2023

Abitur

Original-Prüf

mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium NRW

Mathematik LK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2022** zum Download

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2020*

* Da die Aufgabe B4 in den Jahrgängen bis 2020 für das Abitur seit 2021 nicht mehr prüfungsrelevant ist, wird diese nicht mehr abgedruckt.

Abiturprüfung 2021

Abiturprüfung 2022

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Bei MyStark finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2022** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autorinnen und Autoren:

Georg Breitenfeld

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4;
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B4 (GTR);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022;
Download: 2017 – A Teilaufgabe d, B5 (GTR), B5 (CAS); 2020 – B2 (GTR); 2021 – B2 (GTR), B4 (CAS)

Herbert Kompernaß

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (GTR/CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022;
Download: 2017 – A Teilaufgaben a, b und c, B1 (GTR), B1 (CAS), B2 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR/CAS); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS), B2 (GTR); 2020 – B1 (CAS); 2021 – B1 (CAS)

Kristin Menke

Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil A;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil A: A3, Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022;
Download: 2021 – A1, A2

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2023** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2023 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2018 bis 2022**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2022**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2022**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2023 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2023

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik besteht aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Diese sind verbindlich zu bearbeiten, d. h., es findet keine Auswahl durch die Fachlehrkraft statt. Die Aufgaben können aus allen Inhaltsfeldern (Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik) und deren Verknüpfungen sein. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet 2 Analysisaufgaben, 1 Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und 1 Stochastikaufgabe.
  Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
  Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet, wobei eine **Analysisaufgabe**, die Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und die **Stochastikaufgabe** zu wählen sind.
  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:
  - GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Leistungskurs insgesamt **270 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 70 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2023

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2023** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	**Beispiele**
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern	2021 – Aufgabe B1 (GTR)
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2020 – Aufgabe B3 (GTR/CAS), Teilaufgabe c (2)
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen und Abstände	2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Skalarprodukt	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe a

Stochastik	
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe d
• Binomialverteilung und Normalverteilung	2019 – Aufgabe B5 (GTR/CAS)
• Testen von Hypothesen	2018 – Aufgabe B5 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Leistungskurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 30 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 90 Punkte (Analysis 40 Punkte, Vektorielle Geometrie und Stochastik jeweils 25 Punkte).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

4 Operatoren und Anwendungsbereiche

Bei der Formulierung der zentralen Prüfungsaufgaben werden sogenannte **Operatoren** verwendet, die sicherstellen sollen, dass alle Schüler*innen und Lehrer*innen unter einer bestimmten Aufgabenstellung das Gleiche verstehen. Damit Sie die Aufgabenstellungen korrekt erfassen können, ist es sehr zu empfehlen, sich mit diesen Operatoren auseinanderzusetzen. Im Folgenden finden Sie eine vollständige Liste dieser Operatoren.
Es können auch Operatoren verwendet werden, die nicht in dieser Liste enthalten sind, wenn davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann. Beispiele hierfür sind: herleiten, ordnen, prüfen, vergleichen, darstellen.
Die Operatoren können durch Zusätze (wie „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden.

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil B – Analysis B2

Das seitliche Profil einer Wasserrutsche in einem Freibad kann durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = (x+1) \cdot e^{1-x}, \quad 0 \le x \le 5$[1]

modelliert werden (x und f(x) in Metern). Das Schwimmbecken wird im Bereich der Rutsche auf der linken Seite durch den negativen Teil der y-Achse begrenzt und der obere Beckenrand befindet sich auf Höhe der x-Achse. Für den Wasserspiegel der Wasseroberfläche wird angenommen, dass er 20 cm unterhalb des Beckenrandes liegt. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

