2023

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium NRW

Mathematik GK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2020*

* Da die Aufgabe B4 in den Jahrgängen bis 2020 für das Abitur seit 2021 nicht mehr prüfungsrelevant ist, wird diese nicht mehr abgedruckt.

Abiturprüfung 2021

Abiturprüfung 2022

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Bei MyStark finden Sie:
– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs
– **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
– **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
– alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2022** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autorinnen und Autoren:

Georg Breitenfeld

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4;
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil B: B2 (GTR / CAS), B4 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022;
Download: 2017 – A Teilaufgabe d, B1 (GTR), B1 (CAS), B5 (GTR / CAS); 2018 – B1 (CAS);
2019 – B1 (CAS); 2020 – B2 (GTR)

Herbert Kompernaß

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B2 (GTR / CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022;
Download: 2017 – A Teilaufgaben a, b und c, B2 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR / CAS); 2019 – B2 (GTR);
2020 – B1 (CAS); 2021 – B1 (CAS)

Kristin Menke

Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil A;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil A: A3, Prüfungsteil B: B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022;
Download: 2021 – A1, A2

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Grundkurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2023** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2023 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2018 bis 2022**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2022**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2023 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2023

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik besteht aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Grundkurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Diese sind verbindlich zu bearbeiten, d. h., es findet keine Auswahl durch die Fachlehrkraft statt. Die Aufgaben können aus allen Inhaltsfeldern (Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik) und deren Verknüpfungen sein. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet 2 Analysisaufgaben, 1 Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und 1 Stochastikaufgabe.
  Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
  Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet, wobei eine **Analysisaufgabe**, die Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und die **Stochastikaufgabe** zu wählen sind.
  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:
  - GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Grundkurs insgesamt **225 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 60 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2023

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Grundkurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2023** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	**Beispiele**
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2019 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Untersuchung von ganzrationalen Funktionen	2018 – Aufgabe B2 (GTR/CAS)
– Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei p(x) ein Polynom mit maximal drei Summanden ist	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
– Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben	2021 – Aufgabe B1 (GTR)
– Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen	2019 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe a
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2021 – Aufgabe B2 (GTR/CAS), Teilaufgabe b (3)
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a

Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2021 – Aufgabe B3, Teilaufgabe b (1)
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Skalarprodukt	2018 – Aufgabe B3 (GTR/CAS), Teilaufgabe b
Stochastik	
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	2021 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)
• Binomialverteilung	2018 – Aufgabe B5 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Grundkurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 25 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 75 Punkte (Analysis 35 Punkte, Vektorielle Geometrie und Stochastik jeweils 20 Punkte).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

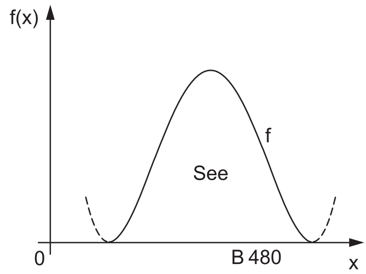
Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil B – Analysis B1

Eingeschlossen von der Bundesstraße B 480, die in einem geeigneten Koordinatensystem entlang der x-Achse verläuft, und dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16, \ \ x \in \mathbb{R}$

befindet sich ein See. Der Sachverhalt ist in der Abbildung skizziert.



Abbildung

a) (1) Berechnen Sie die Größe des Sees unter der Annahme, dass 1 Längeneinheit 50 m sind.

(2) Es wird vermutet, dass im Punkt A des Sees, der am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist, eine Verschmutzung stattgefunden hat.
Bestimmen Sie unter Angabe der Ableitungen der Funktion f und des rechnerischen Nachweises der hinreichenden Bedingung die Koordinaten von A.

b) An der Stelle des Sees, an dem die Verschmutzung vermutet wird, werden Wasserproben entnommen und die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben wird ermittelt. Die Ergebnisse der Proben sind in der Tabelle dargestellt:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250

Tabelle

(1) Begründen Sie, warum im angegebenen Zeitraum von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden kann.

