AENEAS ROOCH

Die Entdeckung der Unendlichkeit

AENEAS ROOCH

Die Entdeckung der Unendlichkeit

Das Jahrhundert, in dem
die Mathematik sich neu erfand

1870–1970

HEYNE

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C014496

Penguin Random House Verlagsgruppe FSC® N001967

2. Auflage
Originalausgabe 2022

Redaktion: Kerstin Lücker
Illustrationen: Inka Hagen
Bildredaktion: Tanja Zielezniak
Umschlaggestaltung: Hauptmann & Kompanie Werbeagentur, Zürich,
unter Verwendung einer Illustration von © Bridgeman Images /Leonard de Selva
Satz: Satzwerk Huber, Germering
Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck
Printed in Germany
ISBN: 978-3-453-21818-5

www.heyne.de

Für Mari

Inhalt

I
CANTOR ZERLEGT DIE UNENDLICHKEIT
1870–1900

II
HILBERT SIEHT DAS GEBÄUDE DER MATHEMATIK EINSTÜRZEN UND BAUT ES NEU AUF
1900–1930

III
SCHMERZHAFTE ERKENNTNISSE UND EINE UNERWARTETE ANTWORT AUF EINE HUNDERT JAHRE ALTE FRAGE
1930–1970

I

CANTOR ZERLEGT DIE UNENDLICHKEIT

1870–1900

1

Eine merkwürdige Erkenntnis

Im Sommer 1917 wurde ein alter Mann in die Nervenklinik der Universität Halle eingeliefert. Wörter sprudelten aus ihm heraus, doch man konnte ihnen nicht folgen, er blickte verstört um sich, wütend, ungestüm, voller Qual und Zorn. Er wirkte aufgewühlt und durcheinander. Der Mann war der Mathematikprofessor Georg Cantor.

Er hatte an etwas Brisantem gearbeitet, an das sich jahrhundertelang niemand herangetraut hatte, und war dabei auf etwas Merkwürdiges gestoßen. Als neugieriger Wissenschaftler, der mit Leidenschaft über abstrakte Probleme nachdachte, hatte er begonnen, es zu erforschen. Was er herausfand, sollte sein Fach revolutionieren, es sollte zur Grundlage der modernen Mathematik werden, dem Fundament, auf dem sie mit ihren Zahlen und Rechenoperationen, ihren Punkten, Kurven, Flächen und Räumen, ihren Funktionen und ihren abstrakten Objekten aufbaut. Cantors Erkenntnisse stehen heute in jedem Mathematikstudium auf dem Lehrplan für das erste Semester, doch Ende des 19. Jahrhunderts wurden sie kaum verstanden. Stattdessen wurde Cantor von seinen Fachkollegen angefeindet und attackiert, und bedeutende Mathematiker ließen ihren Einfluss spielen, um zu verhindern, dass er seine Überlegungen veröffentlichen konnte.

Was er im Alleingang und gegen alle Widerstände untersuchte, hatten Wissenschaftler seit Jahrhunderten nicht angetastet, es war fast so etwas wie ein Sakrileg: Georg Cantor erforschte die Unendlichkeit, und er tat es mit der Präzision, Radikalität und Strenge eines Mathematikers. Er löste sich von der Vorstellung, dass Unendlichkeit unseren Geist übersteigt, und ergründete allein durch strukturiertes Nachdenken ihre Eigenschaften, so wie es Mathematiker auch bei anderen abstrakten Objekten tun, seien es Integrale, Primzahlen, Grenzwerte, Krümmungen oder Wahrscheinlichkeiten. Bei dieser logischen Untersuchung erlebte Cantor eine Überraschung: Es gibt, so fand er heraus, nicht die eine unfassbare, unantastbare, unzugängliche Größe, die alles übersteigt und jede Vorstellung sprengt – es gibt nicht die eine Unendlichkeit, sondern mehrere. Cantor stellte fest, dass es verschiedene Sorten von Unendlichkeit gibt, und mehr noch, dass man sogar mit ihnen rechnen kann.

Als der Mathematikprofessor im Sommer des Jahres 1917 in die Klinik in Halle eingeliefert wurde, war er den Ärzten wohlbekannt, denn es handelte sich nicht um seinen ersten Aufenthalt dort. Immer wieder hatten ihn Nervenzusammenbrüche aus seinen Gedanken gerissen, und er musste ganze Monate in der Psychiatrie verbringen. Doch ein ums andere Mal kehrte er an den Schreibtisch zurück, dachte sich tief in die logische Welt der Mathematik hinein und kam so der wundersamen Natur der Unendlichkeit auf die Spur. Hier, im Universum der Unendlichkeiten, stieß aber auch er dann auf Rätsel, die er trotz seiner Scharfsinnigkeit nicht lösen konnte. Vor allem eine Frage stellte sich ihm, die zunächst klein und unscheinbar schien. Es dauerte jedoch rund einhundert Jahre, bis sie geklärt werden konnte. Erst 1963 fand der amerikanische Mathematiker Paul Joseph Cohen eine Antwort – und sie war ausnehmend kurios. Mit Georg Cantor aber fing diese erstaunliche Geschichte an.

2

Geschaffen, um im Denken Genuss zu finden

Fast wäre der Mann, der es gegen alle Widerstände wagte, die Unendlichkeit zu erforschen, und der im Alleingang eine neue Epoche in der Mathematik einleitete, gar kein Mathematiker geworden. Sein Vater hatte andere Pläne für ihn. Dieser Vater, Georg Woldemar Cantor, war als Kind zusammen mit seiner Mutter unter geheimnisvollen Umständen in die russische Metropole Sankt Petersburg gelangt, damals die Hauptstadt Russlands. Georg Woldemar wuchs in der evangelischen Mission auf und wurde Kaufmann. Als er etwa dreißig Jahre alt war, handelte er von und nach Übersee mit Segeltüchern und Seilen und unterhielt ein profitables Unternehmen, die Firma »Cantor & Co.«, später arbeitete er als Börsenmakler. 1842 heiratete er eine empfindsame, musikalische Frau, Marie Böhm, die aus einer berühmten österreichischen Musikerfamilie stammte. Rund drei Jahre später bekamen die beiden ihr erstes Kind: Am 3. März 1845 erblickte Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor das Licht der Welt, im mondänen, prächtigen Sankt Petersburg. Er wuchs mit drei jüngeren Geschwistern auf, Ludwig, Sophie und Constantin, über die jedoch wenig bekannt ist.

Brieffragmente, die erhalten geblieben sind, zeigen Cantors Vater als einen bodenständigen, klugen Mann, der Bildung zu achten wusste und sich für Wissenschaft und Sprachen interessierte. Er war tief religiös und erzog seine Kinder im lutherischen Glauben. Vermutlich aber konnte er sich niemals auch nur ansatzweise vorstellen, auf welch spektakuläre Weise sein Sohn Georg später dem Göttlichen näher kommen sollte – indem er das Göttliche in Gestalt der Unendlichkeit erforschte, über die Sprache der Mathematik.

»Cantor & Co.« lief bestens, und als Georg Woldemar Cantor durch eine Lungenkrankheit gezwungen war, seine Geschäfte aufzugeben und in ein milderes Klima zu ziehen, reichte sein Vermögen aus, um gut davon leben zu können.

1856 zogen die Cantors in die deutsche Kurstadt Wiesbaden und von dort weiter nach Frankfurt am Main. Der kleine Georg war zu dieser Zeit elf Jahre alt. Später erinnerte er sich gern an seine Kindheit in Russland, sprach in einem Brief von einer wundervollen Zeit, nannte Sankt Petersburg seine Heimat und bedauerte, dass er sie nie wieder besucht hatte.

