EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Höhere Mathematik
Aufgaben und Lösungen

Band 3

von

Karlheinz Spindler

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 59567

Autor:

Prof. Dr. Karlheinz Spindler studierte Mathematik, Mechanik und Geschichte an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach Ablegung seines Diploms und des Staatsexamens für das Lehramt an Gymnasien war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TH Darmstadt tätig und wurde dort über ein Thema aus der Strukturtheorie Liescher Algebren promoviert. Anschließend arbeitete er zunächst zwei Jahre lang als Visiting Assistant Professor an der Louisiana State University in Baton Rouge (USA) und dann fünf Jahre lang bei einem Unternehmen der Raumfahrtindustrie am European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. Im Jahr 1997 wurde er zum Professor für Mathematik und Datenverarbeitung an die Fachhochschule Wiesbaden (seit dem 1. September 2009 Hochschule RheinMain) berufen, wo er im Studiengang „Angewandte Mathematik" tätig ist. Er ist Begründer und Mitorganisator eines seit 2006 jährlich stattfindenden mathematischen Weiterbildungsseminars für Angehörige der hessischen Hochschulen für angewandte Wissenschaften.

1. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5956-7

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagmotiv: Vom Autor erstellte Illustration und bearbeitetes Foto
Druck: CPI books GmbH, 25917 Leck

Vorwort

Das vorliegende Aufgaben- und Lösungsbuch will einen Beitrag zur Förderung der Mathematikausbildung leisten, indem es zur Beschäftigung mit mathematischen Aufgabenstellungen und zur Einübung von Problemlösungsfertigkeiten einlädt. Es ist entstanden aus Aufgabenblättern und Übungsmaterialien, die ich über viele Jahre hinweg in einer ganzen Reihe verschiedenster mathematischer Lehrveranstaltungen an der Hochschule RheinMain verwendet habe.

Wichtig war mir – sowohl beim Stellen der Aufgaben als auch beim Schreiben des Buches – eine große Bandbreite der Aufgabenstellungen. Diese reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert. Dabei habe ich bewußt hohe Ansprüche nicht vermieden, denn (wie schon der Prediger Salomo wußte) "wo viel Weisheit ist, da ist viel Grämen, und wer viel lernt, der muß viel leiden". Ich bin aber zuversichtlich, daß durch die Aufteilung komplexer Aufgabenstellungen auf mehrere Teilaufgaben und durch die gegebenen Hinweise allzu großen Frustrationen vorgebeugt wird.

Damit das Buch auch zum Selbststudium geeignet ist, habe ich zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen erstellt, deren Formulierung vielleicht auch ein Gefühl dafür vermittelt, wie man mathematische Sachverhalte ausdrückt und zu Papier bringt. Natürlich sollte man aber vor dem Blick in die Lösung immer versuchen, die jeweilige Aufgabe selbst zu bearbeiten: Mathematik ist kein Zuschauersport, sondern eher wie Klavierspielen; man erlernt sie nur durch eigene aktive Beschäftigung. Ich hoffe, daß bei aller Konzentration auf das Lösen von Aufgaben auch etwas von der Schönheit, Klarheit und Eleganz der Mathematik deutlich wird. Von den Inhalten und vom Kapitelaufbau her richtet sich das vorliegende Buch nach dem Lehrbuch

> Karlheinz Spindler: *Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main* 2010.

Immer, wenn in den Lösungen auf "das Buch" verwiesen wird, ist dieses Lehrbuch gemeint. Die Verweise dienen in erster Linie der bequemen Referenzierung; die allermeisten Aufgaben können vollkommen unabhängig von der Verwendung eines bestimmten Lehrbuches oder Manuskriptes bearbeitet werden, und ich hoffe, daß sich geeignete Aufgaben für eine Vielzahl verschiedener Lehrveranstaltungen auswählen lassen. Da das Material des Buches in unterschiedlicher Intensität für unterschiedliche Lehrveranstaltungen entstand, war eine gewisse Unausgewogenheit zwischen den verschiedenen thematischen Bereichen (oder, positiver ausgedrückt, eine gewisse Schwerpunktsetzung) unausweichlich. Der zu erwartende eher geringe Zusatznutzen erschien es mir nicht wert, hier mit entsprechendem Zeitaufwand (und resultierenden Verzögerungen) die Unterschiede nachträglich noch auszugleichen. Um noch einmal den Prediger Salomo zu Wort kommen zu lassen: "Des vielen Büchermachens ist kein Ende, und viel Studieren macht den Leib müde".

Wie schon bei dem genannten Lehrbuch bin ich auch beim Schreiben dieses Aufgaben- und Lösungsbuchs Frau Dr. Renate Schappel zu kaum ermeßlichem Dank verpflichtet. Sie hat sich mit bewundernswerter Energie und Begeisterung, mit großer Akribie und Sorgfalt der Herkulesaufgabe angenommen, das vollständige Manuskript (teilweise in verschiedenen Versionen) kritisch zu lesen und zu kommentieren. Sie deckte eine Unzahl von Fehlern auf, und nichts war vor ihrem kritischen Blick sicher: einfache Tippfehler, Rechenfehler, falsche oder unvollständige Schlüsse, stilistisch verunglückte Formulierungen, falsche Verweise, unschöne Zeilen- oder Seitenumbrüche und vieles mehr. Ohne ihre Hilfe wäre das Erscheinen dieses Buches schlechterdings nicht denkbar. Mein Dank gilt ferner Herrn Klaus Horn vom Verlag Europa-Lehrmittel für die kompetente verlagsseitige Umsetzung des Werkes und die jederzeit angenehme Zusammenarbeit. Ihm danke ich nicht nur für die engagierte und sachkundige Unterstützung des Buchprojekts, sondern auch für den gutmütigen Humor, mit dem er meinen Sonderwünschen begegnete. Schließlich bin ich mehreren Generationen von Studenten zu Dank verpflichtet, mit denen ich über die Jahre hinweg zusammenarbeiten durfte und deren Fragen, Kommentare und Anregungen zu Verbesserungen bei zahlreichen Aufgaben und Lösungen führten.

Alle noch verbliebenen Fehler und Unstimmigkeiten gehen natürlich einzig und allein zu meinen Lasten als Autor. Autor und Verlag sind für Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten sowie für konstruktive Kritik jederzeit dankbar.

A. D. 2021 Karlheinz Spindler

---

* Inzwischen Edition Harri Deutsch, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Inhaltsverzeichnis

Teil 1:
Aufgaben

A97: Mannigfaltigkeiten

Aufgabe (97.1) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ der Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$, also

$$M := \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Finde einen Homöomorphismus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der M auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ abbildet.
(b) Zeige, daß in (a) der Homöomorphismus sogar so gewählt werden kann, daß er von der Klasse C^∞ ist.
(c) Zeige, daß es keinen Diffeomorphismus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, der M auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ abbildet.
(d) Zeige genauer, daß es keinen Diffeomorphismus $F : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in U$ geben kann, der $M \cap U$ auf $V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ abbildet.

Bemerkung: Teil (a) zeigt, daß man M stetig in einen eindimensionalen affinen Raum deformieren kann (und zwar sogar global). Teil (c) zeigt, daß im Gegensatz dazu M nicht glatt in einen eindimensionalen affinen Raum deformiert werden kann (und zwar nicht einmal lokal).

Aufgabe (97.2) Wir definieren $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) := (t^3, t^3) \quad \text{und} \quad g(x,y) := x^3 - y^3.$$

(a) Beweise die Gleichheit

$$\{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} =: M.$$

(b) Zeige, daß M eine Mannigfaltigkeit ist, obwohl die Parametrisierung φ eine Singularität an der Stelle $t = 0$ hat und obwohl die definierende Funktion g eine Singularität an der Stelle $(x,y) = (0,0)$ hat.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß man unterscheiden muß zwischen Singularitäten ungünstig gewählter Parametrisierungen bzw. definierender Funktionen (die man durch Wahl anderer Parametrisierungen bzw. definierender Funktionen vermeiden kann) und tatsächlichen geometrischen "Defekten" der betrachteten Menge M (etwa Spitzen, Ecken oder isolierte Punkte), aufgrund derer M keine Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe (97.3) In dieser Aufgabe betrachten wir Parametrisierungen und Gleichungsdarstellungen, die möglicherweise Singularitäten haben.

