Mathematik
FOS-Vorkurs

M. Schittenhelm

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co.KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten
Europa-Nr. 80444

Autor:

Schittenhelm, Michael Hof

Lektorat:

Dillinger, Josef

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Bildquellenverzeichnis:

Adobe Systems Software, Ireland Ltd., Adobe Stock, Dublin, Irland: S. 5/1 © photoschmidt,
S. 69/1 © PrettyVectors, S. 122/1 © pics721, S. 124 © niroworld

1. Auflage 2022
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-7585-8044-4

Satz: Schriftsatz Frauke Moritz, Ahrensburg
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald unter Einsatz des Bildes (c) Vasilius – stock.adobe.com
Druck: Himmer GmbH, 86167 Augsburg

Vorwort

Das Ziel des FOS-Vorkurses ist besonders qualifizierten Schülerinnen und Schülern der Mittelschule und der Wirtschaftsschule an das Niveau der 11. Jahrgangsstufe der Fachoberschule heranzuführen. Dafür erhalten einige Schülerinnen und Schüler der Abschlussklassen der genannten Schulen während ihres letzten Schuljahres an der Mittel- oder Wirtschaftsschule nachmittags oder samstags zusätzlichen Unterricht in Deutsch, Englisch und Mathematik an einer Fachoberschule. Laut Lehrplan werden im Fach Mathematik in diesem Kurs insbesondere das grundlegende Rechenwissen, wie beispielsweise Bruchrechnen, elementare Termumformungen und Rechnen mit Potenzen wiederholt. Außerdem werden lineare und quadratische Funktionen behandelt. In diesem Arbeitsbuch sind alle Unterrichtsinhalte gemäß dem Lehrplan im Fach Mathematik enthalten.

Prinzipieller Aufbau des Arbeitsbuches

Dieses Arbeitsbuch ist prinzipiell so konzipiert, dass auf wenigen Seiten die wichtigste Theorie mit Beispielaufgaben zu jedem behandelten mathematischen Themenbereich kompakt dargestellt ist. Anschließend sind zahlreiche Aufgabe abgedruckt, die von den Schülerinnen und Schülern eigenständig bearbeitet werden können.

Wiederholung der theoretischen Lerninhalte

Beim Erstellen dieses Arbeitsbuches wurde darauf geachtet, dass die Theorie zu den Lerninhalten kurz, knapp und übersichtlich darstellt wird, da die Schülerinnen und Schüler diese Theorie bereits kennen sollten. Aus diesem Grund wurde auf umfassende Herleitungen bzw. auf tiefgreifende theoretische Erklärungen verzichtet.

Fokus auf Übungsaufgaben

Das Hauptaugenmerk bei diesem Arbeitsbuche liegt auf den Beispielaufgaben und den Übungsaufgaben. Zu jedem wichtigen mathematischen Lerninhalt gibt es eine Beispielaufgabe mit Lösungsweg. Im Anschluss wird eine Vielzahl von Übungsaufgaben angeboten, die die Schülerinnen und Schüler eigenständig bearbeiten können. Es ist allgemein bekannt, dass man Mathematik nur erlernt, wenn man nach dem Verstehen der grundlegenden Theorie, zahllose Aufgaben eigenständig rechnet und somit die einzelnen Rechenfertigkeiten einübt.

Die Autoren Winter 2021/2022

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenmengen und Rechenoperationen

Geschichtliches

In der gesamten Menschheitsgeschichte wurden Zahlen verwendet, um Gegenstände abzuzählen **(Bild 1)**. In der Steinzeit etwa wurden Steine, Knochen oder Kerben zum Zählen verwendet. Dabei repräsentierte jeder Stein, jeder Knochen oder jede Kerbe die Zahl Eins.