Als erfolgreicher Kaufmann wünschte der Vater sich für den Sohn einen nützlichen, gut bezahlten und angesehenen Beruf. Er wollte, dass Georg Ingenieur wurde, und schickte ihn auf die »Höhere Gewerbeschule des Großherzogthums Hessen« nach Darmstadt. Was er dort von ihm erwartete, offenbarte er dem Teenager zu Pfingsten 1860 in einem Brief:

> Zur Erlangung vielfacher gründlicher wissenschaftlicher und praktischer Kenntnisse, zur vollkommenen Aneignung fremder Sprachen und Literaturen, zur vielseitigen Bildung des Geistes, auch in manchen humanistischen Wissenschaften […] dazu ist die eben angetretene zweite Periode Deines Lebenslaufes, das Jünglingsalter, bestimmt. Was der Mensch aber in dieser Periode versäumt, oder durch vorzeitige Vergeudung seiner besten Kräfte, Gesundheit und Zeit, sozusagen verludert, das ist unwiederbringlich und unersetzlich für ewig verloren.[1]

Dem erfolgreichen Kaufmann mit der geheimnisvollen Vergangenheit war die Erziehung seiner Kinder wichtig. Ob er ihnen liebevoll Möglichkeiten aufzeigte oder sie mit seinen strengen Vorstellungen einengte, ist im Rückblick schwer zu beurteilen, jedenfalls versuchte Georg Woldemar wohl Zeit seines Lebens, seinem Sohn Georg ein guter Ratgeber zu sein. Wie auch viele heutige Eltern rang er darum, den richtigen Ton zu treffen, um seinen Sohn zu erreichen. Sein Hinweis zu Pfingsten etwa, wozu das Jünglingsalter bestimmt sei und dass man Gesundheit und Zeit nicht vergeuden solle, schien vielleicht zu vorsichtig formuliert gewesen zu sein, jedenfalls beobachtete Georg Woldemar mit wachsender Sorge, dass der junge Georg an der Gewerbeschule in Darmstadt bereits in eine studentische Verbindung eingetreten war, und er sah sich offensichtlich genötigt, deutlicher zu werden. Im Mai 1861 schrieb er ihm:

> Möchtest Du doch jetzt soviel eigene Einsicht gewinnen, um selbst die lebhafte Überzeugung daraus zu schöpfen, welche ungeheuren Nachteile Dir das frühzeitige Sichgehenlassen in diesem lässigen Treiben jenes lächerlichen, äffischen Corpswesens bringen muß, umso mehr als letzteres doch bloß im leeren Kneipen seinen Ausdruck sucht […][2]

Entweder haben die direkten Worte Gehör gefunden, oder das rituelle Trinkgelage in der Studentenverbindung, das Kneipen, war ohnehin nicht Cantors Sache, jedenfalls schrieb ihm sein Vater bereits zwei Monate später voller Freude:

> Du scheinst nun selbst zu dem Bewußtsein des Bedürfnisses gekommen zu sein, wie außerordentlich notwendig Dir noch eine allgemeine Ausbildung in den humanoria ist, jenen Fächern der höheren menschlichen Bildung. Ich gratuliere Dir daher zu Deinem tüchtigen Entschlusse, aus dem Corps auszutreten von ganzer Seele und freue mich umso mehr darüber, gerade weil ich es vollkommen begreife, wie schwer in Deinem Alter ein solcher männlicher freiwilliger Entschluß Dir werden mußte! Und ich habe doppelte Ursache mich darüber zu freuen, weil Dein Entschluß nicht durch ein von mir ausgehendes Verbot oder einen Befehl hervorgerufen ist […] In der Tat: es widerstrebt mir zu sehr, in solchen Sachen etwas zu verbieten, was nur vom eigenen Urteil und Willen eines jungen Menschen abhängen sollte. In reiferen Jahren wirst Du auf diese männliche Überwindung mit wahrer Genugtuung und Freude zurückblicken![3]

In seiner Zeit in Darmstadt entdeckte der Teenager Georg nicht nur das Studentenleben, sondern fand auch Freude an abstrakten, mathematischen Überlegungen. Er fasste den Entschluss, Mathematik zu studieren, und sein Vater erlaubte es ihm. Die Einwilligung war eine gute Entscheidung, nicht nur aus der heutigen Perspektive, aus der wir wissen, dass Georg Cantor ein herausragender Mathematiker werden und das Fach mit seinen Gedanken über Mengen und Unendlichkeiten revolutionieren würde, sondern auch aus dem Blickwinkel des Vaters. Mit seiner Zustimmung zur Studienwahl hatte er den jungen Georg glücklich gemacht, wie dieser ihm in einem Brief versicherte:

> Wie sehr Dein Brief mich freute, kannst Du Dir denken; er bestimmt meine Zukunft. Die letzten Tage vergingen mir im Zweifel und der Unentschiedenheit; ich konnte zu keinem Entschluß kommen. Pflicht und Neigung bewegten sich in stetem Kampfe. Jetzt bin ich glücklich.[4]

Cantor zog nach Zürich und begann, Mathematik zu studieren. In London hatte der Physiker James Clerk Maxwell gerade das erste Farbfoto der Welt vorgeführt, das, wenn auch blaustichig, ein buntes, schottisches Karomuster zeigte. Seine Erfindung leitete das Zeitalter der Bilder ein. Längst hatte die Industrialisierung der Welt ein neues Gesicht verpasst, und das Leben der Menschen veränderte sich radikal. Neue Eisenbahnstrecken ließen Europa näher zusammenrücken, und die Städte wuchsen rasant, weil immer mehr Arbeiter zu den entstehenden Fabriken zogen. Die moderne Technik, das wurde allmählich deutlich, schuf nicht nur neue Lebensverhältnisse, sondern erwies sich auch als eine Kraft, die Veränderungen immer schneller vorantrieb. Cantor aber folgte unbeirrt seiner Berufung und versank in Zürich in eine abstrakte Welt aus Zahlen, Funktionen und Symbolen. Sein Vater stand ihm, wenngleich kein Ingenieur mehr aus ihm werden würde, weiter mit Ratschlägen zur Seite und zeigte hier, auf dem ihm eher unbekannten Terrain der Naturwissenschaften, eine verblüffend zutreffende Einschätzung der Situation:

> Hast du schon ein System und strenge Einteilung Deiner verschiedenen Tagesbeschäftigungen eingerichtet? Dieses ist für einen künftigen Gelehrten, wie mir dünkt – nein ich weiß es! daß es so ist – eigentlich unerlässlich […] Ich habe mich aufrichtig gefreut zu sehen, Du habest ein Colleg über Astronomie belegt. Dies ist jedenfalls ein Fach, welches Du nebenbei pflegen musst und welches man bei näherer Bekanntschaft immer mehr und mehr lieb gewinnt. Besonders scheint mir ein Physiker und Mathematiker, der nicht auch Astronomie kultiviert, etwas Undenkbares![5]

In der Tat waren Physik, Astronomie und Mathematik schon damals eng miteinander verwoben. Viele mathematische Fragen ergaben sich seit jeher aus dem Versuch, physikalische Beobachtungen zu beschreiben und die Mechanismen zu verstehen, die sie hervorbrachten. So trieben Astronomie und Physik die Entwicklung der Mathematik wie ein permanenter Motor voran. Auch hier wurden die Folgen der Industrialisierung spürbar: Durch die Anwendung physikalischen Wissens verstärkte sich die Wechselwirkung von Physik und Mathematik und erhielt neue Impulse. Umgekehrt lieferte die Mathematik spätestens mit der Entwicklung der Differenzialrechnung im 17. Jahrhundert der Physik und Astronomie das Handwerkszeug, um eine unübersichtliche Vielzahl an Messungen, Beobachtungen und Erfahrungen zu sortieren und aufzubereiten, Zusammenhänge aufzuspüren und Gesetzmäßigkeiten zu formulieren. So konnten bestimmte Paradoxa über Bewegung, Position und Geschwindigkeit, die die Menschen schon in der Antike beschäftigt hatten, erst mit modernen Methoden wie dem Konzept unendlicher Summen mathematisch aufgelöst werden. Und 1846 wurde sogar der weit entfernte Planet Neptun erst durch mathematische Berechnungen aufgespürt, bevor er dann im Teleskop ausfindig gemacht werden konnte. Die Mathematik gewann zunehmend an Bedeutung, was den Mathematiker David Hilbert einige Jahrzehnte später, 1930, in einer berühmten Radioansprache zu einer äußerst selbstbewussten Äußerung veranlasste:

> Wir beherrschen nicht eher eine naturwissenschaftliche Theorie, als bis wir ihren mathematischen Kern herausgeschält und völlig enthüllt haben. Ohne Mathematik ist die heutige Astronomie und Physik unmöglich; diese Wissenschaften lösen sich in ihren theoretischen Teilen geradezu in Mathematik auf.[6]

Angesichts dieser Einschätzung zeigt der Hinweis, den der Kaufmann Georg Woldemar Cantor seinem Sohn knapp siebzig Jahre zuvor gab, im Oktober 1862, die Expertise eines echten Branchenkenners. Allerdings folgten nicht mehr viele Ratschläge, denn im darauffolgenden Sommer starb der Vater. Cantor setzte sein Studium für ein Semester aus, kehrte im Anschluss aber nicht wieder nach Zürich zurück, sondern zog seiner Mutter hinterher, die sich in Berlin niederließ.