(a) Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung der Klasse C^k. Zeige, daß

$$M := \{\varphi(\xi) \mid \xi \in \Omega,\ \mathrm{rk}\,\varphi'(\xi) = d\}$$

(leer oder) eine C^k-Mannigfaltigkeit ist.
(b) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine Abbildung der Klasse C^k. Zeige, daß

$$M := \{x \in U \mid g(x) = 0,\ \mathrm{rk}\,g'(x) = n - d\}$$

(leer oder) eine C^k-Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß aus einer Menge, die durch eine C^k-Parametrisierung oder als Nullstellenmenge einer C^k-Funktion gegeben ist, immer eine Mannigfaltigkeit entsteht, wenn man die singulären Punkte einfach aus dieser Menge entfernt.

Aufgabe (97.4) Gib in den Beispielen (97.1) bis (97.6) im Buch genau an, warum keine Mannigfaltigkeiten im Sinne von (97.9) vorliegen.

Aufgabe (97.5) Ebene Kurven. Entscheide in den folgenden Fällen, ob die angegebene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. (Welche Punkte müssen gegebenenfalls entfernt werden, um eine solche Untermannigfaltigkeit zu erhalten?) Finde für die in Gleichungsform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung und für die in Parameterform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Gleichungsdarstellung!

(a) $M = \{(t^3, t^6) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(b) $M = \{(2t^3 + t^2,\ t^3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(c) $M = \{(t, |t|) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(d) $M = \{(t^3 + t^2, t^3 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(e) $M = \{\big((1+\cos t)\cos t,\ (1+\cos t)\sin t\big) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(f) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0\}$
(g) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$
(h) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0\}$
(i) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-1)^2 + 2y^2(x^2+1) + y^4 = 1\}$
(j) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 = 0\}$
(k) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = \sqrt{2}\}$

Aufgabe (97.6) Flächen im Raum. Entscheide in den folgenden Fällen, ob die angegebene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Finde für die in Gleichungsform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung und für die in Parameterform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Gleichungsdarstellung!

(a) $M = \{(u+v, uv, u^2+v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$
(b) $M = \{(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$
(c) $M = \{(u+|v|, |u|+v, uv) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$
(d) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$
(e) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 0\}$
(f) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 = 3xyz\}$
(g) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+x^2y^2 = xyz\}$
(h) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + e^{xy} + zy = 0\}$

Aufgabe (97.7) Räumliche Kurven. Entscheide in den folgenden Fällen, ob die angegebene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Finde für die in Gleichungsform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung und für die in Parameterform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Gleichungsdarstellung!

(a) $M = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(b) $M = \{(t, t^2, \sqrt{t^2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(c) $M = \{(t, t^2, \sqrt{t^2+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(d) $M = \{(t^2, \cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

↗ Lösungen zu »Mannigfaltigkeiten«

(e) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2, z = x^3\}$
(f) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, ax + by + cz = d\}$
(g) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$
(h) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sin(yz), y = \cos(xz)\}$
In Teil (f) seien dabei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben.

Aufgabe (97.8) Es sei $M := \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Zeige, daß in den folgenden Fällen jeweils $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine reguläre Parametrisierung einer offenen Teilmenge von M ist, und gib die Menge $\varphi(U)$ sowie die Umkehrabbildung $\psi : \varphi(U) \to U$ von φ explizit an!

(a) Senkrechte Projektion: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$,

$$\varphi(x,y) \;:=\; \left(x,\, y,\, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

(b) Kugelkoordinaten: $U = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\varphi(u,v) \;:=\; \Big(\cos(v)\cos(u),\; \cos(v)\sin(u),\; \sin(v)\Big)$$

(c) Stereographische Projektion: $U = \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x,y) \;:=\; \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\; \frac{2y}{x^2+y^2+1},\; \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

Kann es eine reguläre Parametrisierung $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $\varphi(U) = \mathbb{S}^2$ geben? (Kann man also $\mathbb{S}^2$ mit einer einzigen Karte überdecken?)

Aufgabe (97.9) Ein **Torus** ist eine Fläche, die entsteht, wenn ein Kreis C vom Radius r sich so bewegt, daß sein Mittelpunkt einen Kreis K vom Radius $R > r$ durchläuft, und zwar so, daß sich der Mittelpunkt von K stets in Ebene des Kreises C befindet. Gib eine Parameterdarstellung eines solchen Torus an! Genauer: Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ der Torus, dessen Zentralkreis in der xy-Ebene liegt, den Mittelpunkt $(0,0,0)$ und den Radius R hat und dessen Querschnittskreise den Radius $r < R$ haben.

(a) Gib eine Parametrisierung von T an!
(b) Stelle T als Nullstellenmenge einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dar!
(c) Finde eine C^∞-Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bijektiv auf T abbildet!

Aufgabe (97.10) Der **Horntorus** zum Radius $r > 0$ ist die Menge aller Punkte der Form

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;=\; r \begin{bmatrix} (1+\cos v)\cos u \\ (1+\cos v)\sin u \\ \sin v \end{bmatrix}$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$. Stelle diesen Horntorus als Lösungsmenge einer Gleichung $g(x,y,z) = 0$ dar!

Aufgabe (97.11) Ein Stab der Länge ℓ bewege sich im dreidimensionalen Raum, und zwar so, daß sein Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis mit Radius $r > \ell$ durchläuft, während der Stab sich während des Umlaufs genau einmal um seinen Mittelpunkt dreht. Gib eine Parameterdarstellung der von dem Stab überstrichenen Fläche an! (Diese Fläche wird als **Möbiusband** bezeichnet.)

Aufgabe (97.12) Es seien $0 < r < R$ reelle Zahlen. Wir definieren $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ durch

$$\varphi(u,v) \;:=\; \begin{bmatrix} \big(R + r\cos(v)\big)\cos(u) \\ \big(R + r\cos(v)\big)\sin(u) \\ r\sin(v)\cos(u/2) \\ r\sin(v)\sin(u/2) \end{bmatrix}$$

und $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$g(a,b,c,d) \;:=\; \begin{bmatrix} (\sqrt{a^2+b^2} - R)^2 + c^2 + d^2 - r^2 \\ 2acd + b(d^2 - c^2) \end{bmatrix}.$$

Zeige, daß die beiden Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{\varphi(u,v) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{und} \\ M_2 &:= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid g(a,b,c,d) = 0\} \end{aligned}$$

übereinstimmen. Ist M_1 bzw. M_2 eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe (97.13) Wir definieren $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &:= x^4 - y^3 \\ g_2(x,y,z) &:= y^5 - z^4 \\ g_3(x,y,z) &:= z^3 - x^5 \end{aligned}$$

sowie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(t) \;:=\; (t^3, t^4, t^5)$$

und betrachten die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ M_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 1,2,3\}, \\ M_3 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 2,3\}, \\ M_4 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 1,3\}, \\ M_5 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 1,2\}. \end{aligned}$$

Welche Enthaltenseinsbeziehungen bestehen zwischen diesen Mengen? Handelt es sich um eingebettete Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$? Falls nein, welche (möglichst wenigen) Punkte muß man entfernen, um jeweils eine Mannigfaltigkeit zu erhalten?

Aufgabe (97.14) Für $n \geq 1$ sei

$$\mathbb{S}^n \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

↗ Lösungen zu »Mannigfaltigkeiten«

Wir definieren eine Abbildung $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\lambda \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ x_2 &= \sin\lambda \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ x_3 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ x_4 &= \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ x_n &= \sin\theta_{n-2} \end{aligned}$$

(a) Gib die Abbildung x für $1 \le n \le 4$ explizit an!
(b) Gib einen maximalen offenen Parameterbereich in $\mathbb{R}^n$ an, auf dem x injektiv ist. Welcher Teil von $\mathbb{S}^n$ wird durch x parametrisiert?
(c) Als n-dimensionale Polarkoordinaten bezeichnet man die Funktion

$$\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \; := \; r\, x_{n-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}).$$

Berechne für diese Transformation die Funktionaldeterminante $\partial\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})/\partial(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$.
(d) **Stereographische Projektion:** Für $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ sei $\varphi(\xi)$ der Schnittpunkt von $\mathbb{S}^{n-1}$ mit der Verbindungsgeraden zwischen dem Punkt $(\xi, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und dem Nordpol $(0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. (Fertige eine Skizze an und leite eine explizite Formel für φ her!)