(2) Unter Berücksichtigung, dass zu Beginn der Beobachtung 2 000 Kleinlebewesen und nach 21 Tagen nur noch 250 Kleinlebewesen in den entsprechenden Proben gezählt werden, soll die exponentielle Abnahme nun durch eine Funktion modelliert werden.
Zeigen Sie durch Lösen eines Gleichungssystems, dass die Modellierung auf eine Funktion mit der Gleichung

$a(t) = 2\,000 \cdot e^{-0{,}099t}, \ \ 0 \le t \le 21$

führt. Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und a(t) als Anzahl der Kleinlebewesen zum Zeitpunkt t aufgefasst.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte der Begrenzung des Sees mit der Bundesstraße.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt, mit einem bestimmten Integral.

Beachten Sie bei der Berechnung der Größe des Sees, dass 1 Flächeneinheit 2 500 m^2 sind.

(2) Überlegen Sie, welche Bedeutung die Eigenschaft „am weitesten von der Bundesstraße entfernt“ für den Graphen der Funktion hat.

Die notwendige Bedingung für eine Maximalstelle ist: $f'(x) = 0$

Die hinreichende Bedingung für eine Maximalstelle ist: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

Vergessen Sie nicht, die Koordinaten des Punktes anzugeben.

Teilaufgabe b

(1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.

Berechnen Sie den Abnahmefaktor durch Aufstellen geeigneter Gleichungen.

(2) Stellen Sie mithilfe der vorgegebenen Wertepaare ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

(3) Berechnen Sie 30 % des Anfangsbestandes. Setzen Sie das Ergebnis mit dem Funktionsterm gleich und lösen Sie die Gleichung.

Setzen Sie das Ergebnis mit dem Funktionsterm gleich und lösen Sie die Gleichung.

Teilaufgabe c

(1) Lösen Sie die Gleichung $g(t) = 2\,000$ mit einem geeigneten Rechnerbefehl oder grafisch.

Geben Sie an, welchem Tag nach dem Filtereinsatz $(t = 21)$ die Lösung entspricht.

(2) Überlegen Sie, welche Bedeutung die Eigenschaft „wirkt sich positiv aus“ für den Verlauf des Graphen der Funktion hat.

Die notwendige Bedingung für eine Minimalstelle ist: $g'(t) = 0$

Die hinreichende Bedingung für eine Minimalstelle ist: $g'(t) = 0$ und $g''(t) > 0$

Achten Sie auf den Definitionsbereich der Funktion.

Vergessen Sie nicht, den Funktionswert zu diesem Zeitpunkt zu berechnen.

(3) Überlegen Sie, welche Anzahlen der Kleinlebewesen den Grund- bzw. Prozentwert darstellen, und berechnen Sie den Prozentsatz.

Lösung

a) (1) Zur Berechnung des Flächeninhaltes des Sees werden die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f, durch den der See begrenzt wird, mit der Bundesstraße B 480 ermittelt. Dies sind die Schnitt- bzw. Berührpunkte des Graphen mit der x-Achse, also die Nullstellen der Funktion f.

GTR

$f(x):=x^4-10\cdot x^3+33\cdot x^2-40\cdot x+16$	*Fertig*
polyRoots$(f(x),x)$	$\{1,1,4,4\}$

CAS

$f(x):=x^4-10\cdot x^3+33\cdot x^2-40\cdot x+16$	*Fertig*
solve$(f(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=4$

Die Funktion f hat die doppelten Nullstellen $x_1=1$ und $x_2=4$.

Die Größe des Sees entspricht im Modell dem Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt. Dieser Flächeninhalt ist gleich dem Wert des Integrals der Funktion f im Bereich [1; 4].

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 8{,}1\,[\text{FE}]$$

GTR/CAS

$\int_1^4 f(x)\,dx$	8.1
$8.1\cdot 2500$	20250.