Der Studienort Berlin erwies sich als exzellente Wahl, denn die Stadt war ein Hotspot der mathematischen Forschung. Cantor hörte

Vorlesungen bei Weltklasse-Mathematikern wie Karl Weierstraß und Leopold Kronecker, die an den neusten Problemen der Algebra und der Analysis arbeiteten. Fünf Jahre später, im Jahr 1867, als der deutsche Philosoph Karl Marx sein Hauptwerk *Das Kapital* veröffentlichte und sich der schwedische Erfinder Alfred Nobel den Sprengstoff Dynamit patentieren ließ, reichte Cantor in Berlin seine Dissertation ein, eine exzellente Arbeit über Zahlentheorie.

Anschließend unterrichtete er, frisch promoviert, an einem Gymnasium – allerdings nicht besonders lang, nach rund zwei Monaten Probeunterricht hörte er wieder auf. Seine Qualität als Wissenschaftler war zwar unbestritten, doch als Lehrer stellte er sich wohl nicht sonderlich geschickt an. Ohnehin sah Cantor seine Zukunft nicht an der Schule, sondern in der Forschung. Er dachte leidenschaftlich gern über abstrakte Probleme nach und träumte davon, in der Mathematik, der Welt der theoretischen Objekte, scharfsinnigen Analysen und präzisen Schlussfolgerungen, etwas bewegen zu können. Er wollte sich mit seiner Zeit und Energie ganz der Wissenschaft widmen, in der Hoffnung, dort mit seinen Ideen verstanden und berühmt zu werden. All das konnte er sich in der Schule nicht vorstellen, und sosehr er es auch schätzte, sich in Berlin bei einem Glas Wein mit anderen Denkern über mathematische Theorien austauschen zu können und an einem regelrechten Kondensationspunkt modernster mathematischer Forschung zu leben – er verließ das Gymnasium und nahm erst einmal die nächstbeste Stelle an einer Universität an, die sich ihm bot: an der Universität Halle.

Es war eine kleine, unbedeutende Provinzuniversität, gar kein Vergleich zum mondänen, wegweisenden Berlin, doch Cantor sah hier seine Chance. Hier, glaubte er, würde er sein Glück finden und seiner Bestimmung nachgehen können. Er schrieb im Februar 1869 an seine Schwester Sophie:

> Ich sehe doch immer mehr ein, wie sehr mir meine Mathematik ans Herz gewachsen ist oder vielmehr, daß ich eigentlich dazu geschaffen bin, um in dem Denken und Trachten in dieser Sphäre Glück, Befriedigung und wahrhaften Genuß zu finden […] Du wirst Dir denken können, daß sich diese Hoffnungen zunächst an Halle knüpfen; dort werde

Georg Cantor im Alter von etwa 25 Jahren, zu Beginn seiner Zeit an der Universität Halle

> ich eine Wirksamkeit haben, welche sich ganz und gar auf meinen Beruf erstreckt, und ich werde dort vielleicht von selbst Anerkennung und Verständnis meiner Bestrebungen finden.[7]

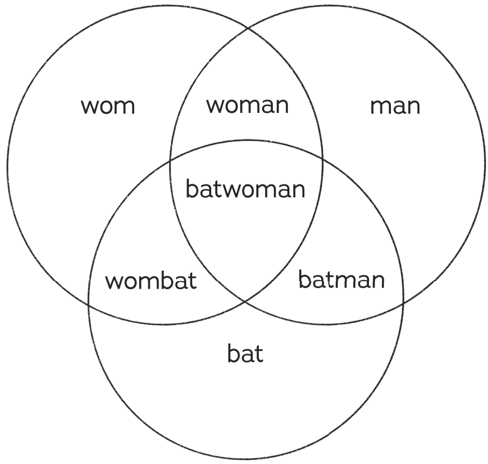
Halle war für Georg Cantor die erstbeste Möglichkeit, sich nach der Dissertation weiter mit dem beschäftigen zu können, was ihn antrieb und faszinierte. Hier wollte er über Zahlen und Funktionen und ihre abstrakten Eigenschaften nachdenken, etwa über die moderne und wichtige Frage, wie man eine komplizierte Funktion durch eine Summe von einfachen beschreiben kann – ob es prinzipiell geht, wann es geht, wie es geht und ob es vielleicht sogar verschiedene Möglichkeiten gibt, das zu tun. Cantor sah Halle als Sprungbrett und hatte nicht vor, allzu lange zu bleiben. Doch er sollte die Stadt nie mehr verlassen.

3
Georg Cantor wagt das Undenkbare

Im Alter von fünfundzwanzig Jahren, gerade frisch promoviert und nach einem kurzen, ernüchternden Ausflug in den Schuldienst, war Georg Cantor an die Universität Halle gewechselt. Er sah die Stelle als Zwischenstation und wollte nur ein paar Jahre bleiben, bis er habilitiert war. Es schien nur eine Frage der Zeit zu sein, bis er eine Professur an einer namhaften Universität erhielt, denn er war begabt, hatte kreative Einfälle und arbeitete an modernen Fragen und Problemen.

Unter anderem erforschte er Mengen. Er löste sich von konkreten Vorstellungen, die man von einer Menge haben kann – Vorstellungen wie »fünf Äpfel«, »drei Birnen«, sich überschneidende Kreise oder andere Arten, wie man Mengen eben gemeinhin bildlich darstellt und wie es einigen vielleicht noch aus dem Mathematikunterricht der 1970er-Jahre bekannt ist, als versucht wurde, mithilfe naiver Mengenlehre logisches Denken zu fördern.

Cantor untersuchte, welche Eigenschaften eine Menge besitzt, ganz allgemein und unabhängig von konkreten Einzelfällen. Eine solche abstrakte Herangehensweise ist für den Alltag nicht von Belang, für die Mathematik jedoch umso mehr. Zum einen benötigen Mathematiker für ihre logischen Schlussfolgerungen handfeste Definitionen, denn nur wenn sie das Objekt, um das es geht, präzise und unmissverständlich benennen können, ist es ihnen möglich, sinnvoll und verlässlich zu argumentieren und sich bei ihren Schlussfolgerungen sicher zu sein. Zum anderen sind Mengen in der Mathematik besonders wichtige Objekte. Die gesamte Wissenschaft – etwa was Zahlen und Rechenoperationen sind, Punkte, Linien, Kreise, Räume, Mannigfaltigkeiten und Funktionen, wie sie miteinander in Beziehung stehen und wie man mit ihnen arbeitet – wird heute logisch mithilfe der Mengenlehre beschrieben. Die abstrakte Mengenlehre ist einer der Grundbausteine, auf denen die gesamte Mathematik aufbaut, und Cantor hat sie als Erster systematisch erforscht.



Mit Mengendiagrammen wie diesen, auch *Venn-Diagramme* genannt, lassen sich manche Mengen und ihre Beziehungen veranschaulichen. Die Mengenlehre, auf der die moderne Mathematik aufbaut, ist allerdings anspruchsvoller, als es solche Diagramme vermuten lassen.

Das war ihm nicht einfach so in den Sinn gekommen, sondern hatte sich ergeben, als er an Problemen arbeitete, die im Mainstream der damaligen Forschung lagen. Cantor untersuchte Punktmengen, wie sie etwa auftreten, wenn man die Lösungen einer Gleichung sucht. Es kann zum Beispiel nur eine einzige Zahl geben, die eine Gleichung löst, es können zwei Zahlen sein oder auch mehr, es können sogar unendlich viele Punkte sein – und schon hat man es mit unterschiedlich mächtigen Punktmengen zu tun.