Aufgabe (97.15) Es seien $k \le n$ natürliche Zahlen.
(a) Zeige, daß die Menge

$$\Sigma_{n,k} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid \mathrm{rk}\,(A) = k\}$$

eine offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times k}$ ist.
(b) Zeige, daß

$$S_{n,k} \; := \; \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid A^T A = \mathbf{1}\}$$

eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times k}$ ist. Welche Dimension hat $S_{n,k}$?
(c) Die Elemente von $S_{n,k}$ werden als k-Beine im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Erläutere diese Bezeichnung!

Nach dem schweizerischen Mathematiker Eduard Ludwig Stiefel (1909-1978) bezeichnet man die Mannigfaltigkeiten $S_{n,k}$ als **Stiefel-Mannigfaltigkeiten** (und die Mannigfaltigkeiten $\Sigma_{n,k}$ zuweilen als **nichtkompakte Stiefel-Mannigfaltigkeiten**).

Aufgabe (97.16) Die **orthogonale Gruppe** in Dimension n ist definiert als

$$\mathrm{O}(n) \; := \; \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbf{1}\}.$$

(a) Zeige, daß $\mathrm{O}(n)$ tatsächlich eine Gruppe im Sinn der Algebra ist.
(b) Zeige, daß $\mathrm{O}(n)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Welche Dimension hat $\mathrm{O}(n)$?
(c) Zeige, daß die **spezielle orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{SO}(n) \; := \; \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$ ist, und erläutere den Zusammenhang zwischen $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$!

Aufgabe (97.17) Es seien $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ eine d_1-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n_1}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ eine d_2-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n_2}$. Zeige, daß dann $M_1 \times M_2$ eine (d_1+d_2)-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ist.

Problem (97.18) Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ mit

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1 x_4 - x_2 x_3 - 1, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1 x_3 + x_2 x_4. \end{aligned}$$

(a) Zeige, daß M eine Mannigfaltigkeit ist.
(b) Zeige, daß M sogar global als Graph einer Funktion darstellbar ist.
(c) Bestimme den Tangentialraum T_pM und den Normalraum N_pM für den Punkt $p = (1, 0, 0, 1) \in M$.

Aufgabe (97.19) Bestimme in den folgenden Fällen den Tangentialraum T_pM der Mannigfaltigkeit M im Punkt $p \in M$. Benutze dabei sowohl eine Darstellung von M in Gleichungsform als auch eine Parameterdarstellung.
(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$, $p = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$
(b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + y^2 + 2z^2 = 6\}$, $p = (1, 1, 1)$
(c) $M = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $p = (1, 0, 2\pi)$

Aufgabe (97.20) Bestimme in den folgenden Fällen den Tangentialraum T_pM der Mannigfaltigkeit M im Punkt $p \in M$.
(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 1\}$, $p = (\sqrt[3]{2}, -1)$
(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$, $p = (\sqrt{3/5}, \sqrt{4/5})$
(c) $M = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $p = (-1, 1, -1)$
(d) $M = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $p = (0, 0, 0)$
(e) $M = \{\varphi(u, v) \mid 0 \le u, v < 2\pi\}$, $p = \varphi(\pi/4, \pi/3)$ mit

$$\varphi(u, v) \; = \; \begin{bmatrix} (R + r\cos v)\cos u \\ (R + r\cos v)\sin u \\ r\sin v \end{bmatrix} \qquad (0 < r < R)$$

(f) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 2xz + yz + z^2 + 2y + z = 4\}$, $p = (1, 1, 1)$
(g) $M = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid ad - bc = 1\}$, $p = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

↗ Lösungen zu »Mannigfaltigkeiten«

Aufgabe (97.21) Bestätige unter Benutzung der stereographischen Projektion, daß für alle $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ die Gleichung $T_p\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, v\rangle = 0\} = p^\perp$ gilt.

Aufgabe (97.22) Gib explizit das Tangentialbündel TM von $M := \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ an!

Aufgabe (97.23) Der **Horntorus** vom Radius R ist gegeben durch die Parametrisierung

$$\varphi(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} R(1+\cos v)\cos u \\ R(1+\cos v)\sin u \\ R\sin v \end{bmatrix}.$$

(Dies ist genau die Parametrisierung aus Aufgabe (97.10) mit $r = R$.) Es sei $M := \{\varphi(u,v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$.

(a) Bestimme das Bild von $\varphi'(u,\pi)$ für eine beliebige Zahl $u \in \mathbb{R}$.

(b) Stelle M als Nullstellenmenge einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dar und bestimme den Kern von $g'(0,0,0)$.

Aufgabe (97.24) Es sei $G := \mathrm{SO}(3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Rotationsgruppe im $\mathbb{R}^3$, und es sei $e := \mathbf{1}$ das Neutralelement in G. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Es ist G eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des 9-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^{3\times 3}$ aller reellen (3×3)-Matrizen.

(b) Ist $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ein Element des Tangentialraums T_eG, so ist X eine schiefsymmetrische Matrix; d.h., es gilt $X^T = -X$.

(c) Umgekehrt liegt jede schiefsymmetrische Matrix X in T_eG; es gilt also

$$T_eG \;=\; \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid X^T = -X\}.$$

Hinweis: $\alpha(t) := \exp(tX)$ ist eine in G verlaufende Kurve mit $\alpha(0) = e$.

(d) Mit X und Y liegt auch $[X,Y] := XY - YX$ in T_eG. (Man bezeichnet $[X,Y]$ als die **Lie-Klammer** von X und Y.)

(e) Ist $g \in G$ beliebig, so gilt

$$T_gG \;=\; g(T_eG) \;=\; \{gX \mid X^T = -X\}.$$

Aufgabe (97.25) Es sei $G := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$, und es sei $e := \mathbf{1}$ das Neutralelement in G. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Es ist G eine $(n^2{-}1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des n^2-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^{n\times n}$ aller reellen $(n\times n)$-Matrizen.

(b) Ist $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Element des Tangentialraums T_eG, so hat X die Spur Null.

(c) Umgekehrt liegt jede Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Spur 0 in T_eG; es gilt also

$$T_eG \;=\; \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Hinweis: $\alpha(t) := \exp(tX)$ ist eine in G verlaufende Kurve mit $\alpha(0) = e$.

(d) Mit X und Y liegt auch $[X,Y] := XY - YX$ in T_eG. (Man bezeichnet $[X,Y]$ als die **Lie-Klammer** von X und Y.)

(e) Ist $g \in G$ beliebig, so gilt

$$T_gG \;=\; g(T_eG) \;=\; \{gX \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Aufgabe (97.26) (a) Bestimme in den folgenden Fällen für die angegebene Mannigfaltigkeit G (die jeweils eine Matrix-Liegruppe ist) den Tangentialraum $L(G) := T_{\mathbf{1}}G$.

(1) $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$

(2) $G = \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$

(3) $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$

(4) $G = \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^TA = \mathbf{1}\}$

(5) $G = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$

(6) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \{\begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$

(b) Verifiziere in allen Fällen die Gleichung

$$(\star) \qquad L(G) \;=\; \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \exp(\mathbb{R}X) \subseteq G\}.$$

Bemerkung: Nach Definition ist $T_{\mathbf{1}}G$ die Menge aller Geschwindigkeitsvektoren $\alpha'(0)$ in G verlaufender Kurven α mit $\alpha(0) = \mathbf{1}$. Bedingung $(\star)$ zeigt, daß es genügt, Kurven der Form $\alpha(t) = \exp(tX)$ zu betrachten – ein Hinweis auf die überragende Bedeutung der Exponentialfunktion.

