

Rolf Brigola

Fourier-Analysis und Distributionen

Eine Einführung mit Anwendungen



edition swk

Rudolf Rupp, Benedikt Plümper

Komplexe Potentiale

Rolf Brigola

Fourier-Analysis und Distributionen

Eine Einführung mit Anwendungen

Norbert Ortner, Peter Wagner

Distribution-Valued Analytic Functions

Theory and Applications

In Deutschland versandkostenfrei erhältlich im Shop der Edition unter
<http://www.publish-books/editionswk>



edition swk ist eine Reihe in der gemeinnützigen Stiftung Studium, Wissenschaft, Kunst (www.stiftung-swk.de/edition-swk), die in Zusammenarbeit mit dem Hamburger Verlag tredition erscheint. Der tredition Verlag verlegt mit den TREDITION CLASSICS auch die größte Klassiker-Buchreihe der Welt. Kooperationspartner für tredition sind hierbei u.a. die „Gutenberg-Projekte“. Diese Literatur-Projekte erhalten einen Teil der Verkaufserlöse als Unterstützung für ihre Arbeit.

Rolf Brigola

Fourier-Analysis und Distributionen

Eine Einführung mit Anwendungen



edition swk

Prof. Dr. Rolf Brigola
Technische Hochschule Nürnberg Georg-Simon-Ohm
Fakultät Angewandte Mathematik, Physik und Allgemeinwissenschaften
Keßlerplatz 12
90489 Nürnberg

© Rolf Brigola, 2012

Erschienen in der edition swk (www.stiftung-swk.de/edition-swk)
Verlag & Druck: tredition GmbH, Halenreihe 40-44, 22359 Hamburg

ISBN: 978-3-7497-2789-6 (Paperback)
ISBN: 978-3-7497-2726-1 (Hardcover)

4. erweiterte Auflage 2019

Mathematics Subject Classification (2010): 42-01

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlags und des Autors unzulässig. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung:

Carsten Thomas, TH Nürnberg Georg-Simon-Ohm (Hardcover) und Tamara Pulkert, Nürnberg (Paperback).
Der Umschlag des Hardcover-Buches zeigt die Formeln für die diskrete Fouriertransformation und eine Fundamentallösung für einen Differentialoperator $P(\partial)$ (vgl. Abschnitt 11.8), sowie Ausschnitte von Dirichletkernen. Auf dem Paperback-Umschlag sind Äquipotentialflächen im Halbraum $y > 0$ zu sehen, die von zwei Punktladungen $-q$ und $2q$ erzeugt sind (vgl. Abschnitt 8.4). Das Potential ist eine reguläre Distribution mit Singularitäten an den Orten der Ladungen. Die zweite Grafik zeigt ein mit 16-QAM moduliertes WLAN-Amplitudenspektrum wie bei IEEE 802.11g (vgl. Abschnitt 11.2)

Vorwort

Vorwort zur vierten Auflage

Bei dieser Neuauflage habe ich das Buch um eine Reihe von Beispielen und Übungsaufgaben erweitert. Der Theorieteil beträgt mit ca. 180 Seiten weniger als die Hälfte des Textes, während der überwiegende Anteil typischen Anwendungsbeispielen, Übungsaufgaben und deren Lösungen gewidmet ist. Die Abschnitte über diskrete Fouriertransformationen und lineare Filter habe ich nochmals überarbeitet und einen Abschnitt über Anwendungen von Abtastverfahren hinzugefügt, um damit einen möglichst einfachen Einstieg in die weiterführende moderne Signalverarbeitung zu bieten. Für die Bearbeitung der Aufgaben, insbesondere für numerische Berechnungen, empfehle ich ein Computeralgebra-System wie Mathematica, Maple, Matlab oder frei verfügbare Alternativen.