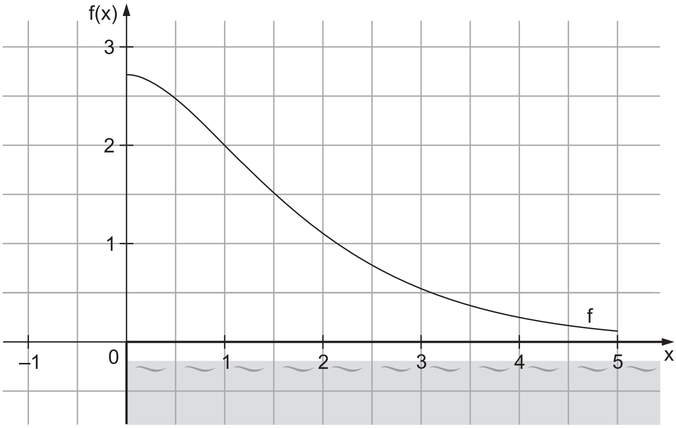


Abbildung 1

a) (1) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Wasseroberfläche das Ende der Rutsche liegt.

(2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Profillinie der Rutsche auf der gesamten Länge fällt, und bestimmen Sie das durchschnittliche Gefälle der Rutsche.

(3) Bestimmen Sie durch Rechnung denjenigen Punkt auf der Profillinie der Rutsche, in dem das Gefälle am größten ist.
Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Rutsche an keiner Stelle 60° überschreiten.
Überprüfen Sie, ob die Rutsche dieser Norm gerecht wird.

1 Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $0 \le x \le 5$ zur Modellierung verwendet.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Beachten Sie, dass der Abstand bis zur Wasseroberfläche und nicht bis zur x-Achse gesucht ist.

(2) Die Profillinie der Rutsche fällt auf der gesamten Länge, wenn der Graph der Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend ist.

Bestimmen Sie die 1. Ableitung von f und zeigen Sie, dass $f'(x) < 0$ gilt für $0 < x < 5$.

Berechnen Sie die durchschnittliche/mittlere Steigung des Graphen der Funktion f mit der Formel $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Oder

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie die durchschnittliche/mittlere Steigung grafisch mit einer Sekante durch zwei Punkte des Graphen.

(3) Das größte Gefälle der Rutsche liegt an der Minimalstelle der 1. Ableitung $f'(x)$ vor.

Überprüfen Sie als Kandidaten hierfür die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ und die Randstellen des Definitionsbereichs.

Bestimmen Sie den Winkel α, der zu dem größten Gefälle gehört, mithilfe des Tangens.

Teilaufgabe b

(1) Beachten Sie, dass beide Seiten verkleidet werden sollen und dass die Verkleidung bis zur Wasseroberfläche reichen soll.

Berechnen Sie den Inhalt einer Seitenfläche, indem Sie zum Flächeninhalt zwischen der Profillinie und der x-Achse den Flächeninhalt eines Rechtecks addieren.

Oder

Stellen Sie die Wasseroberfläche als Funktion dar und berechnen Sie den Inhalt einer Seitenfläche als Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen.

(2) Überlegen Sie, welcher Flächeninhalt durch das bestimmte Integral angegeben wird und welcher Flächeninhalt davon abgezogen wird.

Markieren Sie in der Abbildung den Flächeninhalt, der übrig bleibt.

Vergessen Sie nicht, auch die zweite Teilfläche, in die die Verkleidung zerlegt wird, einzuzeichnen.

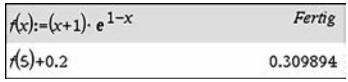
(3) Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Bilden Sie $F'(x)$ und bestimmen Sie a und b, indem Sie die Funktionsterme miteinander vergleichen.

Lösung

a) (1) Da die Wasseroberfläche 20 cm = 0,2 m unterhalb des Beckenrandes liegt, muss zum Funktionswert f(5) noch der Wert 0,2 addiert werden:
$f(5) + 0,2 \approx 0,31$

GTR/CAS



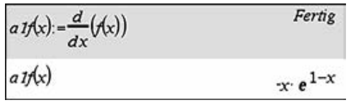
Das Ende der Rutsche liegt ca. 0,31 m (= 31 cm) über der Wasseroberfläche.

