Vorwort

Die Differentialgleichung (DG) stellt ein unverzichtbares Werkzeug der mathematischen Modellierung in den Naturwissenschaften dar. Sie wird herangezogen, wenn man die Änderung physikalischer Größen in Relation zueinander oder zu anderen Größen setzen kann. Viele Naturgesetze werden über eine DG formuliert und führen erst über Rand- und Anfangsbedingungen zu speziellen Lösungen oder Formeln. Die Entscheidung darüber, ob man die Änderung einer Größe oder die Größe selbst betrachtet, wird über die Mess- oder Nichtmessbarkeit der Größe gefällt. Beispielsweise ist die Anzahl radioaktiver Kerne in einem Präparat schwer zu bestimmen, weshalb man die zeitliche Änderung der Aktivität misst, um auf diese Weise auf die Änderung der radioaktiven Kernanzahl zu schließen. Bei der Vermehrung von Bakterien hingegen wäre die Messung der Bakterienzahl direkt möglich, was aber nicht daran hindert, ihre Zu- oder Abnahme mit Hilfe einer DG zu beschreiben.

In den Naturwissenschaften ist man mit dem generellen didaktischen Problem konfrontiert, wie ein Sachverhalt zuerst in Worten der natürlichen Sprache formuliert und danach derart in die formale Sprache der Mathematik oder Informatik übersetzt werden soll, dass dieser Prozess nachvollziehbar und verständlich bleibt. Es gilt eine Brücke zwischen diesen beiden Sprachen zu schlagen. Ein möglicher Ansatz besteht darin, eine zielführende Frage zu stellen. Beispielsweise werden Optimierungsfragen der Mathematik wegweisend mit der Frage, welche Größe extremal werden soll, beantwortet. In der Kombinatorik wiederum sind zwei Fragen entscheidend: Ist die Reihenfolge wesentlich und sind Wiederholungen gestattet? Bei magnetischen Phänomenen drängt sich als Eingangsfrage womöglich die Suche nach den magnetischen Polen auf usw. Betrachtet man nun eine DG, so mag einigen die Struktur derselben, bestehend aus infinitesimalen Größen, nur eine lästige Etappe auf dem Weg zum Ziel, nämlich der Lösung dieser DG, darstellen. Schließlich drückt die Lösung oder Formel die Abhängigkeit der in ihr enthaltenen Größen aus und ist, was die Anwendung betrifft, das Maßgebende. Meine Überzeugung ist es hingegen, dass eine solche, reduzierte Sichtweise das Hauptsächliche unterschlägt, nämlich die Frage, welche Annahmen dem ermittelten Gesetz überhaupt vorangingen und unter welchen Voraussetzungen es Gültigkeit besitzt. Unter diesem Blickwinkel wird man also, nicht nur aus praktischen Gründen, unweigerlich auf die zugehörige DG, insbesondere deren Ausgangspunkt, die Bilanzgleichung, zurückgeworfen. Eine solche Bilanz kann beispielsweise eine Längen-, Massen-, Stoffmengen-, Impuls-, Kräfte-, Energie-, Drehmoment-, Leistungsbilanz usw. darstellen. Dabei kann die Bilanz selbst an einem infinitesimal kleinen Element oder in einem gedachten Kontrollbereich stattfinden. In dieser Bilanz steckt aber genau das Wesentliche: Man erkennt das verwendete Modell (z. B. ideales oder reales Gas), das zugrundeliegende System (offen, geschlossen oder abgeschlossen), die Vernachlässigung einer Größe gegenüber einer anderen (z. B. Rei-

https://doi.org/10.1515/9783110737981-201

bungskraft gegenüber Gewichtskraft), die Vereinfachung einer Größe (z. B. konstante Dichte) oder Ähnliches.