Diese einfache Darstellung von Zahlen war zur damaligen Zeit zweckmäßig und ausreichend nützlich, um Abzählprozesse durchzuführen. Mit dem Voranschreiten der Menschheit und der kontinuierlichen Erweiterung des mathematischen Wissens wurde diese primitive Vorstellung einer Zahl zu komplexen Zahlensystemen bzw. Zahlenmengen fortlaufend weiterentwickelt. Gerade auf den Zahlenmengen, die im Folgenden betrachtet werden, basieren eine Vielzahl von Rechenoperationen.

Bild 1: Kerben zum Zählen

1.1 Zahlenmengen

In der Schulmathematik sind vier Zahlenmengen von zentraler Bedeutung:

- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Die **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ umfassen alle Zahlen, die zum Abzählen von Objekten benötigt werden. Explizit zu erwähnen ist, dass die Zahl 0 zur Menge der natürlichen Zahlen gehört.

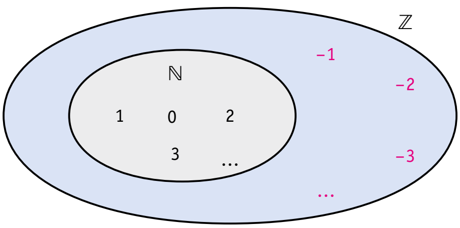
Menge der natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lautet: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$

Addiert man zwei natürliche Zahlen so erhält man stets eine natürliche Zahl. Bei der Subtraktion zweier natürlicher Zahlen muss das nicht zwingend gelten (z. B. 5 – 7). Damit diese Rechenoperation durchführt werden kann, müssen die natürlichen Zahlen um ihre Gegenzahlen erweitert werden. Die natürlichen Zahlen und ihre Gegenzahlen ergeben insgesamt die Zahlenmenge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$.

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

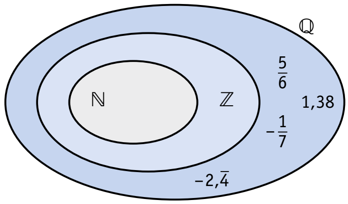
Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ besteht aus allen natürlichen Zahlen und den Gegenzahlen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.



Werden ganze Zahlen addiert, subtrahiert oder multipliziert erhält man stets wiederum eine ganze Zahl. Dividiert man zwei ganze Zahlen, so muss das Ergebnis nicht zwingend eine ganze Zahl sein (z. B. $-2:3$). Um sicher Divisionen mit ganzen Zahlen darstellen zu können, ist es notwendig die ganzen Zahlen um Bruchzahlen zu erweitern. Als Bruchzahlen werden alle Zahlen verstanden, die als Bruch dargestellt werden können. Darunter zählen auch alle endlichen und unendlich periodischen Dezimalzahlen wie beispielsweise 1,2 bzw. $1{,}5\overline{6}$. Die Zahlenmenge, die aus allen ganzen Zahlen und allen Bruchzahlen besteht, wird als Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

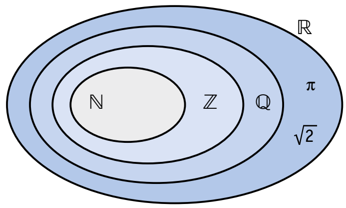
Die Menge der rationalen Zahlen besteht aus allen ganzen Zahlen, den Bruchzahlen und den Dezimalenzahlen, die sich als Bruchzahl darstellen lassen.



Neben den rationalen Zahlen gibt es die sogenannten irrationalen Zahlen. Das sind alle Zahlen, die unendlich, nicht periodisch sind und sich somit nicht als Bruch darstellen lassen. Die klassischen Beispiele für irrationale Zahlen sind π und $\sqrt{2}$. Die Zahlenmenge aller rationaler und irrationaler Zahlen wird als Menge der **reeller Zahlen** $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die Menge der reellen Zahlen umfassen die rationalen und irrationalen Zahlen.



Beispiele zu Zahlenmengen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Eine Menge Natürlicher Zahlen sind z. B. die Anzahl der Menschen in einem Land oder die Gesamtzahl der Erdbevölkerungen.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Wird die Temperatur ganzzahlig in Celsius gemessen, so müssen die Natürlichen Zahlen um negative erweitert werden, damit Temperaturen unter Nullgrad angegeben werden können.