Beispielsweise besitzt bereits die simple Gleichung

$y = x$

unendlich viele Lösungspunkte (x, y), nämlich alle Pärchen (x, y) aus zwei Zahlen x und y, bei denen beide Einträge x und y identisch sind. Lösungen sind etwa (1, 1) und (192, 192) und $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ und ebenso jedes weitere Pärchen (x, y), bei dem $x = y$ ist. Um der Gleichung diese Lösungsmenge anzusehen, muss man nun wirklich kein Experte sein, denn so, wie die Gleichung dasteht, verrät sie bereits in aller Deutlichkeit, welche Zahlen sie lösen. Eine unendliche Punktmenge mag als Begriff einschüchternd wirken, aber wie dieses Beispiel zeigt, muss sie nichts Kompliziertes sein. Punktmengen sind nichts weiter als Sammelbehälter für Einzelobjekte, zum Beispiel eben für alle Zahlen, die eine bestimmte Gleichung erfüllen. Doch ehe man sich's versieht, hat man einen Sack mit unendlich vielen Objekten. Denken Sie nur an die Menge aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, … Es ist eine sehr einfache Punktmenge, deren erste Mitglieder sogar Kindergartenkinder aufzählen können, und vielleicht sehen Sie mit einem Blick, dass die Menge kein Ende besitzt (falls nicht, werde ich Ihnen in Kürze einen überzeugenden Beweis liefern), und schon haben Sie es abermals mit einer unendlichen Punktmenge zu tun.

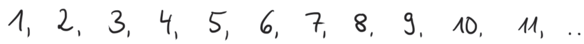
Als Cantor über unendliche Punktmengen nachdachte, stieß er auf etwas Unglaubliches. Er war es als Mathematiker gewohnt, über abstrakte Dinge nachzudenken und dabei auch verblüffende Zusammenhänge aufzuspüren, aber das, was er nun erkannte, lag jenseits aller Anschaulichkeit und traf ihn überraschend. Er fand heraus, dass unendliche Punktmengen zwar unendlich groß sind, sie jedoch auf eine bestimmte Art verschieden groß sein können – Cantor entdeckte, dass es verschiedene Größenordnungen von Unendlichkeit gibt.

Die Idee der Unendlichkeit hat Menschen schon früh beschäftigt. Der griechische Philosoph und Naturforscher Aristoteles sah um 350 v. Chr. zwei verschiedene Arten, wie man etwas Unendliches auffassen kann.

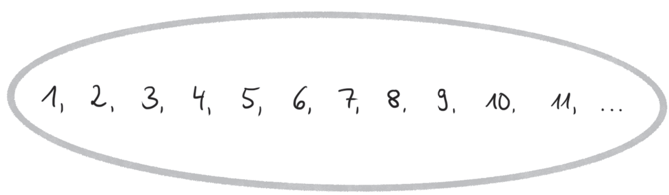
Zum einen gab es für ihn das *potenziell Unendliche*. Eine potenziell unendliche Menge war in seinen Augen eine Menge, der man immer wieder ein neues Element hinzufügen kann und die dennoch niemals fertig ist; es war eine Menge, die durch das fortwährende Hinzufügen einzelner Elemente ohne Ende wachsen kann, eine Menge also, die – eben potenziell – unendlich ist. Aristoteles dachte dabei etwa an die Menge der natürlichen Zahlen, die man sich genau so vorstellen kann:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

Man kann dieser Folge immer noch eine weitere Zahl hinzufügen, ohne dass einem die Zahlen ausgehen, die Menge wird also nie abgeschlossen: Indem man zu der aktuell letzten Zahl einfach eine 1 addiert, erhält man eine neue Zahl, die man der Menge hinzufügen kann; auf diese Weise versammelt man – theoretisch – unendlich viele Zahlen in der Menge.



Potenziell unendliche Menge
(wächst immer weiter, kann man sich vorstellen)



aktual unendliche Menge
(ist fertig, aber unvorstellbar)

Potenziell unendliche Mengen wachsen ohne Ende,
aktual unendliche Mengen sind bereits fertig.

Nicht nur das Zählen, auch das Teilen sah Aristoteles als einen potenziell unendlichen Vorgang an: Wird eine Zahl zum Beispiel durch 2 geteilt, das Ergebnis wieder, dieses Ergebnis wieder und so weiter, kommt man niemals an ein Ende, sondern kann immer weitermachen. Beginnt man beispielsweise mit der Zahl 1, erhält man eine Folge von Zwischenergebnissen:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Auch diese Folge endet niemals, schließlich kann man jede Zahl, die man beim Teilen erhält, wiederum durch 2 teilen und landet so bei einem neuen Ergebnis, das man der Folge hinzufügen und dann erneut durch 2 teilen kann – und so weiter. Das potenziell Unendliche, wie es etwa durch fortwährendes Addieren oder fortwährendes Teilen entsteht, war für Aristoteles gewissermaßen der Weg zur

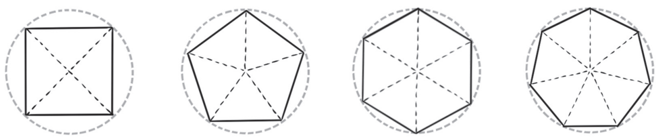
Unendlichkeit: Es war ein Vorgang, sich der Unendlichkeit in Gedanken schrittweise anzunähern.

Neben diesem potenziell Unendlichen sah Aristoteles das *aktual Unendliche*. Eine aktual unendliche Menge war in seinen Augen eine Menge, die aus unendlich vielen Objekten besteht und bereits fertig ist. Sie war sozusagen das Ende des Weges. Aristoteles fand, dass man sich zwar vorstellen kann, wie eine Menge wächst und potenziell unendlich groß wird, dass eine aktual unendliche Menge jedoch, also das Unendliche als fertiges Objekt, weder möglich noch vorstellbar ist.

In der Spätantike, kurz vor Beginn des Frühmittelalters, deutete der Kirchenlehrer Augustinus von Hippo gar: Das aktual Unendliche, das fertige Unendliche, ist Gott.

Für Jahrhunderte blieb diese Deutung unangetastet. Theologen und Philosophen glaubten, dass der menschliche Verstand in seiner Endlichkeit und Beschränktheit das aktual Unendliche nicht erfassen kann, und beließen es dabei. Es gab auch keinen Anlass, diese Ansicht zu hinterfragen, denn Mathematiker und Physiker arbeiteten guter Dinge und ohne Probleme mit dem potenziell Unendlichen, dem Vorgang des Immer-neu-Hinzufügens, und wurden dabei von beeindruckenden Erfolgen bestätigt. So konnten sie zum Beispiel die Fläche eines Kreises bestimmen, indem sie den Kreis durch Vielecke annäherten, und zwar nicht durch eine bestimmte Anzahl von Vielecken, sondern durch immer mehr und mehr, durch potenziell unendlich viele. So kamen sie zu brauchbaren Ergebnissen. Die Mathematik funktionierte bestens ohne das aktual Unendliche, und die Theologen rührten es nicht an. Das fertige Unendliche, Gott, kann man einfach nicht erforschen oder begreifen, da waren sich Theologen und Mathematiker einig.

Doch nun, um 1870, tat Georg Cantor das Undenkbare. Er wollte erforschen, was jahrhundertelang niemand gewagt hatte: die Unendlichkeit als fertiges Objekt. Cantor sah keinen Grund, sie nicht anzutasten, im Gegenteil, er war der Ansicht, das Wesen der Mathematik liege gerade in ihrer Freiheit, und so nahm er sich, frei und radikal, fertige unendliche Mengen vor und untersuchte sie mathematisch. Nachdem Wissenschaftler zuvor über Jahrhunderte der Ansicht gewesen waren, Unendlichkeit übersteige unseren endlichen Verstand, war dies eine revolutionäre Kühnheit. Es war geradezu ein Urknall zu Beginn der modernen Mathematik.



Die Fläche eines Kreises kann man berechnen, indem man sie durch eckige Flächen annähert. Keine eckige Fläche trifft die Kreisfläche perfekt, man erhält sie aber als Grenzwert des potenziell unendlichen Prozesses, wenn man immer filigranere Vielecke in den Kreis legt und ihn dadurch immer mehr ausfüllt.