(c) Verifiziere in allen Fällen, daß mit X und Y auch

$$[X,Y] \;:=\; XY - YX$$

in $L(G)$ liegt. – **Bemerkung:** Da G nicht nur eine Mannigfaltigkeit, sondern auch eine Gruppe im algebraischen Sinn ist und die beiden Strukturen miteinander gekoppelt sind, dürfen wir erwarten, daß auch $L(G)$ (als "infinitesimale" Version von G in der Nähe von $\mathbf{1}$) eine Zusatzstruktur trägt, die über die eines bloßen Vektorraums hinausgeht. Diese Zusatzstruktur ist gerade gegeben durch die **Lie-Klammer** $(X,Y) \mapsto [X,Y]$.

Aufgabe (97.27) Es sei M die Stiefelmannigfaltigkeit $S_{n,k}$, also

$$M \;=\; \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid A^TA = \mathbf{1}\}.$$

(a) Bestimme für eine beliebige Matrix $A \in M$ den Tangentialraum T_AM.

(b) Bestimme den Tangentialraum T_AM explizit im Fall $n = 4$, $k = 2$ und

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 0 \\ 1/2 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

↗ Lösungen zu »Mannigfaltigkeiten«

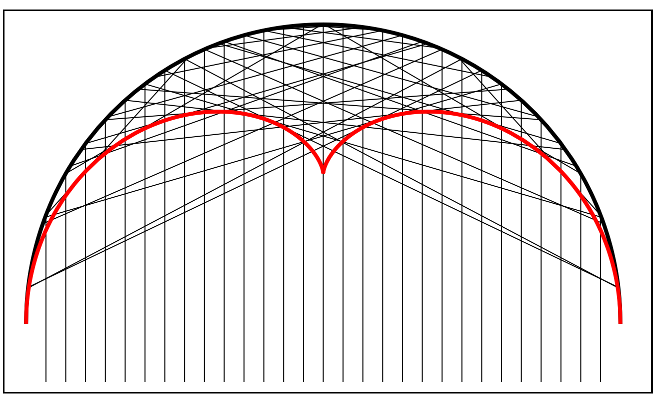
Aufgabe (97.28) Eine Mannigfaltigkeit M heißt **Einhüllende** oder **Enveloppe** einer Familie $(M_c)_{c\in C}$ von Mannigfaltigkeiten, wenn M mit jeder der Mengen M_c genau einen Punkt x_c gemeinsam hat und an diesem Punkt den gleichen Tangentialraum besitzt wie M_c (was gerade $T_{x_c}M = T_{x_c}M_c$ bedeutet). Zeige: Ist $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x,c) = 0\}$ und hängen $x_c = x(c)$ und $f(x,c)$ glatt von dem Parameter c ab, so gilt die **Enveloppenbedingung**

$$0 \;=\; \frac{\partial f}{\partial c}\big(x(c), c\big)\,.$$

(b) Zeige, daß die x-Achse die Enveloppe der Parabeln $y = (x-c)^2$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Es sei C_α die parabelförmige Flugkurve eines Massenpunktes, der vom Punkt $(0,0)$ aus mit der fest vorgegebenen Geschwindigkeit v unter dem Winkel α gegenüber der Horizontalen abgeschossen wird. Bestimme die Einhüllende aller dieser Kurven C_α. (Diese Einhüllende sieht man sehr schön am Beispiel der Sonnenfontäne in Schloß Peterhof, der zwischen 1714 und 1723 erbauten Sommerresidenz der russischen Zaren.)

Aufgabe (97.29) In einen Halbkreis mögen wie abgebildet parallele Lichtstrahlen einfallen, die an dem Halbkreis gespiegelt werden. Bestimme die Enveloppe der reflektierten Strahlen! (Diese Enveloppe kann man als **Kaustik** etwa in Kaffeetassen beobachten.)



Aufgabe (97.30) Auf einem fest vorgegebenen Kreis K werde ein Punkt P markiert. Für jeden anderen Punkt Q des Kreises K sei K_Q der Kreis mit Mittelpunkt Q, der durch P geht. Bestimme die Enveloppe der Familie $\{K_Q \mid Q \in K \setminus \{P\}\}$!

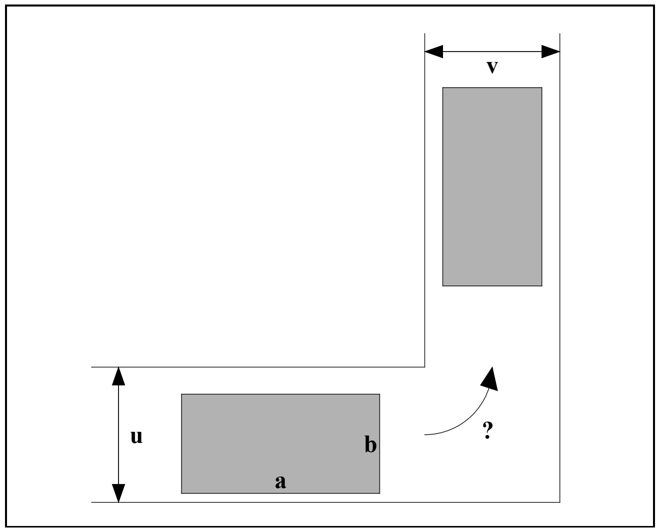
Aufgabe (97.31) Wir betrachten die beiden folgenden Familien ebener Kurven, die jeweils durch einen Parameter $c \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden.

(a) $K_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2c)^2 + y^2 - c^2 = 0\}$

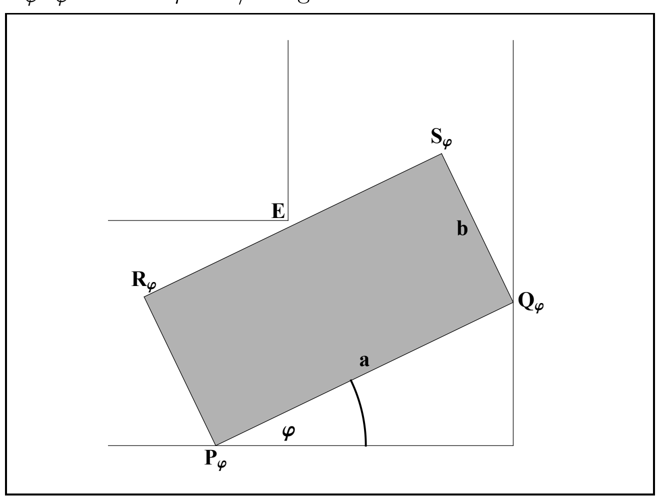
(b) $K_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\cos c)^2 + (y-\sin c)^2 = 1\}$

Finde jeweils die Enveloppe der Kurvenschar $(K_c)_{c\in\mathbb{R}}$ und fertige eine Skizze an, die sowohl die Kurvenschar als auch deren Enveloppe zeigt.

Aufgabe (97.32) Eine schwere Truhe der Länge $a = 2.1$ m und der Breite $b = 1.1$ m soll (wie im Diagramm zu sehen) von einem Gang der Breite $u = 1.4$ m in einen rechtwinklig zu diesem verlaufenden Gang der Breite $v = 1.3$ m geschoben werden. Ist dies möglich?



Hinweis: Das Verschieben ist genau dann möglich, wenn der Eckpunkt E oberhalb der Hüllkurve aller Geraden $\overline{R_\varphi S_\varphi}$ mit $0 < \varphi < \pi/2$ liegt. Ermittle diese Hüllkurve!



↗ Lösungen zu »Mannigfaltigkeiten«

Aufgabe (97.33) Es sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^3 = 4x^3y^2\}.$$

(a) Zeige, daß $M \setminus \{(0,0)\}$ eine Mannigfaltigkeit ist.
(b) Finde eine Parametrisierung von M!
(c) Bestimme für $p = (1/2, 1/2)$ den Tangentialraum T_pM!