(2) Die Profillinie der Rutsche fällt auf der gesamten Länge, wenn der Graph der Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend ist.
Dies ist der Fall, wenn $f'(x) < 0$ ist für $0 < x < 5$. (Die Ränder des Definitionsbereichs können bei der Untersuchung auf Monotonie vernachlässigt werden.)

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{1-x} + (x+1) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= e^{1-x} - (x+1) \cdot e^{1-x} \\ &= e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} - e^{1-x} \\ &= -x \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS



Für $x > 0$ gilt folgende Abschätzung:

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{>0} < 0$$

Der Graph der Funktion f ist streng monoton fallend für $x > 0$. Die Profillinie der Rutsche fällt daher auf der gesamten Länge.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche entspricht der mittleren Steigung des Funktionsgraphen von f im Definitionsbereich $0 \le x \le 5$.

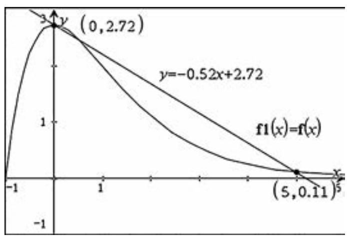
$$m = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \approx -0,52$$

GTR/CAS

Alternativ:
Die mittlere Steigung m kann auch grafisch anhand der Gleichung der Sekante durch die Punkte P(0 | f(0)) und Q(5 | f(5)) ermittelt werden.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche beträgt ca. 0,52 m je Meter in horizontaler Richtung.

GTR/CAS



(3) Das Gefälle der Rutsche wird durch die 1. Ableitung $f'(x)$ beschrieben. Das größte Gefälle liegt an der Minimalstelle der Funktion $f'(x)$ vor. Dafür infrage kommen die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ oder die Randstellen des Definitionsbereichs.

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{1-x} + (-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \\ &= (x-1) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	*Fertig*
$a2f(x)$	$(e \cdot x - e) \cdot e^{-x}$

Notwendige Bedingung für eine Minimalstelle der Funktion $f'(x)$: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot e^{1-x} &= 0 \quad &&|: e^{1-x} \neq 0 \\ x - 1 &= 0 &&|+1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Berechnung des Funktionswertes der Funktion $f'(x)$:

$f'(1) = -1$

Zu überprüfen sind noch die Randstellen:

$f'(0) = 0$

$f'(5) \approx -0{,}09$

GTR/CAS

$a1f(x) := -x \cdot e^{1-x}$	*Fertig*
$a1f(1)$	-1
$a1f(0)$	0.
$a1f(5)$	-0.091578
$f(1)$	2

Das größte Gefälle besitzt die Rutsche nach 1 Meter in horizontaler Richtung. Mit $f(1) = 2$ lauten die Koordinaten des zugehörigen Punktes $(1|2)$.

Der Winkel α, der zu diesem Gefälle gehört, berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= -1 \\ \alpha &= \tan^{-1}(-1) \\ \alpha &= -45° \end{aligned}$$

GTR/CAS

$\tan^{-1}(-1)$	-45.

Da Neigungswinkel immer zwischen 0° und 90° angegeben werden, beträgt der zugehörige Neigungswinkel 45°. Die Rutsche wird der Norm daher gerecht.

b) (1) Die zu verkleidende Fläche auf einer Seite der Rutsche setzt sich aus der Fläche zwischen der Profillinie der Rutsche und dem oberen Beckenrand (x-Achse) sowie der rechteckigen Fläche zwischen dem Beckenrand und der Wasseroberfläche im Bereich $0 \leq x \leq 5$ zusammen. Da beide Seiten der Rutsche verkleidet werden sollen, wird mit 2 multipliziert.