Da 1 Längeneinheit 50 m sind, entspricht 1 Flächeneinheit folgende Quadratmeterzahl:
$50\text{ m}\cdot 50\text{ m}=2\,500\text{ m}^2$

Die Fläche des Sees beträgt somit:
$8{,}1\cdot 2\,500\text{ m}^2=20\,250\text{ m}^2$

[Umgerechnet in Ar sind dies 202,5 a.]

(2) Der Punkt, der am weitesten von der Bundesstraße B 480 entfernt ist, ist der lokale (relative) Hochpunkt des Graphen der Funktion f.

Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit der Summen- und Potenzregel bestimmt:

$$f'(x)=4\cdot x^3-10\cdot 3x^2+33\cdot 2x-40$$
$$=4x^3-30x^2+66x-40$$

Notwendige Bedingung für eine Maximalstelle: $f'(x)=0$

$$f'(x)=0 \iff x_1=1 \text{ oder } x_2=\frac{5}{2} \text{ oder } x_3=4$$

GTR

$a1f(x):=4\cdot x^3-30\cdot x^2+66\cdot x-40$	*Fertig*
polyRoots$(a1f(x),x)$	$\left\{1,\frac{5}{2},4\right\}$

CAS

$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$4\cdot x^3-30\cdot x^2+66\cdot x-40$
solve$(a1f(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=\frac{5}{2}$ or $x=4$

Die Stellen $x_1=1$ und $x_3=4$ kommen für ein Maximum nicht infrage, da sie die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse sind. Somit bleibt nur $x_2=\frac{5}{2}$ als Kandidat für eine Maximalstelle.

Für die 2. Ableitung der Funktion f gilt:

$$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 - 30 \cdot 2x + 66$$
$$= 12x^2 - 60x + 66$$

GTR

$a2f(x) := 12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66$ Fertig

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ Fertig

$a2f(x)$ $12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66$

Hinreichende Bedingung für eine Maximalstelle: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = -9 < 0$$

Durch Berechnung des entsprechenden Funktionswertes ergibt sich, dass der Punkt $A\left(\frac{5}{2} \,\middle|\, \frac{81}{16}\right)$ am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist.

GTR/CAS

$a2f\left(\frac{5}{2}\right)$ -9

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ $\frac{81}{16}$

b) (1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.

Ist B_0 der Anfangsbestand und q der Abnahmefaktor, so erhält man zu den angegebenen Zeiten bei einer exponentiellen Abnahme folgende allgemeine Werte:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250
Werte bei exponentieller Abnahme	B_0	$B_0 \cdot q^1$	$B_0 \cdot q^4$	$B_0 \cdot q^{10}$	$B_0 \cdot q^{21}$

Aus der ersten Spalte der Tabelle kann der Anfangsbestand $B_0 = 2\,000$ abgelesen werden. Aus den weiteren Spalten erhält man dann:

$$1\,810 = 2\,000 \cdot q^1 \Rightarrow q = \frac{1\,810}{2\,000} = 0{,}905$$

$$1\,350 = 2\,000 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1\,350}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

$$740 = 2\,000 \cdot q^{10} \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{740}{2\,000}} \approx 0{,}905$$

$$250 = 2\,000 \cdot q^{21} \Rightarrow q = \sqrt[21]{\frac{250}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

GTR/CAS

$\text{approx}\left(\frac{1810}{2000}\right)$ 0.905

$\text{approx}\left(\sqrt[4]{\frac{1350}{2000}}\right)$ 0.906413

$\text{approx}\left(\sqrt[10]{\frac{740}{2000}}\right)$ 0.905358

$\text{approx}\left(\sqrt[21]{\frac{250}{2000}}\right)$ 0.905724

Der Wachstumsfaktor q ist annähernd gleich. Daher kann von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden.

Abiturprüfung 2021 Mathematik Grundkurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil B – Analysis B1 (GTR)

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in Abbildung 1 dargestellt.