Auch für diese Neuauflage gilt meinen Kollegen Rudolf Rupp, TH Nürnberg, und Peter Singer, TH Ingolstadt, großer Dank für ihre Unterstützung. Ich hoffe, mit dem Text interessierten Leserinnen und Lesern eine ausreichende Unterstützung beim theoretischen Zugang zur Fourier-Analysis zu geben und auch zu den zahllosen Anwendungen, die unseren Alltag vielfach und zunehmend durchdringen.

Nürnberg, im Sommer 2019

Rolf Brigola

Vorwort zur ersten Auflage

Fourier-Analysis und Distributionentheorie sind fundamentale mathematische Werkzeuge bei der Beschreibung vieler technisch-naturwissenschaftlicher Probleme, zum Beispiel in der Mechanik, in der Elektrotechnik, in der Signaltheorie, Nachrichten- und Regelungs-technik. Der vorliegende Text wendet sich an angehende Mathematiker, Ingenieure und Naturwissenschaftler, die grundlegende mathematische Modellbildungen und Methoden der Fourier-Analysis kennenlernen und in Anwendungsproblemen umsetzen wollen. Er ist entstanden aus Vorlesungen für Studenten der Elektro- und Nachrichtentechnik ab dem vierten Semester an der Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg und ersetzt in dieser überarbeiteten und erweiterten Fassung das Buch des Autors zum gleichen Thema, das 1996 beim inzwischen nicht mehr selbstständig existierenden Vieweg-Verlag erschienen war und seit langem vergriffen ist. Das Buch richtet sich an engagierte Studenten mittlerer Semester in einem technisch-naturwissenschaftlichen Bachelor-Studiengang oder in einem beginnenden Master-Studium. Als Vorkenntnis wird ein üblicher Grundkurs über Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt.

Das Buch ist gegliedert in Kapitel mit mathematischen Grundlagen über Fourierreihen, Distributionen und Fouriertransformationen, denen jeweils eine Auswahl typischer Anwendungsbeispiele folgt. Die heute auch in den Ingenieur-Disziplinen gebräuchlichen Grundlagen der Distributionentheorie vereinfachen viele Betrachtungen und Rechnungen

bei physikalisch-technischen Fragestellungen und machen sie zu einem guten Teil überhaupt erst möglich. Fourierreihen und Anwendungen auf elektrische Netzwerke bilden hierzu das erste anschauliche Beispielmaterial.

Die Abschnitte über Anwendungsbeispiele können je nach Interessenlage weitgehend unabhängig voneinander gelesen werden. Neben einem Einstieg in die Grundtypen linearer partieller Differentialgleichungen und in Prinzipien der linearen Systemtheorie und Signalverarbeitung wird ein Einblick in numerische Aspekte für die praktische Anwendung der erlernten Methoden eröffnet. Diesem Ziel dienen die Abschnitte über die diskrete Fourier- und Wavelettransformation mit ihren Anwendungen in der Signalverarbeitung und der Abschnitt über die Grundidee der Finiten Elemente.

Ich habe versucht, die dargelegten Grundbegriffe zwar mit einem Minimum an mathematischer Theorie zu entwickeln, dabei aber die notwendigen Konvergenz- und Stetigkeitsbegriffe, die für eine tragfähige Anwendung erforderlich sind, soweit zu vermitteln, dass lernende Studierende über rein formale Handhabungen von Transformationsregeln, Dirac-Impulsen etc. hinauskommen und eine Kalkül-Sicherheit im Umgang mit Distributionen und Fouriertransformationen erreichen können. Ich hoffe, Studierende technisch-naturwissenschaftlicher Ausrichtung mit dieser Einführung in die Lage zu versetzen und anzuregen, die erarbeiteten Kenntnisse in die Praxis umzusetzen und nach Bedarf mit weiterführender Literatur zu vertiefen.