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0{,}2 \right) \approx 12{,}62\,[m^2]$$

GTR/CAS

$a := 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0.2 \right)$	12.6167

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in Abbildung 1 dargestellt.

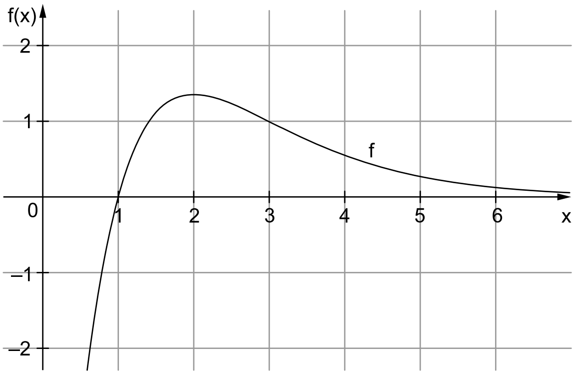


Abbildung 1

		Punkte
a)	(1) Begründen Sie, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle von f ist.	1
	(2) Zeigen Sie: $f'(x) = 10 \cdot (2-x) \cdot e^{-x}$.	2
	(3) Untersuchen Sie f rechnerisch auf lokale Extremstellen.	3
b)	(1) Gegeben ist die Funktion t mit $t(x) = -10 \cdot e^{-3} \cdot x + 50 \cdot e^{-3}$, $x \in \mathbb{R}$, und der Wendepunkt $W(3 \mid f(3))$ des Graphen von f. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von t die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist.	4
	(2) Die Schnittpunkte der in b(1) gegebenen Tangente mit den beiden Koordinatenachsen legen eine Strecke fest. Berechnen Sie die Länge dieser Strecke.	3
	(3) Im Intervall [1; 5] begrenzen der Graph von f und die in b(1) gegebene Tangente zusammen mit der x-Achse eine Fläche F (siehe Abbildung 2). Bestimmen Sie den Flächeninhalt von F.	3

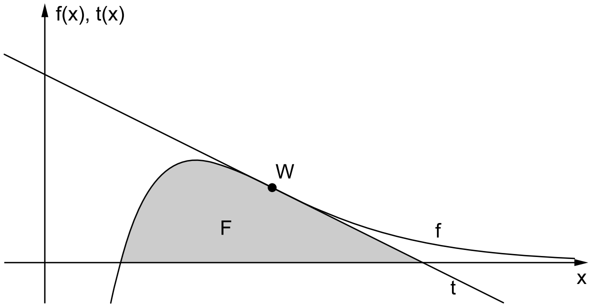


Abbildung 2

c) Die Gerade g ist die Parallele zur x-Achse durch den Hochpunkt $H(2 \mid f(2))$ des Graphen von f. Die y-Achse, g und der Graph von f schließen eine Fläche ein (siehe grau gefärbte Fläche in Abbildung 3).

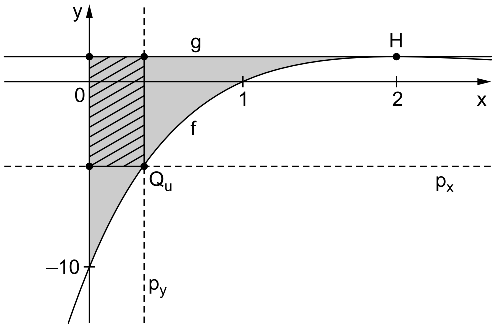


Abbildung 3

(1) Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche. 3

$Q_u(u \mid f(u))$, $0 < u < 2$, ist ein Punkt auf dem Graphen von f. Die Parallelen durch Q_u zu den beiden Koordinatenachsen werden mit p_x und p_y bezeichnet. Die y-Achse, g, p_x und p_y begrenzen ein Rechteck (siehe schraffierte Fläche in Abbildung 3).