Aufgabe (97.34) Es sei M die Menge aller Punkte $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ mit $a \neq 0$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$bc = 9ad \quad \text{und} \quad b^2 = 3ac.$$

(a) Zeige, daß M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.
(b) Zeige, daß (a,b,c,d) genau dann in M liegt, wenn das kubische Polynom $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ die dritte Potenz eines linearen Polynoms ist.
(c) Benutze (b), um eine Parametrisierung von M zu finden.
(d) Bestimme den Tangentialraum T_pM im Punkt $p = (8, -12, 6, -1)$.

↗ Lösungen zu »Mannigfaltigkeiten«

A98: Optimierung auf Mannigfaltigkeiten

Aufgabe (98.1) Bestimme
(a) mit Hilfe der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y) des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ der Ausdruck xy minimal bzw. maximal wird.

Aufgabe (98.2) Bestimme
(a) mit Hilfe der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y) der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ der Ausdruck xy^2 minimal bzw. maximal wird.

Aufgabe (98.3) Bestimme
(a) mit der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

welcher Punkt (x, y) der Kurve $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ und welcher Punkt (ξ, η) der Kurve $\xi^2 + 4\eta^2 = 4$ am dichtesten beisammen liegen. **Hinweis** zu (b): es gilt $3x^2 + 2xy + 3y^2 = (x - y)^2 + 2(x + y)^2$.

Aufgabe (98.4) Bestimme
(a) mit der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y, ξ, η) die Funktion

$$f(x, y, \xi, \eta) \;:=\; \frac{1}{2}\big((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\big)$$

unter den Nebenbedingungen $x + y^2 = 0$ und $\xi\eta = 1$ minimal wird. (Wie kann man diese Aufgabe geometrisch deuten?)

Aufgabe (98.5) Bestimme
(a) mit der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

welcher Punkt des Rotationsparaboloids $z = x^2 + y^2$ den kleinsten Abstand vom Punkt $(1, 3, 2)$ hat. (Vgl. Aufgabe (95.15).)

Aufgabe (98.6) Ermittle mit der Methode von Lagrange, welcher Punkt auf der Parabel $y = x^2 + 1$ und welcher Punkt auf der Geraden $y = x/2$ am dichtesten beisammen liegen. (Diese Aufgabe wurde in (95.12) bereits auf anderem Wege gelöst.)

Aufgabe (98.7) Finde alle Extrema der Funktion $f(x, y, z) := xyz^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Aufgabe (98.8) Bestimme das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y) := x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$.

Aufgabe (98.9) Finde alle Minima und Maxima der Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = 1$.

Aufgabe (98.10) Welcher Punkt auf der Kurve $x^3 + y^3 = 1$ liegt am dichtesten am Nullpunkt?

Aufgabe (98.11) Die Ellipse E sei definiert als der Schnittpunkt des Ellipsoids $(x/2)^2 + (y/\sqrt{5})^2 + (z/5)^2 = 1$ mit der Ebene $z = x + y$. Bestimme die kleine und die große Halbachse von E!

Aufgabe (98.12) Finde die Minima und Maxima der Funktion $f(a, b, c, d, e) := a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$ unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c + d + e, \\ 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2, \\ 0 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3. \end{aligned}$$

Hinweis: Es sei $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ ein Punkt, an dem f unter den angegebenen Nebenbedingungen ein lokales Minimum oder Maximum annimmt. Benutze die Methode von Lagrange, um zu zeigen, daß die fünf Zahlen a, b, c, d, e eine gemeinsame Polynomgleichung dritten Grades erfüllen.

Aufgabe (98.13) Eine 2×2-Matrix soll so gebildet werden, daß die erste Spalte von A die Länge 1 und die zweite Spalte von A die Länge 2 hat. Welchen maximalen bzw. minimalen Wert kann die Determinante einer solchen Matrix annehmen?

Aufgabe (98.14) Es seien M und N Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. (Man denke etwa an zwei Kurven, eine Kurve und eine Fläche oder zwei Flächen im Raum.) Zeige: Wird der minimale Abstand eines Punktes $x \in M$ und eines Punktes $y \in N$ in den Punkten x_0 und y_0 angenommen, so schneidet die Verbindungsgerade $\overline{x_0 y_0}$ sowohl M als auch N unter einem rechten Winkel.

Aufgabe (98.15) Es seien $c_1, \ldots, c_n > 0$ positive Zahlen. Bestimme den maximalen Abstand, den zwei Punkte in der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid c_1 x_1^4 + c_2 x_2^4 + \cdots + c_n x_n^4 = 1\}$$

voneinander haben können.

↗ Lösungen zu »Optimierung auf Mannigfaltigkeiten«

Aufgabe (98.16) Eine reelle Zahl $a > 0$ soll so als Summe $a = a_1 + \cdots + a_n$ positiver reeller Zahlen $a_i > 0$ dargestellt werden, daß das Produkt $a_1 a_2 \cdots a_n$ möglichst groß wird. Wie ist die Zerlegung zu wählen? (Die Anzahl n der Summanden ist dabei beliebig.)

Aufgabe (98.17) Ein Punkt (x_0, y_0) im ersten Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems sei gegeben. Wir betrachten alle rechtwinkligen Dreiecke, deren Katheten von $(0,0)$ aus in Richtung der Koordinatenachsen verlaufen und deren Hypotenuse durch (x_0, y_0) geht. Welches unter diesen Dreiecken hat minimalen Umfang?

Aufgabe (98.18) (a) Welcher Quader mit vorgegebenem Volumen V_0 hat minimale Oberfläche?

(b) Welcher Quader mit vorgegebener Oberfläche F_0 hat maximales Volumen?

Aufgabe (98.19) Eine quaderförmige Kiste ohne Deckel soll gefertigt werden.

(a) Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn das Volumen V_0 vorgegeben ist und der Materialverbrauch minimiert werden soll?

(b) Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn der Materialaufwand vorgegeben ist und das Volumen maximiert werden soll?

Aufgabe (98.20) Aus Aluminium soll eine zylinderförmige Getränkedose mit vorgegebenem Volumen V hergestellt werden. Wie sind die Abmessungen (Grundkreisradius r und Höhe h) zu wählen, damit möglichst wenig Material verbraucht wird? Wie ist bei der optimalen Wahl der Abmessungen das Verhältnis $h : r$? Diese Aufgabe soll auf zwei Arten gelöst werden:

(a) mit der Methode von Lagrange,

(b) durch Elimination einer Variablen und Rückführung auf ein eindimensionales Optimierungsproblem.

Aufgabe (98.21) Bestimme die kleinste Zahl F mit der folgenden Eigenschaft: Sind Q_1 und Q_2 beliebige Quadrate mit der Gesamtfläche 1, so gibt es ein Rechteck mit der Fläche F derart, daß Kopien von Q_1 und Q_2 überlappungsfrei in dieses Rechteck eingepaßt werden können.

Aufgabe (98.22) Ein Vollkreis werde in zwei Sektoren mit den Zentriwinkeln α und $\beta = 2\pi - \alpha$ zerlegt, und jeder der beiden Sektoren wird zu einem Kreiskegel geformt. Wie ist α zu wählen, damit die Summe der beiden Kegelvolumina maximal wird?

Aufgabe (98.23) Wir betrachten auf $\mathbb{K}^n$ die Normen

$$\|v\|_p \;=\; \sqrt[p]{|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p}$$

für $1 \le p < \infty$ sowie $\|v\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |v_i|$. Wir wissen schon, daß je zwei solcher Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ äquivalent sind; es gibt also jeweils positive Konstanten $a = a_{p,q}$ und $b = b_{p,q}$ mit $a\|v\|_q \le \|v\|_p \le b\|v\|_q$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Finde jeweils die *bestmöglichen* solchen Konstanten!

Aufgabe (98.24) Wir betrachten die Funktionen $f, g : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := 2x + 3y$ und $g(x,y) := \sqrt{x} + \sqrt{y} - 5$. Zeige, daß es einen eindeutig bestimmten Punkt (x_0, y_0) gibt, an dem die Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ihr Maximum annimmt, daß es aber keinen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(\nabla f)(x_0, y_0) = \lambda \cdot (\nabla g)(x_0, y_0)$. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz von Lagrange?