Eine Auswahl der verwendeten Quellen und Hinweise auf weiterführende Werke und heute leicht zugängliche Originalarbeiten findet man im Literaturverzeichnis. Für anregende Diskussionen bei der Entstehung des Buches gilt mein Dank meinem akademischen Lehrer Professor D. Kölzow sowie meinen Freunden und Kollegen S. Bolz, R. Rupp, J. Steinbach und E. Wermuth in Nürnberg, E. Novak in Jena, D. Meinstrup und P. Singer in Ingolstadt. Großen Dank habe ich insbesondere zu richten an Professor E. Albrecht, Saarbrücken, und meinen Kollegen H. Leinfelder, Nürnberg und Pilsen, für neuere Ergebnisse ihrer Arbeit, die nach meiner Kenntnis bisher noch nicht in anderen Lehrbüchern erschienen sind. Dies sind die Sätze von E. Albrecht über Faltungsdarstellungen kausaler zeitinvarianter linearer Systeme in Kapitel 10 und die elementaren Beweise des Satzes von Malgrange-Ehrenpreis in Abschnitt 11.8 und des Fundamentalsatzes der Algebra in Anhang A in der Darstellung von H. Leinfelder. Gleichfalls danke ich meinen Studenten, die mit hoher Motivation und konstruktiver Kritik in den Vorlesungen und Seminaren, die dem Buch zugrunde liegen, mitgearbeitet haben. Herrn H. Heinze danke ich für seine vielfältige Unterstützung beim Buchsatz mit L^AT_EX.

Ein wichtiger Teil des Buches sind die Übungsaufgaben, die ernsthafte Leser selbständig bearbeiten sollten. Die meisten Aufgaben dienen der Festigung der vermittelten Inhalte und der Einübung einer soliden Rechentechnik. Manche Aufgaben habe ich mit einem \star versehen. Diese Aufgaben sind vornehmlich für Mathematiker unter den Lesern gedacht und zeigen bisweilen Aspekte, auf die sonst im Text nicht näher eingegangen wird. Zur Kontrolle sind Lösungen oder Lösungshinweise für alle Aufgaben in Anhang C angegeben. Weitere Übungen und Beispiele, die mit dem Computeralgebrasystem Maple oder dem Numeriksystem Matlab gerechnet sind, kann man bei Interesse auf den im Internet leicht zu recherchierenden Seiten des Autors finden.

Nürnberg, im Sommer 2012

Rolf Brigola

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Inhaltsverzeichnis	vii
1 Einführung	1
1.1 Geschichtliches	1
1.2 Das Problem der schwingenden Saite	2
2 Trigonometrische Polynome, Fourierkoeffizienten	7
2.1 Darstellungen trigonometrischer Polynome	7
2.2 Die Fourierkoeffizienten trigonometrischer Polynome	8
2.3 Dirichlet-Kerne	11
2.4 Zusammenfassung über trigonometrische Polynome	13
3 Fourierreihen	15
3.1 Die erste Fourierreihe	15
3.2 Grundlegende Sätze über Fourierreihen	22
3.3 Das Spektrum periodischer Funktionen	26
3.4 Übungsaufgaben	30
4 Rechnen mit Fourierreihen	31
4.1 Symmetrie-Eigenschaften, Linearität, Ähnlichkeit	31
4.2 Translationen im Zeit- und im Frequenzbereich	35
4.3 Die Ableitung von Fourierreihen	37
4.4 Integration von Fourierreihen	38
4.5 Asymptotisches Verhalten der Fourierkoeffizienten	39
4.6 Spektrum und Leistung, Parseval-Gleichung	43
4.7 Übungsaufgaben	44
5 Anwendungsbeispiele für Fourierreihen	47
5.1 Beste Approximation im quadratischen Mittel	47
5.2 Periodische Faltung, Anwendung auf lineare Systeme	50
5.3 Die Potentialgleichung auf einer Kreisscheibe	54
5.4 Lösung für das Problem der schwingenden Saite	58
5.5 Der Approximationssatz von Weierstraß	62
5.6 Das $1/f$ -Theorem von Wiener	63
5.7 Einführung in die diskrete Fouriertransformation	66
5.8 Übungsaufgaben	101