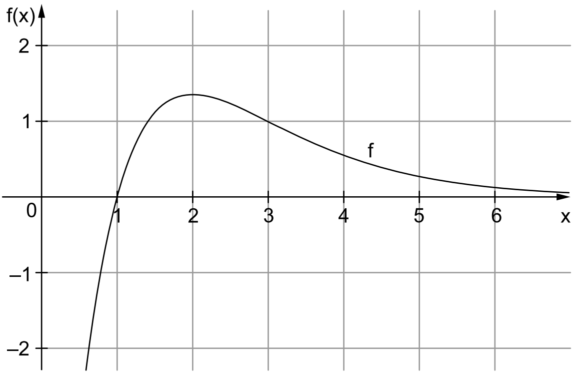


Abbildung 1

Punkte

a) (1) Begründen Sie, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle von f ist. 1

(2) Zeigen Sie: $f'(x) = 10 \cdot (2-x) \cdot e^{-x}$. 2

(3) Untersuchen Sie f rechnerisch auf lokale Extremstellen.
[Kontrolllösung: An der Stelle $x = 2$ liegt eine lokale Maximalstelle vor.] 3

(4) Ermitteln Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) < 0{,}1$. 3

b) $P_u(u \mid f(u))$ ist ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f.
P_u legt zusammen mit $N(1 \mid 0)$ und $F_u(u \mid 0)$ das Dreieck NF_uP_u fest.

(1) Zeichnen Sie in Abbildung 1 das Dreieck NF_uP_u ein, das sich ergibt, wenn P_u mit dem Hochpunkt des Graphen von f übereinstimmt. 1

(2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des in b) (1) gezeichneten Dreiecks. 2

(3) Untersuchen Sie, ob P_u so auf dem Graphen von f gewählt werden kann, dass das zugehörige Dreieck NF_uP_u den Flächeninhalt 2 FE hat. 4

c) (1) Gegeben ist die Funktion t mit $t(x) = -10 \cdot e^{-3} \cdot x + 50 \cdot e^{-3}$, $x \in \mathbb{R}$, und der Wendepunkt $W(3 \mid f(3))$ des Graphen von f.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von t die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist. 4

(2) Die Schnittpunkte der in c) (1) gegebenen Tangente mit den beiden Koordinatenachsen legen zusammen mit dem Koordinatenursprung $O(0|0)$ ein Dreieck fest.
Berechnen Sie den Umfang dieses Dreiecks. 4

(3) Im Intervall $[1; 5]$ begrenzen der Graph von f und die in c) (1) gegebene Tangente zusammen mit der x-Achse eine Fläche F (siehe Abbildung 2).
Bestimmen Sie den Flächeninhalt von F. 3

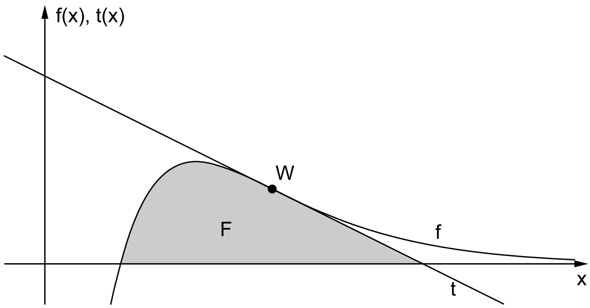


Abbildung 2

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = x$ wird als „1. Winkelhalbierende" bezeichnet. Es gibt genau einen Punkt R auf dem Graphen von f, in dem die Tangente t_R an den Graphen von f parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.

(1) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Tangente t_R.
[Mögliche Lösung: Falls man auf vier Stellen nach dem Komma rundet, ergibt sich für die Tangente t_R als Gleichung $y = x - 0{,}3823$.] 4

(2) Die Gerade mit der Gleichung $y = -x$ wird als „2. Winkelhalbierende" bezeichnet.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente t_R mit der 2. Winkelhalbierenden. 2

(3) Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand, den die Tangente t_R von der 1. Winkelhalbierenden hat. 2

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Setzen Sie den Funktionsterm gleich 0 und lösen Sie die entstehende Gleichung nach x auf.