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Wird die Temperatur nicht nur ganzzahlig gemessen, sondern in Bruchteilen eines ganzen, so muss der Zahlenkörper der Ganzen Zahlen um die Bruchzahlen erweitert werden.

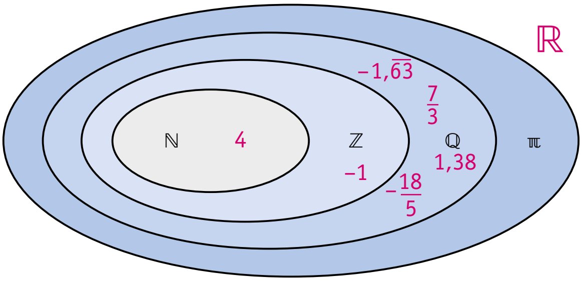
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Zur Kreisflächenberechnung ist die irrationale Kreiszahl Pi erforderlich, die weder als endliche noch eine periodische Dezimalzahl dargestellt werden kann.

Aufgaben

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl.

2. Ordnen Sie die Zahlen -1, $\frac{7}{3}$, 4, $-\frac{18}{5}$, π und $1,\overline{63}$ im folgenden Diagramm passend an.



3. Geben Sie je ein Beispiel zu den Zahlenmengen an.

1.2 Grundlegende Rechenoperationen

Auf Grundlage der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division vollständig definiert.

1.2.1 Grundrechenart Addition

Eine Addition stellt eine Rechenoperation dar, bei der zwei oder mehrere sogenannte Summanden mit dem Rechenzeichen »+« verbunden werden. Der Term 1. Summand + 2. Summand wird als Summe bezeichnet. Das Ergebnis einer Addition nennt man Summenwert.

Addition

Bei der Rechenart Addition werden zwei Summanden mit dem Rechenzeichen »+« verbunden. Der zugehörige Term wird als Summe bezeichnet. Das Ergebnis einer Addition heißt Summenwert.

$$\text{Addition: } \underbrace{1.\text{Summand} + 2.\text{Summand}}_{\text{Summe}} = \text{Summenwert}$$

Bei der Addition gelten das Kommutativ- (Vertauschungsgesetz) und Assoziativgesetz.

Kommutativgesetz der Addition

Bei der Addition gilt das Kommutativgesetz. Dieses besagt, dass bei einer Addition der erste und zweite Summand vertauscht werden können.

Für zwei beliebige Zahlen a und b $(a, b \in \mathbb{R})$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Zahlenbeispiele: Kommutativgesetz der Addition

$$5 + 4 = 4 + 5 = 9$$

$$5 + 2 + 3 = 3 + 2 + 5 = 10$$

Assoziativgesetz der Addition

Das Assoziativgesetz der Addition sagt aus, dass für beliebige Zahlen a, b und c $(a, b, c \in \mathbb{R})$ gilt:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Zahlenbeispiele: Assoziativgesetz der Addition

$$5 + 4 + 1 = 5 + (4 + 1) = 5 + 5 = 10$$

$$97 + 3 + 45 + 5 = (97 + 3) + (45 + 5) = 100 + 50 = 150$$

Aufgabe

Addieren Sie die Zahlen 98, 4, 46 und 2 geschickt im Kopf. Erklären Sie, wie Ihnen bei dieser Addition das Kommutativ- und das Assoziativgesetz helfen kann.

1.2.2 Grundrechenart Subtraktion

Eine Subtraktion stellt eine Rechenoperation dar, bei der zwei Terme mit einem Minuszeichen (–) verknüpft werden. Der Term links des Minuszeichens wird Minuend genannt und der Term rechts des Minuszeichens wird als Subtrahend bezeichnet. Der Term Minuend – Subtrahend heißt Differenz.