Aufgabe (98.25) Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x$ und $g(x,y) := x^3 - y^2$. Zeige, daß es einen eindeutig bestimmten Punkt (x_0, y_0) gibt, an dem die Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ihr Minimum annimmt, daß es aber keinen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(\nabla f)(x_0, y_0) = \lambda \cdot (\nabla g)(x_0, y_0)$. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Lagrange?

Aufgabe (98.26) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f, g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ Funktionen der Klasse C^1. Die Funktion f nehme im Punkt $p \in U$ ein lokales Minimum oder Maximum unter den Nebenbedingungen $g_i(x) = 0$ für $1 \le i \le m$ an. Zeige, daß es einen Vektor $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \ne (0, 0, \ldots, 0)$ gibt mit

$$\lambda_0\,(\nabla f)(p) \;=\; \lambda_1\,(\nabla g_1)(p) + \cdots + \lambda_m\,(\nabla g_m)(p).$$

Aufgabe (98.27) Gegeben seien eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sowie Funktionen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $1 \le i \le m$. An der Stelle p nehme f unter den Nebenbedingungen $g_i = 0$ ein lokales Extremum an, und die Vektoren $(\nabla g_i)(p)$ seien linear unabhängig. Dann existieren zugehörige Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Zeige: Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Funktion mit den Komponentenfunktionen g_i, so ist $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$ gegeben durch

$$\lambda \;=\; \bigl(g'(p)^T g'(p)\bigr)^{-1} g'(p)^T (\nabla f)(p)\,.$$

Aufgabe (98.28) Wir betrachten die Funktionen $f(x,y) := xy$ und $g(x,y) := x + y - 2$ sowie $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$. Ferner sei $(x_0, y_0, \lambda_0) := (1, 1, -1)$.

(a) Zeige, daß im Punkt (x_0, y_0) die Funktion f ihr eindeutig bestimmtes Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ annimmt.

(b) Zeige, daß weder (x_0, y_0, λ_0) eine Maximalstelle von L noch (x_0, y_0) eine Maximalstelle der Funktion $(x,y) \mapsto L(x,y,\lambda_0)$ ist.

↗ Lösungen zu »Optimierung auf Mannigfaltigkeiten«

Aufgabe (98.29) Es seien $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y) = 0\}$ mit $G(x,y) := y - x^3 - (28/27)$ und f die Einschränkung der Funktion $F(x,y) := x^2 + y^2$ auf M. Zeige, daß f im Punkt $p := (-1/3, 1)$ ein lokales Maximum annimmt, obwohl die Einschränkung von $F''(p)$ auf $T_pM \times T_pM$ indefinit ist.

Aufgabe (98.30) Wir betrachten eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ und eine C^2-Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir wollen sowohl notwendige als auch hinreichende Kriterien dafür herleiten, daß die Einschränkung $f = F|_M$ ein Maximum oder Minimum in einem Punkt $p \in M$ annimmt. (Gemeint sind immer lokale Maxima und Minima.) Wir nehmen an, M sei in einer Umgebung von p durch ein reguläres Gleichungssystem $G_1(x) = \cdots = G_m(x) = 0$ mit $m = n - d$ gegeben. Es seien Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ derart gegeben, daß für $L(x) := F(x) + \lambda_1 G_1(x) + \cdots + \lambda_m G_m(x)$ die Bedingung $L'(p) = 0$ gilt. Es sei $(v_1, \ldots, v_d)$ eine Basis von $T_pM = \big(\mathbb{R}(\nabla G_1)(p) + \cdots + \mathbb{R}(\nabla G_m)(p)\big)^\perp$, und es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_d$. Mit der Hesse-Matrix $L''(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von L im Punkt p bilden wir die Matrix

$$B := A^T L''(p) A \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Hat f ein Minimum in p, so ist B positiv semidefinit.
(b) Ist B positiv definit, so hat f ein Minimum in p.
(c) Hat f ein Maximum in p, so ist B negativ semidefinit.
(d) Ist B negativ definit, so hat f ein Maximum in p.
(e) Ist B indefinit, so hat f kein Extremum in p.

Bemerkung: In den folgenden Aufgaben wird dieses allgemeine Ergebnis für kleine Werte von n und m konkretisiert.

Aufgabe (98.31) Funktion in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ reellwertige Funktionen. An der Stelle $p \in \Omega$ gebe es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(p) = \lambda\,(\nabla g)(p)$ (d.h., die notwendige Bedingung dafür, daß f ein Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ annimmt, sei erfüllt). Mit $L := f + \lambda g$ definieren wir $D : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$D := \begin{bmatrix} -g_y & g_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g_y \\ g_x \end{bmatrix}.$$

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

(a) Gilt $D(p) > 0$, so nimmt f ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.
(b) Gilt $D(p) < 0$, so nimmt f ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.

Aufgabe (98.32) Funktion in drei Variablen mit einer Nebenbedingung. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ reellwertige Funktionen. An der Stelle $p \in \Omega$ gebe es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(p) = \lambda\,(\nabla g)(p)$ (d.h., die notwendige Bedingung dafür, daß f ein Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ annimmt, sei erfüllt). Mit $L := f + \lambda g$ definieren wir $A : \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ durch

$$A := \begin{bmatrix} -g_y & -g_x g_z \\ g_x & -g_y g_z \\ 0 & g_x^2 + g_y^2 \end{bmatrix}, \text{ falls } (g_x, g_y) \neq (0,0),$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ falls } (g_x, g_y) = (0,0)$$

und dann $M : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$M := A^T \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} A.$$

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

(a) Ist $M(p)$ positiv definit, so nimmt f ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.
(b) Ist $M(p)$ negativ definit, so nimmt f ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.

Aufgabe (98.33) Funktion in drei Variablen mit zwei Nebenbedingungen. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f \in C^2(\Omega)$ und $g_1, g_2 \in C^1(\Omega)$ reellwertige Funktionen. An der Stelle $p \in \Omega$ gebe es Zahlen $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(p) = \lambda_1\,(\nabla g_1)(p) + \lambda_2\,(\nabla g_2)(p)$ (d.h., die notwendige Bedingung dafür, daß f ein Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ annimmt, sei erfüllt). Mit $L := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ definieren wir $D : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$D := \big((\nabla g_1)\times(\nabla g_2)\big)^T \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} \big((\nabla g_1)\times(\nabla g_2)\big).$$

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

(a) Gilt $D(p) > 0$, so nimmt f ein lokales Minimum unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ an.
(b) Gilt $D(p) < 0$, so nimmt f ein lokales Maximum unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ an.

Aufgabe (98.34) Bestimme alle Extrema der Funktion $f(x,y,z) := x(y+z)$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und gib jeweils an, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Aufgabe (98.35) Wir betrachten C^1-Funktionen $f, g_1, \ldots, g_m$ und fassen die Funktionen g_i zu einer vektorwertigen Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zusammen. Wir nehmen an, auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ habe $g'(x)$ den Rang $n - m$, und für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^m$ eines gewissen Parameterbereichs nehme f in U ein eindeutiges Minimum bzw. Maximum unter der Nebenbedingung $g(x) = c$ an. Dieses Optimum werde an der Stelle $x_\star(c)$ angenommen, und

↗ Lösungen zu »Optimierung auf Mannigfaltigkeiten«

die Abbildung $c \mapsto x_\star(c)$ sei von der Klasse C^1. Ferner sei $\lambda(c) \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor von Lagrange-Multiplikatoren. Zeige, daß dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} f\big(x_\star(c)\big) \;=\; \lambda(c)^T$$

gilt, und interpretiere diese Gleichung.

Aufgabe (98.36) Es sei

$$M \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

Bestimme die Minima und Maxima der Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x,y) \;:=\; x^2 y,$$

und zwar sowohl durch Benutzung der Methode der Lagrange-Multiplikatoren als auch mit Hilfe einer Parametrisierung von M. (Der Nachweis, daß tatsächlich ein Minimum bzw. Maximum vorliegt, gehört mit zur Aufgabe!)