(2) Leiten Sie den Funktionsterm mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel ab.

(3) Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Bilden Sie die 2. Ableitung mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel.

Alternativ: Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$ und an der möglichen Extremstelle findet ein Vorzeichenwechsel statt.

(4) Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0{,}1$.

Durch die zwei Lösungen sind drei Intervalle festgelegt. Überlegen Sie mithilfe des Maximums, in welchen Intervallen die Funktionswerte kleiner als 0,1 sind.

Alternativ: Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}1$.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Gerade mit dem Graphen der Funktion f.

Geben Sie an, in welchen Bereichen der Graph der Funktion f unter der Geraden liegt.

Teilaufgabe b

(1) Achten Sie darauf, dass die Punkte P_2 und F_2 die gleiche x-Koordinate haben.

Zeichnen Sie das Dreieck und nicht nur die Punkte ein.

(2) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet sich nach der Formel:
$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Kathete 1} \cdot \text{Kathete 2}$

(3) Stellen Sie eine Flächeninhaltsfunktion für die Dreiecksfläche auf.

Beachten Sie, dass $u < 1$ sein kann. Welche Auswirkung hat dies für den Funktionsterm der Flächeninhaltsfunktion?

Setzen Sie den Funktionsterm der Flächeninhaltsfunktion gleich 2 und lösen Sie die Gleichung mit dem GTR.

Teilaufgabe c

(1) Denken Sie daran, dass bei einer Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt P die gleiche Steigung und der gleiche Funktionswert vorliegen.

Die Steigung des Graphen der Funktion an der Stelle $x = 3$ ist gleich dem Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x = 3$.

(2) Der Schnittpunkt mit der y-Achse kann mithilfe des y-Achsenabschnitts der Tangente bestimmt werden.

Im Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist der Funktionswert der Tangente gleich null.

Die Länge einer Strecke mit den Endpunkten $P(x_P | y_P)$ und $Q(x_Q | y_Q)$ berechnet sich nach folgender Formel: $d(P; Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

Denken Sie daran, dass der Umfang gesucht ist.

(3) Die Gesamtfläche kann durch eine Senkrechte vom Wendepunkt W auf die x-Achse in zwei Teilflächen unterteilt werden.

Achten Sie bei den Integrationsgrenzen auf die vorherigen Aufgaben.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilflächen mithilfe des GTR.

Teilaufgabe d

(1) Die 1. Winkelhalbierende hat die Steigung 1.

Die Steigung in einem Punkt des Graphen einer Funktion f ist gleich dem Funktionswert der 1. Ableitung an dieser Stelle.

Nutzen Sie die allgemeine Form der Geradengleichung zur Bestimmung der Gleichung der Tangente.

(2) Setzen Sie die Funktionsterme der Tangente t_R und der 2. Winkelhalbierenden gleich.

Lösen Sie die Gleichung mit dem GTR.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S.

(3) Der Abstand zwischen der Tangente t_R und der 1. Winkelhalbierenden ist gleich dem Abstand des Schnittpunktes S vom Ursprung.

Nutzen Sie den Satz des Pythagoras zur Berechnung des Abstandes.

Lösung

a) (1) In den Nullstellen der Funktion $f(x) = 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert null.

$$\begin{aligned} 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x} &= 0 \quad \Big| : 10e^{-x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$x = 1$ ist die einzige Nullstelle.