6 Zur Konvergenz von Fourierreihen	107
6.1 Der Satz von Dirichlet	107
6.2 Der Satz von Fejér, Konvergenz von Glättungen	109
6.3 Die Parseval-Gleichung	115
6.4 Fourierreihen für Funktionen mehrerer Variablen	117
6.5 Gründe für den Übergang zu Distributionen	121
6.6 Übungsaufgaben	123
7 Grundzüge der Distributionentheorie	125
7.1 Beschreibung von Funktionen durch Mittelwerte	125
7.2 Testfunktionen	128
7.3 Der δ -Impuls	129
7.4 Distributionen	135
7.5 Rechnen mit Distributionen	141
7.6 Testfunktionen und Distributionen mit mehreren Variablen	155
7.7 Tensorprodukt und Faltung	158
7.8 Übungsaufgaben	170
8 Anwendungsbeispiele für Distributionen	173
8.1 Periodische Distributionen sind verallgemeinerte Fourierreihen	173
8.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	180
8.3 Anwendung auf lineare elektrische Netzwerke	191
8.4 Räumliche Potentialprobleme	195
8.5 Die Grundidee der Finiten Elemente	205
8.6 Distributionelle Lösung der Schwingungsgleichung	219
8.7 Zusammenfassung	221
8.8 Übungsaufgaben	223
9 Die Fouriertransformation	227
9.1 Darstellung von Funktionen durch harmonische Schwingungen	227
9.2 Fouriertransformation reellwertiger Funktionen	230
9.3 Gibbs-Phänomen und Glättung	234
9.4 Rechnen mit Fouriertransformationen	235
9.5 Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen	242
9.6 Fouriertransformation von Faltungen	254
9.7 Fouriertransformation quadratisch integrierbarer Funktionen	261
9.8 Die Fouriertransformation für Funktionen mehrerer Variablen	264
9.9 Übungsaufgaben	270
10 Grundlagen über Lineare Filter	273
10.1 Signale	273
10.2 Translationsinvariante lineare Systeme	276
10.3 Analoge lineare Filter, Stetigkeit und Kausalität	277
10.4 Analoge Filter mit rationalen Frequenzgängen	287
10.5 Periodische Signale, stationäre Filterantwort	294
10.6 Diskrete lineare Filter, z-Transformation	298
10.7 Übungsaufgaben	323

11 Weitere Anwendungsbeispiele für die Fouriertransformation	327
11.1 Der Abtastsatz von Shannon	327
11.2 Sampling als Grundlage digitaler Übertragungstechnik	330
11.3 Die Heisenbergsche Unschärferelation	343
11.4 Zeit-Frequenz-Analyse, gefensterte Fouriertransformationen	349
11.5 Zeitfenster bei der diskreten Fouriertransformation	357
11.6 Anfangswertprobleme für stabile zeitinvariante lineare Systeme	363
11.7 Anfangswertprobleme für Wellen- und Wärmeleitungsgleichung	364
11.8 Der Satz von Malgrange-Ehrenpreis	369
11.9 Übungsaufgaben	377
12 Ausblicke auf weiterführende Konzepte	379
12.1 Hilberträume, spezielle vollständige Orthonormalsysteme	379
12.2 Wavelets	386
A Der Residuensatz und der Fundamentalsatz der Algebra	405
B Hilfsmittel aus der Integrationstheorie	411
C Lösungen zu den Übungsaufgaben	423
Literaturverzeichnis	449
Symbolverzeichnis und physikalische Größen	457
Index	459