Aufgabe (98.37) (a) Gesucht ist eine Ellipse, die sich "möglichst gut" an $n \geq 6$ vorgegebene Datenpunkte (x_i, y_i) mit $1 \leq i \leq n$ anpaßt. Jede Ellipse läßt sich in eindeutiger Weise durch eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad 4ac - b^2 \;=\; 1$$

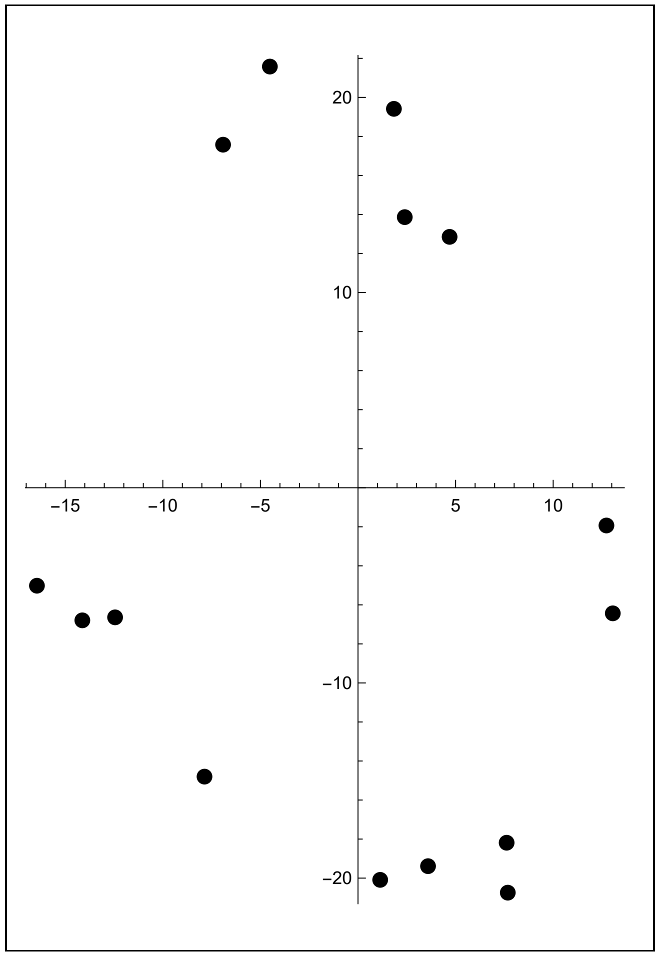
beschreiben. Als Optimierungskriterium für eine "möglichst gute" Anpassung legen wir fest, daß der Ausdruck

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f)^2$$

möglichst klein werden soll. Minimiere also den Ausdruck $(\star)$ unter allen Argumenten $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$, die die Nebenbedingung $4ac - b^2 = 1$ erfüllen.

(b) Werte die in Teil (a) erhaltene Lösung für die folgenden Datenpunkte aus. (Die Lage dieser Punkte ist der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen.)

i	1	2	3	4	5
x_i	4.69278	7.67424	12.729	7.6151	−4.51569
y_i	12.8547	−20.7459	−1.93386	−18.1878	21.5788
i	6	7	8	9	10
x_i	13.054	−14.1237	−16.4503	2.39571	3.58829
y_i	−6.43454	−6.79344	−5.01942	13.8649	−19.3885
i	11	12	13	14	15
x_i	−7.86512	−6.91311	1.13604	1.83971	−12.446
y_i	−14.8005	17.5762	−20.0898	19.4133	−6.63988



Datenpunkte, durch die eine Ausgleichsellipse gelegt werden soll.

↗ Lösungen zu »Optimierung auf Mannigfaltigkeiten«

A99: Kurven

Aufgabe (99.1) (a) Ein Kreis vom Radius r rolle entlang einer Geraden g ab. Es sei P ein fest am Kreisrand markierter Punkt. Gib eine Parameterdarstellung der von P durchlaufenen Kurve an. (Eine solche Kurve heißt eine **Zykloide**.)

(b) Es sei B der Teil der Kurve zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten, an denen P die Gerade g berührt. Berechne die Länge des Bogens B und die Fläche zwischen B und g.

Aufgabe (99.2) Die **Kissoide** des Diocles (etwa 240-180 v. Chr.) ist eine Kurve, die auf folgende Art entsteht. Wir betrachten einen Kreis, einen Punkt O auf dem Kreisrand und eine Gerade g durch den Kreismittelpunkt, die parallel zu der Kreistangente durch O verläuft. Für je zwei Geraden g_1 und g_2, die in gleichem Abstand parallel zu g verlaufen und den Kreis in vier Punkten $A_1, B_1 \in g_1$ und $A_2, B_2 \in g_2$ schneiden, gehören die Schnittpunkte der Geraden $\overline{OA_2}$ und $\overline{OB_2}$ mit g_1 sowie die Schnittpunkte der Geraden $\overline{OA_1}$ und $\overline{OB_1}$ mit g_2 zur Kissoide. Führen wir diese Konstruktion für alle Geradenpaare (g_1, g_2) durch, so ergibt sich die punktweise Konstruktion der Kissoide.

Wähle ein Koordinatensystem so, daß O der Punkt $(0, 0)$ und g die Gerade $x = r$ ist, wobei r den Kreisradius bezeichnet. Bestimme die Gleichung der Kissoide in diesem Koordinatensystem sowie eine Parameterdarstellung dieser Kurve!

Aufgabe (99.3) Die **Konchoide** des Nicomedes (etwa 280-210 v. Chr.) ist eine Kurve, die auf folgende Art entsteht. Wir geben uns eine Gerade g, einen Punkt $O \notin g$ sowie einen Abstand a vor. Jede Gerade durch O, die nicht parallel zu g verläuft, schneidet g in einem Punkt S, und es seien P, Q diejenigen Punkte auf der Geraden $\overline{OS}$, die von S den Abstand a haben. Die Menge aller so konstruierten Punkte P und Q ist dann die gesuchte Konchoide.

Wähle ein Koordinatensystem so, daß O der Punkt $(0, 0)$ und g die Gerade $x = d$ ist, wobei d den Abstand des Punktes O von der Geraden g bezeichnet. Bestimme die Gleichung der Konchoide in diesem Koordinatensystem sowie je eine Parameterdarstellung für die beiden Zweige der Kurve! (Deren Aussehen hängt davon ab, ob $a < d$, $a = d$ oder $a > d$ gilt.)

Aufgabe (99.4) (a) Es sei $t \mapsto P(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ eine parametrisierte ebene Kurve C, deren Krümmung nirgends Null ist, und es sei $Q(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ der Krümmungsmittelpunkt von C bezüglich des Punktes $P(t)$. Finde eine Parameterdarstellung der Kurve $t \mapsto Q(t)$. (Man nennt diese die **Evolute** von C.)

(b) Bestimme die Evolute der Normalparabel $y = x^2$.

(c) Bestimme die Evolute einer Zykloide.

Aufgabe (99.5) Es sei E die Evolute einer ebenen Kurve C. (Es gilt also $E = \{M_p \mid p \in C\}$, wenn M_p der Krümmungsmittelpunkt von C an der Stelle p ist.)

(a) Zeige, daß für $p \in C$ die Gerade $\overline{pM_p}$ gleichzeitig die Kurve C in p senkrecht und die Kurve E in M_p tangential trifft. (Ist also $N_C(p)$ die Normale zu C an der Stelle p, so ist E gerade die Enveloppe der Geradenschar $\{N_C(p) \mid p \in C\}$.)

(b) Wir halten einen Punkt $p_0 \in C$ fest. Zeige, daß die Länge des Evolutenbogens $M_{p_0}M_p$ und der Krümmungsradius r_p die gleiche Änderungsrate bezüglich p haben.

Aufgabe (99.6) Es seien $R > r > 0$ und $u, v \neq 0$ vorgegebene Zahlen. Welche Art von Kurve ist durch die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \cos(ut)\big(R + r\cos(vt)\big) \\ \sin(ut)\big(R + r\cos(vt)\big) \\ r\sin(vt) \end{bmatrix}$$

gegeben? Unter welchen Bedingungen handelt es sich um eine geschlossene Kurve?

Aufgabe (99.7) Bestimme für die folgenden Kurven jeweils Krümmung und Torsion sowie das Serret-Frenet-Dreibein!