(2) Eine Ableitung mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = 10 \cdot [1 \cdot e^{-x} + (x-1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}] = 10 \cdot [(1 - x + 1) \cdot e^{-x}] = 10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$$

(3) Zunächst wird die 2. Ableitung mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel berechnet:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 10 \cdot [-1 \cdot e^{-x} + (2 - x) \cdot (-1) \cdot e^{-x}] \\ &= 10 \cdot [(-1 - 2 + x) \cdot e^{-x}] \\ &= 10 \cdot (x - 3) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x} &= 0 \quad \Big| : 10e^{-x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ 2 - x &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(2) = 10 \cdot (2 - 3) \cdot e^{-2} = -10e^{-2} < 0$

Da $f''(2) < 0$ ist, liegt an der Stelle $x = 2$ eine lokale Maximumstelle vor.

Alternativ:
Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$ und an der möglichen Extremstelle findet ein Vorzeichenwechsel statt.

$f'(1) = 10 \cdot (2 - 1) \cdot e^{-1} = 10e^{-1} > 0$

$f'(3) = 10 \cdot (2 - 3) \cdot e^{-1} = -10e^{-1} < 0$

An der Stelle $x = 2$ findet ein (+/–)-Vorzeichenwechsel statt. Daher liegt hier eine lokale Maximumstelle vor.

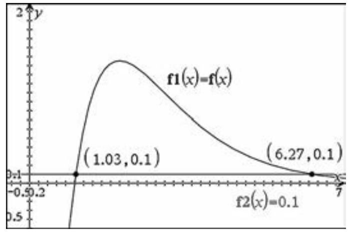
Eine Rechnung mit dem GTR reicht bei den Operatoren „begründen Sie“, „zeigen Sie“, „untersuchen Sie rechnerisch“ oder „weisen Sie rechnerisch nach“ nicht aus.

(4) Der Funktionsterm wird gleich 0,1 gesetzt:
$f(x) = 0{,}1$
Der GTR liefert die Lösungen $x \approx 1{,}03$ bzw. $x \approx 6{,}27$.

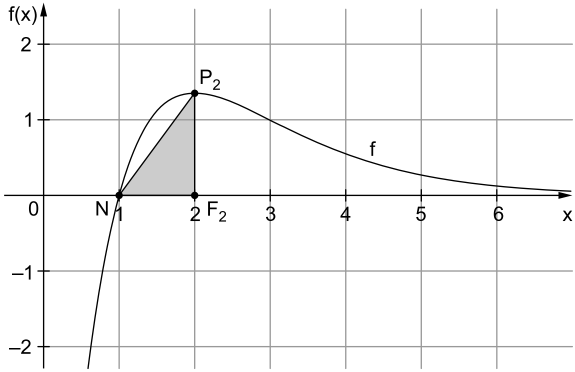
$f(x):=10\cdot(x-1)\cdot e^{-x}$	*Fertig*
nSolve(f(x)=0.1,x)	1.02795
nSolve(f(x)=0.1,x)|x>2	6.26654

Durch die beiden Nullstellen wird die x-Achse in drei Teilbereiche aufgeteilt. Der absolute Hochpunkt hat die Koordinaten $H(2\,|\,f(2))$. Im Intervall $[1{,}03;\ 6{,}27]$ sind die Funktionswerte somit größer als 0,1. In den Intervallen $]-\infty;\ 1{,}03[$ und $]6{,}27;\ \infty[$ sind die Funktionswerte kleiner als 0,1.

Alternativ:
Der Graph der Funktion f und die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}1$ werden im Grafikfenster gezeichnet und deren Schnittpunkte bestimmt.
In den Intervallen $]-\infty;\ 1{,}03[$ und $]6{,}27;\ \infty[$ sind die Funktionswerte kleiner als 0,1.



b) (1) Wenn P_u mit dem Hochpunkt des Graphen übereinstimmt, muss $u = 2$ sein.



(2) Das Dreieck ist rechtwinklig; die Katheten haben die Länge 1 Längeneinheit und f(2) Längeneinheit.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet sich nach folgender Formel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Kathete 1} \cdot \text{Kathete 2}$$

Einsetzen in die Formel liefert als Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1{,}35335 \approx 0{,}6767\ [\text{FE}]$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt ca. 0,6767 Flächeneinheiten.