(2) Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks für den Fall, dass Q_u mit dem Schnittpunkt übereinstimmt, den der Graph von f mit der x-Achse hat. 2

(3) Untersuchen Sie, um wie viel Prozent sich der Wert aus (2) maximal vergrößern lässt, wenn für $Q_u(u \mid f(u))$ eine andere Position mit $0 < u < 2$ gewählt wird. 5

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = x$ wird als „1. Winkelhalbierende“ bezeichnet. Es gibt genau eine Tangente t_R an den Graphen von f, die parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist. Eine mit vier Nachkommastellen angegebene näherungsweise Gleichung für t_R ist
$y = x - 0{,}3824$.

Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand, den die Tangente t_R von der 1. Winkelhalbierenden hat. 4

e) Die Funktion f gehört zur Schar h_a, die gegeben ist durch
$h_a(x) = 10 \cdot (x - a) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ohne Nachweis kann verwendet werden
$h_a''(x) = 10 \cdot (x - a - 2) \cdot e^{-x}$.

Der Graph von h_a besitzt genau einen Wendepunkt W_a.

(1) Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes W_a.
[Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist hier nicht erforderlich.] 4

(2) t_a ist die Tangente im Wendepunkt W_a. Eine Gleichung für t_a ist
$y = -10 \cdot e^{-a-2} \cdot x + 10 \cdot (a + 4) \cdot e^{-a-2}$.

Für $a \neq -4$ begrenzt t_a mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Leiten Sie einen Term für den Flächeninhalt A_D des Dreiecks her.
[Mögliche Lösung: $A_D(a) = 5 \cdot (a + 4)^2 \cdot e^{-a-2}$] 4

(3) Ermitteln Sie einen Wert von a, für den die Dreiecksfläche die Größe 10 FE hat. 2

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Setzen Sie den Funktionsterm gleich 0 und lösen Sie die entstehende Gleichung nach x auf.

(2) Leiten Sie den Funktionsterm mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel ab.

(3) Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Bilden Sie die 2. Ableitung mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel.

Oder

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$ und an der möglichen Extremstelle findet ein Vorzeichenwechsel statt.

Teilaufgabe b

(1) Denken Sie daran, dass bei einer Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt P die gleiche Steigung und der gleiche Funktionswert vorliegen.

Die Steigung des Graphen der Funktion an der Stelle $x = 3$ ist gleich dem Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x = 3$.

(2) Der Schnittpunkt mit der y-Achse kann mithilfe des y-Achsenabschnitts der Tangente bestimmt werden.

Im Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist der Funktionswert der Tangente gleich null.

Die Länge einer Strecke mit den Endpunkten $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$ berechnet sich nach folgender Formel:
$d(P; Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

(3) Die Gesamtfläche kann durch eine Senkrechte vom Wendepunkt W auf die x-Achse in zwei Teilflächen unterteilt werden.

Achten Sie bei den Integrationsgrenzen auf die vorherigen Aufgaben.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilflächen mithilfe des GTR.

Teilaufgabe c

(1) Beachten Sie bei der Geradengleichung die y-Koordinate des Hochpunktes.

Stellen Sie mithilfe der Geradengleichung und der Funktionsgleichung der Funktion f die Differenzfunktion d auf.

Entnehmen Sie die Integrationsgrenzen der Abbildung oder der Beschreibung der Fläche.

(2) Der Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b berechnet sich nach folgender Formel:
$A = a \cdot b$

Achten Sie bei der Bestimmung der Seitenlängen auf den Hochpunkt und auf den Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit der x-Achse.

(3) Stellen Sie mithilfe der Flächeninhaltsformel für ein Rechteck die Zielfunktion auf.

Bestimmen Sie das Maximum mit dem GTR grafisch.

Wählen Sie den Flächeninhalt aus Teilaufgabe c (2) als Grundwert und den maximalen Flächeninhalt als vermehrten Grundwert.

Lösung

a) (1) In den Nullstellen der Funktion $f(x) = 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert null.

$$10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x} = 0 \quad \Big| : 10e^{-x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

$x = 1$ ist die einzige Nullstelle.