Subtraktion

Bei der Rechenart Subtraktion werden der Minuend und der Subtrahend mit dem Rechenzeichen »–« verbunden. Der zugehörige Term wird als Differenz bezeichnet. Das Ergebnis einer Subtraktion nennt man Differenzwert.

$$\text{Subtraktion: } \underbrace{\text{Minuend} - \text{Subtrahend}}_{\text{Differenz}} = \text{Differenzwert}$$

Anmerkung: Bei der Subtraktion gelten nicht das Kommutativ- und Assoziativgesetz.

Auflösen einer Minusklammer

Ist der Subtrahend eine Summe oder eine Differenz, so muss dieser in Klammern gesetzt werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Minusklammer. Ein Minusklammer wird aufgelöst, indem alle Vorzeichen in der Klammer gedreht werden.

Minusklammer: $a - (+b + c)$

Auflösen der Minusklammer: $a - (+b + c) = a - b - c$

Aufgabe

Es liegt Ihnen folgender Rechenweg vor. Beschreiben Sie den Fehler.

$$10 - (7 - 3) = 10 - 7 - 3 = 0$$

1.2.3 Grundrechenart Multiplikation

Eine Multiplikation stellt eine Rechenoperation dar, bei der zwei sogenannte Faktoren mit einem Malpunkt ($\cdot$) verknüpft werden. Der Term 1. Faktor $\cdot$ 2. Faktor wird Produkt genannt. Das Ergebnis einer Multiplikation heißt Produktwert.

Multiplikation

Bei der Rechenart Multiplikation werden zwei Faktoren mit dem Rechenzeichen »·« verbunden. Der zugehörige Term wird als Produkt bezeichnet. Das Ergebnis einer Multiplikation nennt man Produktwert.

$$\text{Multiplikation: } \underbrace{1.\,\text{Faktor} \cdot 2.\,\text{Faktor}}_{\text{Produkt}} = \text{Produktwert}$$

Bei einer Multiplikation gilt das Kommutativ- und Assoziativgesetz sowie folgende Vorzeichenregel.

Vorzeichenregel beim Multiplizieren

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt:

1. $(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b$
2. $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$
3. $(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$
4. $(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$

Zahlenbeispiele: Vorzeichenregel

$(-5) \cdot 4 = -20$

$(-1) \cdot 4 \cdot (-7) = 28$

$-2 \cdot (-3) = 6$

$10 \cdot 2 \cdot (-6) = -120$

Kommutativ- und Assoziativgesetz bei der Multiplikation

Bei der Multiplikation gilt das Kommutativ- und Assoziativgesetz. Das bedeutet, dass für alle Zahlen a und b gilt:

Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Zahlenbeispiele: Kommutativgesetz der Multiplikation

$5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 20$ (Kommutativgesetz)

$5 \cdot 2 \cdot 3 = (5 \cdot 2) \cdot 3 = 5 \cdot (2 \cdot 3) = 30$ (Assoziativgesetz)

Kommutativ- und Assoziativgesetz bei der Multiplikation

Bei der Multiplikation gilt das Distributivgesetz. Das bedeutet, dass für alle Zahlen a und b gilt:

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Zahlenbeispiele: Distributivgesetz der Multiplikation

$5 \cdot (1 + 6) = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 35$

$5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 25$

Aufgaben

1. Berechnen Sie den Wert des Produkts $5 \cdot 17 \cdot 2$ ohne Taschenrechner. Begründen Sie, warum es sinnvoll ist, das Assoziativgesetz bei dieser Aufgabe zu benutzen.

2. Geben Sie den Wert des Produkts $15 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 1$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

3. Berechnen Sie den Wert des Produkts $(3 - 2) \cdot (4 + 1) \cdot (6 - 6) \cdot (4 + 2)$ und begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zeigen Sie, dass $2 \cdot (a - b) - 3 \cdot (a + b) = -(a + 5b)$ ergibt.
   Die Vorzeichen und geben Sie den Wert des Produkts an. Ordnen Sie das Ergebnis.