4
Rechenregeln außer Betrieb

Unendlich große Zahlenmengen sind nichts per se Schwieriges, für uns aber dennoch etwas Bizarres, schließlich haben wir in unserem Leben selten mit vielen Zahlen zu tun, und schon gar nicht mit unendlich vielen. So klingen unendlich große Zahlenmengen für uns wie etwas Abstraktes, Verschrobenes, vielleicht sogar Esoterisches, das wir uns nicht so recht vorstellen können, das es vielleicht gar nicht wirklich gibt und über das wir lieber nicht nachdenken wollen. Für Mathematiker hingegen sind unendlich große Zahlenmengen überhaupt nichts Besonderes und waren es auch schon zu Cantors Zeiten nicht. Sie liefen und laufen ihnen immer wieder über den Weg, schon in ganz grundlegenden Situationen und bei simplen Fragen.

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, … etwa, die *natürlichen Zahlen*, sind eine unendlich große Menge, schließlich nehmen sie kein Ende: Jede Zahl, und sei sie auch noch so groß, besitzt einen Nachfolger, der größer ist, es gibt also immer noch eine weitere Zahl.

Ebenso haben viele Gleichungen nicht nur eine oder zwei Lösungen, sondern unendlich viele. Die Gleichung

$$x = y$$

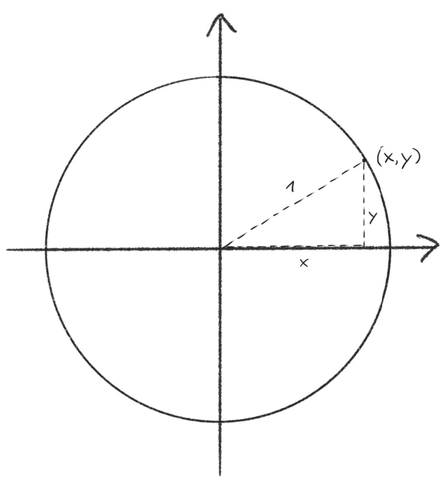
hatten wir eben schon, sie besitzt eine unendlich große Lösungsmenge, weil man ihr sofort ansieht, dass sie von allen Zahlenpärchen (x, y) gelöst wird, bei denen die beiden Zahlen x und y identisch sind. (Dass man einer Gleichung ihre Lösung ansieht, ist übrigens selten der Fall, weshalb es ja gerade so spannend und herausfordernd ist, Gleichungen mit mathematischen Werkzeugen zu untersuchen, um der Lösung auf die Spur zu kommen. Deshalb bringen wir unseren Kindern in der Schule erste Ansätze bei, wie man so etwas macht. Viele Gleichungen, die aus naturwissenschaftlichen Experimenten und Fragen heraus entstehen, sind sogar so ätzend kompliziert, dass Mathematiker bis heute keine Möglichkeit gefunden haben, sie exakt zu lösen, sodass sie sich zähneknirschend mit Näherungslösungen begnügen müssen, die sie vom Computer ausrechnen lassen.)

Die Gleichung

$x^2 + y^2 = 1$

ist da schon komplizierter. Wenn man Zahlenpärchen (x, y) sucht, die sie erfüllen, findet man vielleicht durch Ausprobieren (Mathematiker sagen auch gern: durch scharfes Draufschauen) eine Handvoll Lösungen, zum Beispiel das Pärchen (0, 1) oder (–1, 0), doch es gibt noch viel mehr: Auch diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen, nämlich alle Punkte (x, y) in der zweidimensionalen Zahlenebene, die auf einem Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt herum liegen.

Von solchen Gleichungen, die unendlich viele Lösungen besitzen, lassen sich unzählige finden (ich bin versucht zu sagen: unendlich viele), und Mathematiker haben bei ihrer Arbeit immer wieder mit ihnen zu tun, sodass unendliche Zahlenmengen für sie im Allge-



Unendlich viele Punkte (x, y) lösen die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$, nämlich alle, die auf dem Einheitskreis liegen. Dass ich das nicht nur einfach so behaupte, sondern es sich tatsächlich genau so verhält, können Sie sich mit dem Satz des Pythagoras vor Augen führen. In dem rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$, wobei die lange Seite, die klassischerweise mit c bezeichnet wird, hier der Radius des Kreises ist und die Länge 1 besitzt.

meinen nichts Außergewöhnliches oder Aufregendes, sondern eher etwas Alltägliches sind.

Georg Cantor wollte unendliche Zahlenmengen genauer erforschen. Es war das Jahr 1870. Kurz zuvor hatte ein Chemieprofessor aus Cantors Heimatstadt Sankt Petersburg, Dmitri Iwanowitsch Mendelejew, chemische Elemente untersucht und einen erstaunlichen Zusammenhang zwischen ihren Eigenschaften und ihrer Atommasse erkannt, der es ihm erlaubte, sie in eine übersichtliche Tabelle einzusortieren – er hatte das Periodensystem der Elemente entdeckt. Wenig später veröffentlichte auch der Oldenburger Arzt und Chemiker Julius Lothar Meyer eine solche Tabelle. Cantor hatte Ähnliches im Sinn. So, wie Mendelejew und Meyer chemische Elemente systematisch nach bestimmten Eigenschaften in ihr Periodensystem einsortiert hatten, wollte er unendliche Mengen untersuchen und anhand ihrer Eigenschaften klassifizieren, und mit den natürlichen Zahlen

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

fing er an. Die natürlichen Zahlen sind Zahlen zum Zählen. Es sind die mathematischen Objekte, die den Zahlwörtern in unserer Sprache entsprechen (eins, zwei, drei und so weiter). Sie sind irgendwann in der Urgeschichte des Menschen entstanden, und Kinder lernen sie auch heute noch als erste Zahlen kennen. Die natürlichen Zahlen benutzen wir, um Dinge zu zählen, und wir können die Zahlen addieren und multiplizieren. Natürliche Zahlen sind beispielsweise 1, 99 und 8765. -22, $\frac{3}{4}$ und $\sqrt{2}$ hingegen sind keine natürlichen Zahlen. Ob man 0 mit zu den natürlichen Zahlen zählen will oder nicht, ist übrigens Geschmackssache. Laut der DIN-Norm 5473, in der Begriffe aus der Mengenlehre geregelt werden, zählt 0 dazu; viele Mathematikerinnen und Mathematiker sehen das allerdings anders und lassen die natürlichen Zahlen erst bei 1 beginnen. Letzten Endes läuft es auf die Frage hinaus, welche Zahlenmenge man »natürlich« findet und deshalb auch so nennen möchte – die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ oder die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ –, und weil sich in der Fachwelt kein Konsens darüber einstellen mag und es im Grunde genommen auch egal ist, da es keinen großen Unterschied macht, gibt es keine einheitliche Konvention. Im Zweifelsfall muss man, wenn man mit natürlichen Zahlen hantiert, explizit mit angeben, wo sie für einen beginnen.

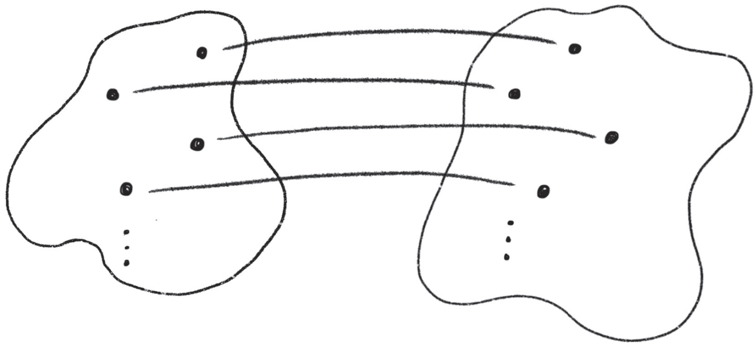
In Cantors Augen waren die natürlichen Zahlen die einfachste Form von Unendlichkeit: unendlich viele Zahlen zwar, aber immerhin übersichtlich durchnummeriert. Auch heute noch werden die natürlichen Zahlen zum Vergleich herangezogen, wenn eine unendliche Menge untersucht wird.

Dahinter steckt ein triftiger Grund. Denn will man die Größe von unendlichen Mengen untersuchen, stolpert man gleich zu Anfang über eine essenzielle Frage: Wie soll man die Größe einer unendlich großen Menge beziffern?

Mit einem solchen Problem haben wir in unserem Alltag keinerlei Erfahrung, denn erstens sind alle Mengen, die wir kennen, endlich, und zweitens nutzen wir, um ihre Größe anzugeben, die natürlichen Zahlen: Eine Kiste mit achtzehn Äpfeln hat die Mächtigkeit 18 und ein Konto mit zweitausenddreihundertfünfzehn Euros die Mächtigkeit 2315. Um die Mächtigkeit einer unendlichen Menge zu beziffern, eignen sich diese Zahlen jedoch nicht, weil jede von ihnen, und sei sie auch noch so groß, eine endliche Größe angibt. Keine einzige von ihnen beschreibt etwas unendlich Großes. Wie also will man die Größe einer unendlich großen Menge angeben?