1 Einführung

1.1 Geschichtliches

Trigonometrische Reihen der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

unter geeigneten Bedingungen an die dargestellten Funktionen und die Reihenkoeffizienten später *Fourierreihen* genannt, wurden historisch erstmals benutzt zur Beschreibung periodischer Vorgänge in der Astronomie und zur Behandlung der Bewegungsgleichung einer schwingenden Saite. Schon D. Bernoulli (1700-1782) vertrat 1753 die Auffassung, dass sich „jede“ Schwingungsform einer Saite als Überlagerung einer Grundschwingung mit einer Kreisfrequenz ω und Oberschwingungen mit den Frequenz-Vielfachen $n\omega$ darstellen lasse. Der französische Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) benutzte 1807 solche trigonometrischen Reihen zur Darstellung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Für einen Stab der Länge l mit der Temperaturleitfähigkeit k , dessen Enden auf der Temperatur Null gehalten werden, wird die Temperatur $u(x,t)$ in $x \in [0,l]$ zur Zeit $t \geq 0$ durch folgende homogene partielle Differentialgleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) && \text{(keine Energiezufuhr von außen)} \\ u(x,0) &= f(x) && \text{(Anfangstemperaturverteilung } f) \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 && \text{(die Enden des Stabes sind eisgekühlt).} \end{aligned}$$

Die Fouriersche Reihenlösung lautete

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k(n\pi/l)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy. \end{aligned}$$

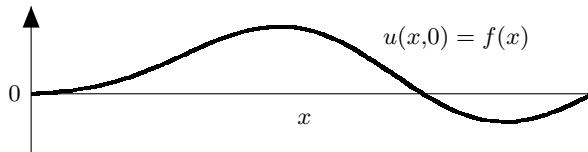
Da Fourier noch sehr anschaulich argumentierte, stieß seine Theorie der Wärmeausbreitung auf Vorbehalte und Bedenken, die erst nach Jahrzehntelanger, doch letztlich äußerst fruchtbare Diskussion ausgeräumt werden konnten. Die exakte Klärung der mathematischen Grundbegriffe für die Aussagen Fouriers geht wesentlich zurück auf Arbeiten des Mathematikers P. L. Dirichlet (1805-1859). Nach Ablauf fast eines Jahrhunderts war dann klar, dass Fouriers Arbeit wichtige Impulse für viele Teilbereiche der Mathematik gegeben hatte. Fragestellungen der Fourier-Analysis, d.h. der Darstellung von Funktionen durch harmonische Schwingungen, führten Dirichlet zum modernen Funktionsbegriff, standen am

Beginn der Mengenlehre G. Cantors (1845-1918), und waren Ausgangspunkte der Maß- und Integrationstheorie von B. Riemann (1826-1866) und H. Lebesgue (1875-1941). Die Funktionalanalysis und die moderne numerische Mathematik erhalten bis heute starke Anregungen aus der Theorie der Fourierreihen für ihre abstrakten Begriffe und die dadurch neu entstandenen Methoden zur Lösung konkreter Anwendungsprobleme. Schon mit der Diskussion der Fourierschen Ideen begann auch ihr Triumphzug in den Ingenieur- und Naturwissenschaften, wo sie bis heute zu den wirkungsvollsten mathematischen Hilfsmitteln zählen.

Zur Erklärung der Grundgedanken von Bernoulli und Fourier behandeln wir zunächst das Problem der schwingenden Saite. Die Saitenschwingung kann als elementares Beispiel eines akustischen Signals aufgefasst werden, aus dem schon wesentliche Grundbegriffe für viele Anwendungsbereiche der Fourier-Analysis entwickelt werden können.

1.2 Das Problem der schwingenden Saite

Hierzu betrachten wir die kräftefreie Bewegung einer an zwei Enden eingespannten, homogenen dünnen Saite der Länge l . Wie wird sich die Saite bewegen, wenn sie aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird? Um die Frage rechnerisch behandeln zu können, führen wir ein Koordinatensystem ein und bezeichnen die transversale Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t mit $u(x,t)$.



Gesucht wird eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u(x,t)$ auf $[0,l] \times \mathbb{R}_0^+$, welche die *Randbedingungen*

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0,$$

und die *Anfangsbedingungen*

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) & \text{für } 0 \leq x \leq l, f(0) = f(l) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq l, g(0) = g(l) = 0 \end{aligned}$$

erfüllt. „Loslassen“ bedeutet im Beispiel, dass $g = 0$ ist auf $[0,l]$.