1.2.4 Grundrechenart Division

Eine Division stellt eine Rechenoperation dar, bei der der sogenannte Dividend und der Divisor mit dem Rechenzeichen »:« verknüpft sind. Der Term Dividend : Divisor wird (unausgerechneter) Quotient genannt. Das Ergebnis einer Division heißt ausgerechneter Quotient.

Division

Bei der Rechenart Division werden der Dividend und der Divisor mit dem Rechenzeichen »:« verbunden. Der zugehörige Term wird als (unausgerechneter) Quotient bezeichnet. Das Ergebnis einer Division nennt man (ausgerechneten) Quotient.

$$\text{Division:}\quad \underbrace{\text{Dividend} : \text{Divisor}}_{\text{(unausgerechneter Quotien)}} = \text{(ausgerechneter) Quotient}$$

Gesetze und Regeln bei der Division

- Eine Division ist weder kommutativ noch assoziativ.
- Bei einer Division gilt das Distributivgesetz.

  $a : (b + c) = a : b + a : c \qquad (a \in \mathbb{Z}; b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$
- Bei der Division gilt folgende Vorzeichenregelung:

  $(+\,c) : (+\,a) = (+\,b) \qquad (-\,c) : (-\,a) = (+\,b) \qquad (-\,c) : (+\,a) = (-\,b) \qquad (+\,c) : (-\,a) = (-\,b)$

  $(a, b, c \in \mathbb{N})$
- $a : a = 1 \quad (a \neq 0) \qquad a : 1 = a \qquad a : 0$ ist nicht definiert.

Zahlenbeispiele:

$4 : 4 = 1 \qquad (-3) : 1 = (-3) \qquad (-5) : (-5) = 1 \qquad 24 : 1 = 24$

Die Division 5 : 0 ist nicht definiert.

Aufgabe

Zeigen Sie anhand eines selbstgewählten Zahlenbeispiels, dass eine Division weder kommutativ noch assoziativ ist.

2 Rechnen mit Brüchen

Bruchteile von Objekten

Um Teilstücke von einem ganzen Objekt eindeutig anzugeben **(Bild 1)** und um sie ggf. vergleichen zu können, werden Bruchzahlen verwendet.

In diesem Kapitel werden die Rechenregeln im Umgang mit Brüchen erläutert.

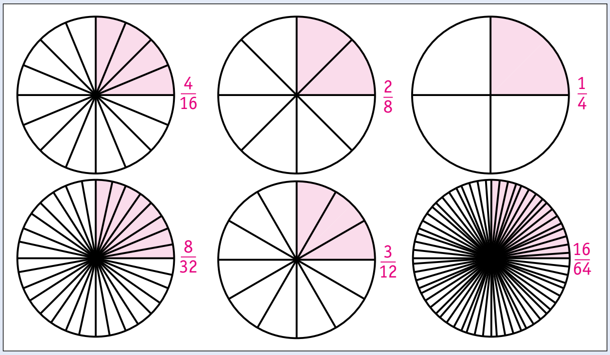


Bild 1: Bruchstücke von einem Ganzen

2.1 Grundlegendes zu Brüchen

Der Bruch $\frac{a}{b}$ entspricht dem Quotienten $a : b$. Bei einem Bruch wird Ausdruck über dem Bruchstrich als Zähler und der Ausdruck unterhalb des Bruchstrichs als Nenner bezeichnet. Da eine Division durch Null nicht erlaubt ist, darf Nenner des Bruchs nicht Null sein.