(a) $\alpha(t) = \big(r\cos t, r\sin t, ht/(2\pi)\big)$
(b) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

Aufgabe (99.8) Ein Intervall I, eine Funktion $\kappa : I \to (0, \infty)$ und eine Funktion $\tau : I \to \mathbb{R}$ seien vorgegeben.

(a) Zeige, daß es eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ gibt, deren Krümmung κ und deren Torsion τ ist!
(b) Zeige, daß eine andere Kurve $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ genau dann ebenfalls die Krümmung κ und die Torsion τ hat, wenn es eine feste Drehung D und einen festen Vektor v gibt mit $\beta(t) = D\alpha(t) + v$ für alle $t \in I$.

Aufgabe (99.9) Es sei $s \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, für die $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ stets linear unabhängig sind. Drücke die ersten vier Ableitungen von α in Koordinaten bezüglich des Serret-Frenet-Dreibeins (T, N, B) aus!

Aufgabe (99.10) Es sei $s \mapsto \alpha(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve derart, daß $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ für jeden Wert s linear unabhängig sind. Zeige, daß es zu jedem Wert s_0 eine eindeutig bestimmte Kugel $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - m\| \leq R\}$ derart gibt, daß für die Funktion

$$a(s) := \|\alpha(s) - m\|^2 - R^2$$

(die beschreibt, wie sich die Kurve von der Kugeloberfläche entfernt) die Gleichungen $\alpha^{(k)}(s_0) = 0$ für $0 \leq k \leq 3$ gelten. (Man nennt diese Kugel die **Schmiegkugel** an die Kurve α im Punkt $\alpha(s_0)$.)

↗ Lösungen zu »Kurven«

Hinweis: Mache den Ansatz $\alpha(s_0) - m = v_1 T(s_0) + v_2 N(s_0) + v_3 B(s_0)$, wenn (T, N, B) das Serret-Frenet-Dreibein der Kurve bezeichnet.

Aufgabe (99.11) Es sei $s \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve, für die $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ stets linear unabhängig sind. Welche Bedingung müssen die Krümmung κ und die Torsion τ der Kurve erfüllen, damit α eine sphärische Kurve ist, also ganz innerhalb einer Kugeloberfläche verläuft?

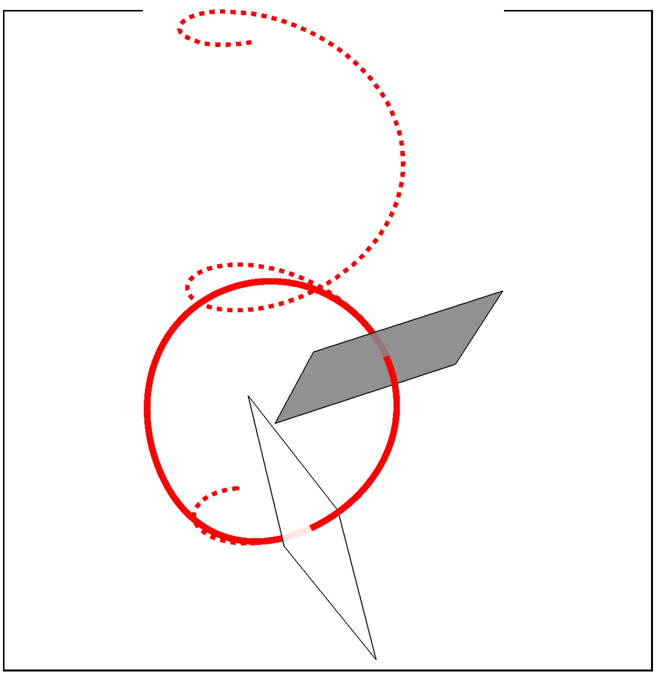
Aufgabe (99.12) Gegeben seien eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine reguläre C^2-Kurve, die auf einer Seite von E verläuft und die Ebene E senkrecht trifft. Zeige: Setzt man α durch Spiegelung an der Ebene E fort, so ist die fortgesetzte Kurve immer noch eine reguläre C^2-Kurve.

Aufgabe (99.13) Für gegebene Zahlen $0 < d < r$ betrachten wir die Schraubenlinie

$$\alpha(t) \ := \ \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ d \cdot t \end{bmatrix} .$$

(a) Zeige, daß es $t_1 < t_2$ derart gibt, daß die Tangentialvektoren $\dot\alpha(t_1)$ und $\dot\alpha(t_2)$ aufeinander senkrecht stehen.

(b) Wir bezeichnen mit E_1 die Ebene durch $\alpha(t_1)$ mit Normalenvektor $\dot\alpha(t_1)$ und mit E_2 die Ebene durch $\alpha(t_2)$ mit Normalenvektor $\dot\alpha(t_2)$. Zeige: Spiegelt man das Kurvenstück $\alpha([t_1, t_2])$ an E_2 und die so verlängerte Kurve an E_1, so ergibt sich eine geschlossene C^2-Kurve konstanter Krümmung, die kein Kreis ist.



Geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung.

Aufgabe (99.14) Es seien $x, y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $y(t)^2 = x(t)^3$ für alle t sowie $x(0) = y(0) = 0$. Zeige unter den folgenden Voraussetzungen, daß dann zwangsläufig $\dot x(0) = \dot y(0) = 0$ gelten muß!

(a) x und y sind von der Klasse C^ω
(b) x und y sind von der Klasse C^3
(c) x und y sind stetig und an der Stelle 0 differentiierbar

Aufgabe (99.15) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Auf der Menge $I_0 := \{t \in I \mid \dot\gamma(t) \neq 0\}$ ist dann eine Einheitstangentenabbildung

$$T(t) \ := \ \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}$$

definiert. Beweise die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(1) es gibt eine Umparametrisierung $\tau : J \to I$ derart, daß $\alpha := \gamma \circ \tau$ eine reguläre C^1-Abbildung ist;
(2) die Abbildung $T : I_0 \to \mathbb{R}^n$ läßt sich stetig auf ganz I fortsetzen.

Anschaulich bedeutet diese Aussage, daß man eine Kurve genau dann ohne anzuhalten durchlaufen kann, wenn man sie mit konstanter Einheitsgeschwindigkeit durchlaufen kann. (Wie die folgenden Beispiele zeigen, kann man diese Aussage anwenden, um die Existenz oder Nichtexistenz einer regulären Parametrisierung einer Kurve nachzuweisen.)

Aufgabe (99.16) (a) Die Normalparabel $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ wird durch die C^1-Abbildung $\gamma(t) := (t^3, t^6)$ parametrisiert, die aber an der Stelle $t = 0$ nicht regulär ist. Benutze die vorhergehende Aufgabe, um aus γ eine reguläre Parametrisierung von C zu gewinnen.

(b) Die Neilsche Parabel $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ wird durch die C^1-Abbildung $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ parametrisiert, die aber an der Stelle $t = 0$ nicht regulär ist. Benutze die vorhergehende Aufgabe zum Nachweis, daß diese Nichtregularität nicht korrigiert werden kann!

Bemerkung: Beim Auftreten singulärer Punkte einer Parametrisierung muß man also unterscheiden, ob diese nur in der ungeschickten Wahl der Parametrisierung begründet sind oder in einem wirklichen geometrischen Defekt der zugrundeliegenden Punktmenge. (Vgl. Aufgabe (97.2).) Diese Unterscheidung ist wesentlich bei der Herausbildung des Mannigfaltigkeitsbegriffs.

Aufgabe (99.17) Für eine fest vorgegebene Zahl $a \neq 0$ betrachten wir die Kurve $ay^2 = x^3$. Zeige, daß jeder Punkt P dieser Kurve bis auf einen die Eigenschaft hat, daß die Tangente an die Kurve im Punkt P die Kurve in genau einem weiteren Punkt Q schneidet. Welches ist der Ausnahmepunkt?

Aufgabe (99.18) Es sei $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$.
(a) Besitzt C eine C^∞-Parametrisierung?
(b) Besitzt C eine C^ω-Parametrisierung?

↗ Lösungen zu »Kurven«