(2) Eine Ableitung mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = 10 \cdot [1 \cdot e^{-x} + (x-1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}] = 10 \cdot [(1 - x + 1) \cdot e^{-x}] = 10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$$

(3) Zunächst wird die 2. Ableitung mithilfe der Faktor-, Produkt- und Kettenregel berechnet:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 10 \cdot [-1 \cdot e^{-x} + (2-x) \cdot (-1) \cdot e^{-x}] \\ &= 10 \cdot [(-1 - 2 + x) \cdot e^{-x}] \\ &= 10 \cdot (x - 3) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$

$$10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x} = 0 \quad \Big| : 10e^{-x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
$$2 - x = 0$$
$$x = 2$$

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(2) = 10 \cdot (2 - 3) \cdot e^{-2} = -10e^{-2} < 0$$

Da $f''(2) < 0$ ist, liegt an der Stelle $x = 2$ eine lokale Maximumstelle vor.

Alternativ:
Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle lautet: $f'(x) = 0$ und an der möglichen Extremstelle findet ein Vorzeichenwechsel statt.

$$f'(1) = 10 \cdot (2 - 1) \cdot e^{-1} = 10e^{-1} > 0$$

$$f'(3) = 10 \cdot (2 - 3) \cdot e^{-1} = -10e^{-1} < 0$$

An der Stelle $x = 2$ findet ein (+/–)-Vorzeichenwechsel statt. Daher liegt hier eine lokale Maximumstelle vor.

Eine Rechnung mit dem GTR reicht bei den Operatoren „begründen Sie“, „zeigen Sie“, „untersuchen Sie rechnerisch“ oder „weisen Sie rechnerisch nach“ nicht aus. Dies betrifft die Teilaufgaben a und b (1).

b) (1) Wenn die Gerade mit der Gleichung $t(x) = -10e^{-3} \cdot x + 50e^{-3}$ Tangente an den Graphen der Funktion f im Wendepunkt $W(3 \mid f(3))$, also die Wendetangente, ist, dann müssen die Funktionswerte von Gerade und Funktion f an der Stelle $x = 3$ übereinstimmen. Ebenso muss die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 3$ mit der Steigung der Geraden übereinstimmen.

Es gilt:

$f(3) = 10 \cdot (3-1) \cdot e^{-3} = 20e^{-3}$

$t(3) = -10e^{-3} \cdot 3 + 50e^{-3} = 20e^{-3}$

Die Funktionswerte stimmen überein.

Die Steigung der Geraden ist $m = -10e^{-3}$.
Die Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 3$ ist gleich dem Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x = 3$.

$f'(3) = 10 \cdot (2-3) \cdot e^{-3} = -10e^{-3}$

Die Steigungen stimmen überein.

Somit gilt: Die Gerade t ist die Tangente am Graphen der Funktion f im Wendepunkt.

(2) Der y-Achsenabschnitt der Tangente liefert den Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 50e^{-3})$

Im Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist der Funktionswert der Tangente gleich null.

$$\begin{aligned} -10e^{-3} \cdot x + 50e^{-3} &= 0 \\ 50e^{-3} &= 10e^{-3} \cdot x \quad \mid : (10e^{-3}) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $N(5 \mid 0)$.

Die Länge einer Strecke mit den Endpunkten $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$ berechnet sich nach folgender Formel:

$$d(P; Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Einsetzen der Koordinaten der Punkte S_y und N in die Abstandsformel ergibt:

$$d(S_y; N) = \sqrt{(0-5)^2 + (50e^{-3} - 0)^2} \approx 5{,}59 \text{ [LE]}$$

Die Strecke hat eine Länge von ca. 5,59 Längeneinheiten.

(3) Die Gesamtfläche kann durch eine Senkrechte vom Wendepunkt W auf die x-Achse in zwei Teilflächen unterteilt werden.