Bruch Ein Bruch besteht aus einem Zähler und einem Nenner.

$$\text{Bruch} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} \qquad (\text{Nenner} \neq 0)$$

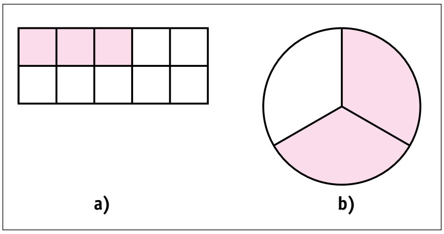
Neben der Regel, dass der Nenner eines Bruchs nicht Null sein darf, gelten beim Rechnen mit Brüchen weitere grundlegende Regeln:

Grundlegende Regeln des Bruchrechnen

1. Beim Bruchrechnen gelten folgende Grundregeln:
   Ist der Zähler eines Bruchs Null, ist der Wert des Bruchs insgesamt 0: $\frac{0}{a} = 0 \ (a \neq 0)$.
2. Der Nenner 1 ändert den Wert des Bruchs nicht: $\frac{a}{1} = a$.
3. Der Wert des Bruchs ist 1, wenn der Zähler und Nenner die gleiche Zahl (außer 0) sind: $\frac{a}{a} = 1 \ (a \neq 0)$
4. Vorzeichenregelung: $(a, b \in \mathbb{N})$
   $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} > 0 \qquad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} < 0 \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b} < 0 \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} > 0$

Aufgaben

Geben Sie jeweils den Anteil der gefärbten Fläche als Bruchzahl an.



2.2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Um Brüche miteinander vergleichen zu können bzw. um sie addieren oder subtrahieren zu können, müssen sie gegebenenfalls erweitert oder gekürzt werden. Beim Erweitern wird der Zähler und der Nenner des Bruchs mit der gleichen Zahl ungleich Null multipliziert. Beim Kürzen wird der Zähler und der Nenner des Bruchs mit der gleichen Zahl ungleich Null dividiert. Der Wert des Bruchs ändert sich durch das Erweitern bzw. durch Kürzen nicht.

Erweitern und Kürzen eines Bruchs

Ein Bruch wird erweitert, indem der Zähler und der Nenner des Bruchs mit einer Zahl ungleich 0 multipliziert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (b, c \neq 0)$$

Ein Bruch wird gekürzt, indem der Zähler und der Nenner des Bruchs durch eine Zahl ungleich 0 dividiert wird.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad (b, c \neq 0)$$

Zahlenbeispiele: Erweitern und Kürzen von Brüchen

$$\frac{2}{3} \xrightarrow[\text{mit } 2]{\text{Erweitern}} \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} \qquad \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{mit } 10]{\text{Erweitern}} \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{10}{15} \xrightarrow[\text{mit } 5]{\text{Kürzen}} \frac{10 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{2}{3} \qquad \frac{28}{21} \xrightarrow[\text{mit } 7]{\text{Kürzen}} \frac{28 \cdot 7}{21 \cdot 7} = \frac{4}{3}$$

Aufgaben

1. Kürzen Sie die Brüche vollständig.

a) $\frac{240}{420}$ b) $\frac{49}{42}$ c) $\frac{18}{54}$ d) $\frac{15}{45}$

2. Überprüfen Sie die folgende Rechnung auf ihre Richtigkeit. Begründen Sie Ihre Angabe.

$$\frac{8x}{48x} = \frac{\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{x}}{\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{x}} = 6$$

3. Erweitern Sie die Brüche so, dass sie den Nenner 30 haben.

$\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{5x}{6}, \frac{5+x}{10}, \frac{x+2a}{15}$

4. Schreiben Sie die Zahl 1 als Bruch mit den folgenden Nennern:

$2, 4, 10, 2a, 4x, x+8$

5. Zeigen Sie, dass durch Kürzen des Produkts folgendes gilt: $\frac{a+a}{a^2-3a} \cdot \frac{2a-6}{4a} = \frac{1}{a}$

2.3 Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

Zwei Brüche mit dem gleichen Nenner werden als gleichnamige Brüche bezeichnet. Die Addition zweier gleichnamiger Brüche lässt sich anhand eines Kreises darstellen, der in 8 gleiche Stücke geteilt ist. Jedes Kreisstück hat eine Fläche von $\frac{1}{8}$ der gesamten Fläche. Addiert man zwei dieser Kreisstücke, so hat das neue Kreisstück eine Fläche von $\frac{2}{8}$ der gesamten Fläche **(Bild 1)**. Es gilt somit $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$.