Georg Cantor wusste sich zu helfen. Er erkannte, dass er gar keine genaue Maßeinheit brauchte, um die Größe einer unendlichen Menge zu beziffern, weil er mit einem simplen Vergleich auskam. Er gewann schon einmal Klarheit, wenn er wusste: Ist die Menge so groß wie die natürlichen Zahlen?

Vielleicht wollen Sie nun protestieren, dass wir mit Cantors Größenvergleich überhaupt nichts gewonnen haben, weil er uns just in die Schwierigkeiten bringt, denen wir ausweichen wollten. Denn wie bitte sollen wir die Frage beantworten, ob eine Menge so groß wie die natürlichen Zahlen ist, ohne die Größe der Menge und die der natürlichen Zahlen exakt angeben zu können? Sie haben recht, wir können beide Mengen nicht beziffern, doch ein Größenvergleich ist etwas anderes als die Frage nach der konkreten Größe. Auch ohne die Größe anzugeben, kann man verblüffend einfach feststellen, ob zwei Mengen gleich groß sind. Sie sind nämlich gleich groß, wenn es erstens zu jedem Element der einen Menge exakt ein Partnerelement in der anderen Menge gibt und wenn zweitens in der anderen Menge



Besitzt jedes Element in der einen Menge einen eindeutigen Partner in der anderen? Dann sind die Mengen gleichmächtig.

auch kein Element ohne Partner verbleibt. Wenn das der Fall ist, weiß man, dass beide Mengen gleich groß sind, schließlich hat jedes Element in der einen Menge genau einen Partner in der anderen.

Beim Vergleich mit den natürlichen Zahlen heißt das: Gibt es in der Menge, deren Größe wir vergleichen wollen, einen eindeutigen Partner für die 1, einen für die 2, einen für die 3, einen für die 4 und so weiter, und bleibt in der Menge auch kein Mitglied ohne Partner? Wenn das so ist, weiß man, dass diese Menge die gleiche Größe wie die natürlichen Zahlen besitzt. Wenn es also einen eindeutigen Partner für die 1 gibt, einen für die 2, einen für die 3 und so weiter, bedeutet das, es lässt sich in der fraglichen unbekannten Menge eindeutig festlegen, was hier das erste Element ist (das ist der Partner der 1), was das zweite (der Partner der 2), was das dritte ist (der Partner der 3) und so weiter, mit anderen Worten, man kann diese Menge simpel durchzählen. Mathematiker sagen dazu: »Die Menge ist abzählbar unendlich mithilfe der natürlichen Zahlen« oder einfach kurz »abzählbar unendlich« oder noch kürzer »abzählbar«. Jede Menge, die abzählbar ist, ist so groß wie die natürlichen Zahlen, das zeigt das Durchzählen ja gerade.

Diese Art zu vergleichen lieferte Cantor erstaunliche und unerwartete Erkenntnisse, was er bereits merkte, als er sich die nächste unendliche Menge vornahm, die nächsteinfache, die ihm einfiel, die sogenannten *ganzen Zahlen*:

…, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …

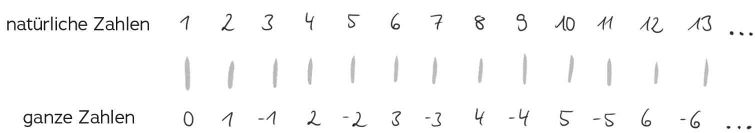
Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen ins Negative, sie sind eine Verlängerung des Zahlenstrahls nach links, das heißt ein Upgrade vom Zahlenstrahl (der bei 1 beginnt) zu einer Zahlengerade (die von 0 aus in beide Richtungen unendlich weiter läuft). Ganze Zahlen sind 99, 0 und −28. $\frac{3}{4}$ und $\sqrt{2}$ hingegen sind keine ganzen Zahlen. Ganze Zahlen zu benutzen liegt auf der Hand, wenn man versucht, natürliche Zahlen zu subtrahieren, denn das funktioniert im Allgemeinen nicht. $5-8$ oder $216-982$ kann man in den natürlichen Zahlen nicht ausrechnen, es geht schlicht nicht, weil die kleinste Zahl, die einem hier zur Verfügung steht, 1 ist, was aber in beiden Fällen als Ergebnis immer noch zu groß ist. Um nach Belieben und ohne Probleme subtrahieren zu können, müssen zusätzlich die 0 und negative Zahlen her. Die ganzen Zahlen bringen alles mit, was man braucht. Es sind Zahlen für Buchhalter. Denn während die natürlichen Zahlen Entsprechungen in unserer Alltagsrealität finden – ich habe zwei Kinder, ich kaufe 14 Äpfel, ich hebe 300 Euro ab –, hat noch niemand einen negativen Euro gesehen, dabei stehen negative Euros regelmäßig auf dem Kontoauszug.

Cantor nahm sich als Nächstes also die ganzen Zahlen vor und verglich sie mit den natürlichen Zahlen. Als Mathematiker interessierte er sich dafür, hinter die Fassade zu blicken und die Struktur zu erkennen: Was einte Mengen, und worin unterschieden sie sich? Er hielt Ausschau nach Ähnlichkeiten und Allgemeinheiten, nach Gesetzen und Gemeinsamkeiten. So, wie ein Botaniker Pflanzen in Art und Gattung einordnet und wie Mendelejew und Meyer chemische Elemente in Gruppen sortierten, wollte Cantor unendliche Mengen klassifizieren. Schon bei den ganzen Zahlen stieß er auf etwas Kurioses.

Erweitert man die Zahlen 1, 2, 3, … um die 0 und die negativen Zahlen −1, −2, −3, …, geht man also von den natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen über, hat man intuitiv den Eindruck, dass sich die Zahlenmenge dadurch verdoppelt. Doch Cantor fand heraus, dass die Menge überhaupt nicht größer wird – nicht »mehr unendlich« –, sondern just so bleibt, wie sie ist: abzählbar unendlich. Denn so, wie er die natürlichen Zahlen abzählen konnte (das war leicht: 1, 2, 3, …), konnte er auch die ganzen Zahlen in einer Reihe anordnen und abzählen (auch wenn es nicht mehr ganz so offensichtlich auf der Hand lag):

0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, …

Und etwas in einer festen, eindeutigen Reihenfolge anordnen und abzählen zu können, genau wie die natürlichen Zahlen, bedeutete: Es hat die gleiche Stufe von Unendlichkeit, die gleiche Mächtigkeit.



Jede Zahl in den natürlichen Zahlen besitzt genau einen Partner in den ganzen Zahlen – und umgekehrt. Also sind beide Zahlenmengen gleichmächtig.

Cantor hatte entdeckt, dass die ganzen Zahlen – die Menge aus allen positiven und negativen Zahlen und der Null – unendlich sind, und zwar kurioserweise von der gleichen Größenordnung wie die Menge der natürlichen Zahlen alleine. Unendlich plus unendlich war offensichtlich immer noch unendlich, zumindest in diesem Fall:

$\infty + \infty = \infty$

Es war ein absurdes Ergebnis. Die Rechenregeln, die für normale Zahlen galten, schienen für unendliche Mengen außer Betrieb zu sein.

ACHTUNG, SIE BETRETEN DIE NERD-ZONE.

Bevor mir die halbe Mathematik-Community an die Gurgel springt, muss ich schnell etwas richtigstellen. Ich habe Ihnen soeben eine Situation vorgeführt, in der unendlich plus unendlich immer noch unendlich ist, und das Ganze dann durch die Formel

$\infty + \infty = \infty$

ausgedrückt. Allerdings müssen Sie wissen, dass das mathematisch fahrlässig ist, man könnte sogar sagen falsch, weil das Symbol ∞ in der Mathematik zwar für die Unendlichkeit steht, aber in einem etwas anderen Sinn.