Eine DG ist eine Gleichung und somit eine Bilanz. Deshalb rücken wir die folgende Leitfrage in den Fokus: «Die Änderung welcher Größe soll mit Hilfe einer DG am infinitesimalen Element bilanziert werden?». Auf diese Weise wird die Rolle der DG als Bilanz neu definiert: Sie bildet den Ausgangspunkt zur Erfassung des Sachverhalts und hat zum Ziel, Theorie und Praxis als eine Einheit zu begreifen, um auf diese Weise ein tieferes Verständnis für das gestellte Problem zu erlangen. Nicht zuletzt sollte der wiederholte Umgang mit DGen dem Leser und der Leserin die zentrale, themenübergreifende Bedeutung dieser Gleichungen bei der Beschreibung von Naturvorgängen zuteilwerden lassen. Es ist deshalb zwingend, dass auf die Herleitungen besonderen Wert gelegt werden muss, weil diese mit den angesprochenen Bilanzen einhergehen. Leider wird vom Autor immer wieder beobachtet, dass Lehrmittel bei der Herleitung die Voraussetzungen und getroffenen Vereinfachungen nicht klar und ersichtlich herausschälen, was es für die Studentin und den Studenten erschwert, das Ergebnis zu relativieren und dessen Anwendungsbereich klar abzustecken und einzugrenzen.

Aus diesem Grund verfährt dieser Band nach einem einheitlichen und nachvollziehbaren Muster, indem konsequent jeder Herleitung zuerst allfällige Idealisierungen und Einschränkungen inklusive Begründung oder Zulässigkeit vorangestellt werden. Damit ist sich die Leserin und der Leser immer im Klaren darüber, unter welchen Voraussetzungen die Bilanz geführt wird.

Dieser Gesamtband basiert auf den sechs Einzelbänden mit gleichnamigem Titel. Einige weiterführende Kapitel sowie den gesamten Übungsteil habe ich weggelassen. Im Gegenzug sind einerseits die bestehenden Kapitel durch weitere praktische Aspekte erweitert und zweitens die schon vorhandenen Fallbeispiele um zusätzliche ergänzt worden und erfassen damit eine breite Palette verschiedenster Anwendungsbereiche. Jedes Beispiel ist als Aufgabe mit konkreten Fragestellungen formuliert und jede Teilaufgabe wird in nachvollziehbaren Schritten vollständig durchgerechnet. Damit sind Voraussetzungen und Ergebnisse klar voneinander getrennt. Folgen einer Bilanzierung langwierige algebraische Umformungen, so sind diese verkürzt dargestellt. Des Weiteren wird die Reihenfolge der Inhalte aus den Einzelbänden fast gänzlich beibehalten. Die vielfältigen Lotka-Volterra-Modelle einschließlich der sie beschreibenden autonomen DGen aus Band 1 werden hingegen in diesem Gesamtband nicht aufgegriffen. Das theoretische Gerüst dieser Modelle ist ziemlich umfangreich und zudem sind die Lösungen der zugehörigen DGen nur numerisch ermittelbar.

Dieser Gesamtband verfolgt das Ziel, zu jeder DG eine klassische Lösung (stetig differenzierbar gemäss dem Grad der DG) anzugeben. Schwache Lösungen werden hier nicht betrachtet und demzufolge kommt das Konzept der Finite-Element-Methode nicht zum Einsatz.

Obwohl Anwendungspakete existieren, die das numerische Lösen von DGen als Werkzeug beinhalten, ist es der Anspruch dieser Bandreihe, sämtliche notwendigen Programme für eine Simulation mit einem TI-nspire CX CAS niederzuschreiben. Dabei soll allein das Euler-Verfahren zum Einsatz kommen (vgl. Kapitel 6), damit die Rekursionsvorschriften nachvollziehbar bleiben. Die Leserin und der Leser möge bei Interesse die Programme und deren Ergebnisse mit der eigenen Software vergleichen.

Das Erstaunliche an einer DG bleibt, dass die Entscheidung darüber, welches Verhalten eine Größe im «Großen» zeigt, im «Kleinen» gefällt wird.

Beim Verlag Walter de Gruyter möchte ich mich herzlich für die bisherige Zusammenarbeit und die Möglichkeit zu diesem Gesamtband bedanken.

Basel, Februar 2022 Adriano Oprandi