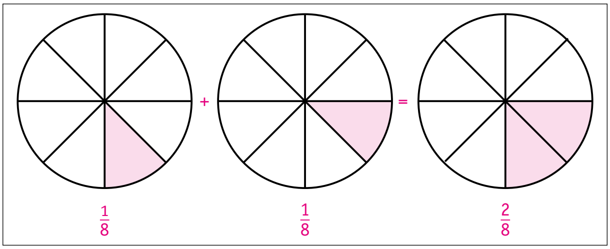


Bild 1: Veranschaulichung der Addition zweier Kreistücken

Aus der obigen Überlegung können die Regeln zur Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen gefolgert werden:

Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem die Zähler zusammengezählt werden, während der Nenner unverändert beibehalten wird.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem die Zähler subtrahiert werden, während der Nenner unverändert beibehalten wird.

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$$

Zahlenbeispiele: Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

- $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$
- $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $\frac{7}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7-2+8}{3} = \frac{13}{3}$
- $\frac{5}{2a} + \frac{1}{2a} - \frac{7b}{2a} = \frac{5+1-7b}{2a} = \frac{6-7b}{2a}$
- $\frac{10}{x+2} - \frac{4}{x+2} + \frac{a}{x+2} = \frac{10-4+a}{x+2} = \frac{6+a}{x+2}$

Hinweis:

Ist bei einer Differenz der Minuend ein Bruch, dessen Zähler aus einer Summe oder Differenz besteht, so sind Klammern um diese zu setzen, nachdem die Zähler auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben wurden.

Beispiele: Subtraktion eines Bruches, dessen Zähler eine Summe/Differenz ist

- $\frac{1}{2} - \frac{x+2}{2} = \frac{1-(x+2)}{2} = \frac{1-x-2}{2} = \frac{-x-1}{2}$
- $\frac{a+2}{4} - \frac{5+3a}{4} = \frac{a+2-(5+3a)}{4} = \frac{a+2-5-3a}{4} = \frac{-2a-3}{4}$

Aufgaben

1. Addieren beziehungsweise subtrahieren Sie die folgenden Brüche.

a) $\frac{5}{4} - \frac{7}{4} + \frac{3}{4}$

b) $\frac{6}{5} - \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$

c) $\frac{18a}{4-a} - \frac{a}{4-a}$

d) $\frac{7}{4xy} + \frac{5}{4xy} - \frac{11}{4xy}$

e) $\frac{7}{4} - \frac{1-x}{4} + \frac{x+3}{4}$

f) $\frac{3+b}{2-b} - \frac{b+4}{-b+2} + \frac{2}{2-b}$

2. Ihnen liegen folgende Rechnungen vor. Geben Sie an, welche dieser richtig ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4+4} = \frac{8}{8} = 1$

b) $-\frac{7}{2} - \frac{5-x}{2} = \frac{-7-5-x}{2} = \frac{-7-5-x}{2} = \frac{-12-x}{2}$

c) $\frac{1}{2+x} + \frac{x}{2+x} - \frac{4+x}{2+x} = \frac{1+x-(4+x)}{2+x} = \frac{1+x-4-x}{2+x} = \frac{-3}{2+x}$

d) $\frac{4}{3x} + \frac{2}{3x} = \frac{4+2}{3x} = \frac{6}{3x} = \frac{3}{x}$

e) $\frac{1}{5+a} + \frac{4}{5+a} = \frac{1+4}{5+a} = \frac{5}{5+a} = \frac{1}{1+a}$

3. Setzen Sie für Δ den richtigen Wert ein, so dass eine wahre Aussage entsteht:

a) $\frac{3x+2}{x} = 3 + \Delta$

b) $\frac{2a+1}{a} = \Delta + \frac{1}{a}$