Der englische Mathematiker John Wallis hat das Symbol 1655 als Erster für die Unendlichkeit benutzt. Er arbeitete als Geistlicher in London und machte sich während des Englischen Bürgerkriegs einen Namen, indem er chiffrierte Geheimbotschaften entschlüsselte. Wahrscheinlich als Anerkennung für diese Leistungen erhielt er eine Professur für Geometrie an der Oxford University, doch das war für die ehrwürdige Universität kein so herbes Schicksal, wie es aussehen mag, denn Wallis besaß tatsächlich Talent für Mathematik. Er wurde zu einem Pionier der Infinitesimalrechnung und Vorläufer von Isaac Newton. 1655 untersuchte er Kegelschnitte und schrieb in einem Buch dazu:

> Zum Anfang nehme ich […] an, dass jede flache Figur aus unendlich vielen parallelen Linien zusammengesetzt ist: Oder vielmehr (was ich bevorzuge) aus unendlich vielen Parallelogrammen gleicher Höhe; jede einzelne dieser Höhen mache $\frac{1}{\infty}$ der Gesamthöhe, oder auch einen unendlich kleinen Anteil, aus (hierzu bezeichne ∞ eine unendlich große Zahl;) daher ist die Höhe aller zusammengenommen gleich der Höhe der Figur.[8]

Wie Wallis darauf gekommen ist, die Unendlichkeit mit dem Symbol ∞ zu bezeichnen, verrät er leider nicht, man kann nur spekulieren. Es gibt allerdings einige plausible Überlegungen. Erstens kann man sich bildlich vorstellen, wie die Schleife ein ums andere Mal durchlaufen wird, ohne Ende. Zweitens war das Symbol in der Mathematik noch nicht belegt (anders als die Symbole 8 oder 0, die man ja auch ein ums andere Mal durchlaufen könnte, die aber schon etwas anderes bedeuten). Drittens könnte das Zeichen eine zusammengezogene Schreibweise, eine Ligatur, aus der römischen Zahlschrift sein; die Zahl 1000 wurde dort nämlich nicht nur durch M dargestellt, sondern auch durch den griechischen Buchstaben Φ, und den notierte man auch als CIↃ oder CD. Man kann sich vorstellen, dass daraus schnell ∞ wurde, wenn man es eilig hatte und flüssig schrieb, so wie auch aus »et« ein & wurde. Und die Idee, für die Unendlichkeit ein

Zeichen zu verwenden, das für eine sehr große Zahl steht, ist nicht völlig absurd.

Das Symbol ∞ setzte sich in der Mathematik als Zeichen für die Unendlichkeit durch, allerdings für das potenziell Unendliche, also einen endlos wachsenden Vorgang, wie er etwa beim Integrieren vorkommt, wo man die Fläche unter einer Kurve berechnet, indem man sie näherungsweise in Rechtecke aufteilt und diese aufsummiert, diese Rechtecke aber immer kleiner und feiner werden lässt, ohne Ende, sodass die Summe dieser potenziell unendlich vielen, unendlich kleinen Rechtecke das tatsächliche Flächenmaß liefert.

Das, was Cantor betrachtete, ist aber gerade eben kein potenzielles Unendlich, sondern ein aktuales, da sich die Frage, wie mächtig eine unendliche Menge ist, nicht um den fortlaufenden Prozess des Anwachsens dreht, sondern um die vollendete Unendlichkeit. Man sollte also ein anderes Symbol als ∞ für die Unendlichkeit der Menge verwenden.

Georg Cantor wählte das Symbol $\aleph_0$, das »Aleph null« gesprochen wird, für die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. Wenn man nun die positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, … (Mächtigkeit: $\aleph_0$) und die negativen ganzen Zahlen –1, –2, –3, … samt 0 (Mächtigkeit: ebenfalls $\aleph_0$) zusammennimmt, erhält man eine Menge, die immer noch abzählbar ist (Mächtigkeit: immer noch $\aleph_0$). Das kann man nun völlig korrekt so schreiben:

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

Weil das Symbol ∞ allerdings auch außerhalb der Mathematik als Zeichen für die Unendlichkeit verstanden wird und das Aleph vermutlich nicht, habe ich mich entschlossen, in diesem Buch ∞ auch für aktuale Unendlichkeiten zu verwenden.

Unendlich plus unendlich ist immer noch unendlich. Es bestand kein Zweifel, Cantors Überlegung war stichhaltig. Er hatte nachgewiesen, dass die ganzen Zahlen genau so mächtig waren wie die Hälfte von ihnen alleine, und damit hatte er insbesondere gezeigt, dass das Rechnen mit unendlich großen Mengen anders funktioniert als mit endlichen Zahlen.

Doch so verblüffend und unerwartet diese Einsicht auch sein mochte – Cantor war bloß auf die Spitze des Eisbergs gestoßen. Unter der diffusen und ruhigen Oberfläche der Unendlichkeit wartete eine reiche und faszinierende Welt, und er war dabei, sie nach und nach zu entdecken.

ACHTUNG, SIE BETRETEN DIE NERD-ZONE.

Die ganzen Zahlen …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … wirken in ihrer Schlichtheit vielleicht primitiv, denn schon auf jedem Kassenbon und in jedem Onlineshop finden Sie mit den Kommazahlen komplexere Objekte. Doch der Eindruck täuscht: Obwohl sie karg und plump aussehen und es scheint, sie seien höchstens noch für Schulkinder interessant, stecken die ganzen Zahlen voller Rätsel und bilden nicht umsonst seit der Antike einen eigenen Zweig in der Mathematik, die *Zahlentheorie*. Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß, der wegen seiner außergewöhnlichen wissenschaftlichen Leistungen als »Fürst der Mathematiker« gilt, schätzte die Bedeutung der Zahlentheorie, die er Arithmetik nannte, so ein:

> Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik.[9]

In der Zahlentheorie geht es darum, die Eigenschaften natürlicher und ganzer Zahlen zu ermitteln. Zum Beispiel fragten sich Wissenschaftler schon in der Antike, welche rechtwinkligen Dreiecke es gibt, deren Seiten alle eine ganzzahlige Länge besitzen. In rechtwinkligen Dreiecken gilt der Satz des Pythagoras,

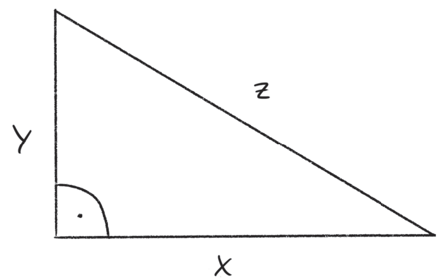
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wobei a und b die beiden Seiten des Dreiecks sind, die am rechten Winkel anliegen, c die Seite, die ihm gegenübersteht. Man kann die Frage also auch in folgender Formel ausdrücken: Welche natürlichen Zahlen (x, y, z) lösen die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2?$$

Satz des Phythagoras:

$$x^2 + y^2 = z^2$$



Der Satz des Pythagoras gilt in allen flachen Dreiecken mit einem rechten Winkel. Aber wie viele solcher Dreiecke gibt es, bei denen die drei Seitenlängen ganze Zahlen sind? Ein solches Dreieck hat die Seitenlängen 3, 4 und 5. Gibt es noch mehr?

Gesucht sind Zahlen aus der Menge 1, 2, 3, 4, …, die man für x, y und z einsetzen kann, sodass die Gleichung stimmt. Probieren Sie mal, ob Sie Lösungen finden! Vielleicht erkennen Sie, dass das Zahlentripel (3, 4, 5) passt. Vielleicht rechnen Sie auch sehr gerne im Kopf oder haben Spaß mit dem Taschenrechner, dann kommen Sie womöglich noch auf (5, 12, 13). Aber dann? Gibt es noch weitere Lösungen? Und wenn ja, wie viele? Auf einer babylonischen Tontafel, die um 1700 v. Chr. beschrieben wurde und bis heute erhalten geblieben ist, kann man eine ganze Handvoll solcher Zahlentripel entdecken, unter anderem die Lösung (12709, 13500, 18541). Offensichtlich interessierten sich die Babylonier bereits rund eintausend Jahre vor Pythagoras für solche Dreieckszahlen und hatten auch die Möglichkeiten und die Muße, sie auszurechnen. Heute wissen wir, dass es unendlich viele dieser sogenannten *pythagoreischen Zahlentripel* gibt, also Grüppchen von je drei natürlichen Zahlen, die als Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks vorkommen.

