindestens $0{,}5\,\frac{mg}{\ell}$ beträgt.

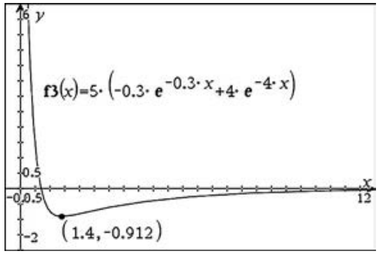
b) Bestimmung und Interpretation von f'(0,5) im Sachzusammenhang:
Der Rechner liefert:

$f'(0{,}5) \approx 1{,}4$

Eine halbe Stunde nach der Einnahme des Medikamentes nimmt die Konzentration des Wirkstoffs im Blut um etwa $1{,}4\,\frac{mg}{\ell}$ pro Stunde zu.

c) Bestimmung des Zeitpunktes der stärksten Konzentrationsabnahme:

Die stärkste Abnahme der Konzentration findet zu einem Zeitpunkt statt, bei dem der Graph von f' einen Tiefpunkt hat. An dieser Stelle besitzt der Graph von f eine Wendestelle, bei der eine Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht.
Der Rechner liefert einen Tiefpunkt von f' bei $x \approx 1{,}4$.
Etwa 1,4 Stunden nach der Einnahme nimmt die Konzentration am stärksten ab.



d) Ermittlung des Zeitpunktes der Medikamenteneinnahme:
Der Zeitpunkt maximaler Konzentration liegt vor, wenn der Graph von f ein Maximum hat. Der Graph von f zeigt, dass es eine Maximalstelle in der Nähe von $x = 1$ gibt.
Für diese Stelle muss $f'(x) = 0$ gelten.
Mit den Rechnerfunktionen erhält man:
$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0{,}7$

$5\cdot\left(-0.3\cdot e^{-0.3\cdot x}+4\cdot e^{-4\cdot x}\right)\to df(x)$	*Fertig*
nSolve$(df(x)=0,x)$	0.700072

Da das Maximum der Konzentration etwa 0,7 Stunden nach der Medikamenteneinnahme vorliegt, sollte das Medikament 1,7 Stunden vor dem Schlafengehen eingenommen werden.

e) Interpretation der Aussage:
Dass die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2} f(x-1)$ für $1 \le x \le 12$ keine Lösung hat, bedeutet:
Es gibt im betrachteten Zeitraum keinen Zeitpunkt x, bei dem die Konzentration des Medikamentenwirkstoffes genau halb so groß ist wie eine Stunde zuvor.

f) Untersuchung zur Existenz eines Zeitintervalls [x; 12]:
Die momentane Änderungsrate 0,75 Stunden nach der Medikamenteneinnahme stellt die erste Ableitung an der Stelle $x = 0{,}75$ dar.
Die durchschnittliche Änderungsrate im Zeitintervall [x; 12] ist $\frac{f(12) - f(x)}{12 - x}$.
Zu untersuchen ist, ob es für die Gleichung
$\frac{f(12) - f(x)}{12 - x} = f'(0{,}75)$ eine Lösung gibt.
Der Rechner liefert die Lösung $x \approx 0{,}21$.

nSolve$\left(\frac{f(12)-f(x)}{12-x}=df(0.75),x\right)$	0.207646

Im Intervall [0,21; 12] stimmt die durchschnittliche Änderungsrate der Konzentration mit der momentanen Änderungsrate der Konzentration an der Stelle $x = 0{,}75$ überein.