Von einer so einfachen geometrischen Frage bis zu einer, die vielen Mathematikern über Jahrhunderte hinweg Kopfzerbrechen bereitete und als eines der schwierigsten Rätsel der Mathematikgeschichte galt, ist es in der Zahlentheorie nur ein kleiner Schritt. Es gibt zwar unendlich viele pythagoreische Zahlentripel, doch wie viele Lösungen gibt es für die gleiche Gleichung mit einem höheren Exponenten? Also wie viele natürliche Zahlen (x, y, z) kann man finden, die die Gleichung

$$x^3 + y^3 = z^3$$

oder die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4$$

oder die Gleichung

$$x^{13} + y^{13} = z^{13}$$

lösen? Die Frage lautet, ganz allgemein formuliert: Welche Zahlen (x, y, z) lösen die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n,$$

wobei n eine natürliche Zahl größer als 2 ist? Um 1670 vermutete der französische Jurist und Mathematiker Pierre de Fermat, dass es keine solchen Zahlen gibt, es mit anderen Worten also unmöglich ist, eine Kubikzahl als Summe zweier anderer Kubikzahlen auszudrücken und generell eine höhere Potenz als Summe zweier ebenso hoher Potenzen. Er glaubte, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit ganzen Zahlen unlösbar ist, wenn n größer als 2 ist, und schrieb an den Rand eines Buches:

> Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.[10]

Diese kurze Notiz forderte die Neugier unzähliger Mathematiker heraus, und sie stürzten sich nach Fermats Tod in die Aufgabe, seine Vermutung zu belegen und diesen wunderbaren Beweis zu finden. Doch selbst die bedeutendsten von ihnen scheiterten. Es dauerte über dreihundert Jahre, bis die Frage 1994 geklärt werden konnte. Fermats Vermutung und wie sie gelöst wurde, ist eines der markantesten Beispiele für die Komplexität der Mathematik und dafür, wie viel Blut, Schweiß und Tränen die Lösung selbst kleiner, kurzer

Fragen fordern kann. Gleichungen wie $x^n + y^n = z^n$, in denen nur ganze Zahlen vorkommen, haben sich als überraschend knifflig herausgestellt, und so tauchen sie auch auf der berühmtesten Problemliste der Mathematik auf. Wir werden auf diese Liste noch zu sprechen kommen, die in der Geschichte der Unendlichkeit einen zentralen Platz einnimmt.

Faszinierend an der Zahlentheorie ist nicht nur, dass ihre Rätsel bisweilen simpel aussehen, sondern auch, dass sie von ihrem Beginn in der Antike an bis ins 17. Jahrhundert hinein eine Disziplin war, die sich ausschließlich um Eigenschaften der ganzen Zahlen drehte. Sie schien keinerlei Berührungspunkte zu anderen mathematischen Bereichen zu haben, bis sich jedoch herausstellte, dass die ganzen Zahlen auf wundersame und filigrane Weise mit vielen anderen Gebieten der Mathematik verwoben sind. So zeigte sich, dass viele zahlentheoretische Fragen beantwortet oder zumindest tiefgreifend analysiert werden können, wenn man moderne Methoden der Analysis und Funktionentheorie zu Hilfe nimmt oder wenn man die Fragen vom Reich der ganzen Zahlen in andere Welten überträgt, das Problem dort bearbeitet und wieder zurücktransformiert. Komische Funktionen, die im dichten Kontinuum der reellen Zahlen lebten, verrieten plötzlich etwas über ganze Zahlen, die wie karge Inseln versprengt und einsam in diesem Kontinuum schwammen. So lässt sich beispielsweise abschätzen, wie viele Primzahlen in einem bestimmten Zahlenbereich liegen, wenn man die beiden reellen Funktionen x und log x, das heißt die Gerade und den natürlichen Logarithmus, benutzt: Denken Sie sich eine beliebige reelle Zahl x, dann finden sich unterhalb dieser Grenze x etwa $\frac{x}{\log(x)}$ Primzahlen. Es besteht also, tief in der Struktur der Zahlen, ein versteckter Zusammenhang zwischen der Gerade $y = x$, der Logarithmusfunktion $y = \log x$ und der Dichte der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, … Mathematikerinnen und Mathematiker, die sich für handfeste Eigenschaften ganzer Zahlen interessierten, wie sie sich aus einer simplen Gleichung ergaben, hatten es ab dem 17. Jahrhundert plötzlich mit Algebra, Topologie, Analysis, Funktionentheorie und Darstellungstheorie, ja sogar mit Statistik zu tun. Und mit dem Aufkommen von Computern und Internet rückte die Zahlentheorie unversehens von einer abstrakten Spielwiese, auf der sich Mathematiker an reinen, theoretischen Problemen austoben konnten, in den Alltag, denn just die anwendungsfernen Primzahlen sind die Hauptakteure bei der sicheren Datenübertragung im Internet, ob beim Onlinebanking oder bei E-Mails.

Ganze Zahlen sind kompliziertere Objekte, als man denkt. Wir zählen mit ihnen, wir rechnen mit ihnen – aber was genau sind sie eigentlich? Die Frage scheint banal zu sein, aber versuchen Sie doch mal zu erklären, was die Zahl 7 ist! Ich schätze, Sie werden ordentlich ins Schlingern kommen, weil Sie zwar glauben, es genau zu wissen, weil Sie sicherlich auch im Gefühl haben, was 7 bedeutet, und weil Sie zahlreiche Beispiele von sieben Dingen nennen können, ob nun sieben Wochentage oder sieben Zwerge, aber was genau die Zahl 7 ist, werden Sie ohne Beispiele vermutlich nicht eindeutig und unmissverständlich beschreiben können. Diese Schwierigkeit haben auch Mathematiker erkannt, mit Unbehagen, und erst 1889 konnten sie Abhilfe schaffen und eine handfeste Definition finden, was die natürlichen und ganzen Zahlen, mit denen Menschen seit vielen Tausend Jahren rechnen, genau sind. Ein unabdingbares Hilfsmittel dabei war Georg Cantors Mengenlehre. Wir werden uns die verblüffend schwierige Frage, was die natürlichen und ganzen Zahlen sind, und auch die Antwort, die Mengen ins Spiel bringt, später im Detail anschauen.

5

Ein genialer Trick

Beim Vergleichen unendlicher Mengen hatte Georg Cantor etwas Sonderbares herausgefunden: Es gibt unendlich viele ganze Zahlen

…, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …,

und zwar genau so viele, wie es natürliche Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

gibt. Die ganzen Zahlen sind gewissermaßen genauso viele wie die Hälfte von ihnen allein. (Lassen Sie sich diese Erkenntnis in Ruhe durch den Kopf gehen! Ist sie nicht aufregend?) Es war absurd und gleichzeitig ohne Zweifel richtig, denn man kann die ganzen Zahlen in einer Reihenfolge anordnen und durchnummerieren wie die natürlichen Zahlen, und damit gehören sie zur gleichen Stufe von Unendlichkeit.

Cantor fragte sich nun, ob es auch eine höhere Stufe von Unendlichkeit gibt, das heißt, ob es eine Menge gibt, die unendlich viele Elemente enthält, die aber irgendwie mehr ist als abzählbar, und er nahm sich die *Brüche* vor. Sie sind ein heißer Kandidat für eine höhere Stufe von Unendlichkeit, denn Brüche scheint es wesentlich mehr zu geben als natürliche Zahlen.

Brüche sind Allrounder. Im Alltag werden Sie keine anderen Zahlen benötigen, was auch immer Sie mit Zahlen tun, denn Brüche decken alles ab. Es mag für Sie vielleicht jetzt noch nicht so aussehen, aber warten Sie ab, Sie werden mir gleich zustimmen.

Ein Bruch ist ein Verhältnis

$$\frac{a}{b}$$

zweier ganzer Zahlen a und b, zum Beispiel $\frac{1}{4}$ oder $\frac{22}{7}$. Der Bruch $\frac{1}{4}$ bedeutet, dass etwas in vier gleich große Teile aufgespalten wird, und von diesen vier gleichen Teilen wird nur einer betrachtet; wir haben es also mit dem Verhältnis »1 von 4« zu tun. Der Bruch $\frac{22}{7}$ bedeutet, dass man mit gleich großen Anteilen der Größe $\frac{1}{7}$ arbeitet, und von diesen Bruchteilen werden 22 betrachtet; hier ist also das Verhältnis