Um $u(x,t)$ auch für Zeiten $t > 0$ bestimmen zu können, entnehmen wir aus der Physik, dass die Funktion $u(x,t)$ bei kräftefreier Bewegung für kleine transversale Auslenkungen näherungsweise der *eindimensionalen Wellengleichung* genügt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0),$$

mit den vorgenannten Rand- und Anfangsbedingungen.

Die Konstante $c^2 = P/\varrho$ ist dabei der Quotient aus der Spannung P und der Massendichte ϱ der Saite. P ist der Quotient aus Spannkraft F und Saiten-Querschnittsfläche A . Die Konstante c hat damit die physikalische Dimension einer Geschwindigkeit.

Nimmt man nun zusätzlich an, dass $u(x,t)$ von der Form

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t) \quad (\text{Trennung der Variablen})$$

ist, so folgt durch Einsetzen in die Wellengleichung

$$v\ddot{w} = c^2 v'' w.$$

Dabei benutzen wir die Notation $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$ und $v' = \frac{dv}{dx}$, $\ddot{w} = \frac{d^2 w}{dt^2}$ und $v'' = \frac{d^2 v}{dx^2}$.

Division durch $c^2 v w$ (unter der Voraussetzung $c^2 v w \neq 0$) ergibt dann

$$\frac{\ddot{w}}{c^2 w} = \frac{v''}{v}.$$

Weil die linke Seite eine Funktion nur von t ist und nicht von x abhängt, kann auch die rechte Seite nicht von x abhängen, muss mithin konstant sein. Gibt man der Konstanten den Namen λ , so erhält man zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

$$v'' - \lambda v = 0$$

$$\ddot{w} - \lambda c^2 w = 0$$

und Nebenbedingungen

$$v(0) = v(l) = 0 \quad (1.1)$$

$$v(x)w(0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.2)$$

$$v(x) \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{w}(t) = g(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.3)$$

Zur Erinnerung an gewöhnliche lineare Differentialgleichungen bestimmen wir die Lösungen von $v'' - \lambda v = 0$:

Der Ansatz $v(x) = e^{sx}$ führt auf die Gleichung $e^{sx}(s^2 - \lambda) = 0$. Da immer $e^{sx} \neq 0$ ist, erhält man Lösungen durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(s) = s^2 - \lambda$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(s) = s^2 - \lambda$ sind

$$\begin{array}{ll} \pm\sqrt{\lambda} & \lambda > 0 \\ 0 & \text{falls } \lambda = 0 \\ \pm j\sqrt{-\lambda} & \lambda < 0. \end{array}$$

Dabei bezeichnet j die komplexe Einheit mit $j^2 = -1$. Für Leser, die an Stelle von j die in der Mathematik sonst übliche Bezeichnung i , $i^2 = -1$, gewohnt sind, sei bemerkt, dass $j^2 = -1$ die in der Literatur zur Elektrotechnik und Signalverarbeitung weit verbreitete Notation ist, weil dort der Buchstabe i als Bezeichnung für die Stromstärke fest vergeben ist. Man vergleiche hierzu etwa die Standardwerke von O. Föllinger (2008), K.-D. Kammerer, A. Dekorsy (2018) oder A. Papoulis (1987). Mathematiker als Leser kommen mit dieser Notationsvariante im Text sicher leicht zurecht.

1. Fall: $\lambda > 0$: Nehmen wir an, eine der Lösungen $v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x}$ erfüllt die Randbedingungen. Dann gilt für die entsprechenden c_1 und c_2

$$\begin{aligned} c_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot 0} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot 0} &= c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} &= 0. \end{aligned}$$

Weil aber $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} & e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} \end{pmatrix} \neq 0$, ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$, d.h. nur die Null-Lösung kommt in Frage. Diese erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung (1.2) für $f \neq 0$ und bleibt daher außer Betracht.

2. Fall: $\lambda = 0$: $c_1 + c_2 x = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ ergibt auch hier $c_1 = c_2 = 0$, also wieder eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $v'' - \lambda v = 0$, die nicht unseren Anfangsbedingungen genügt.

3. Fall: $\lambda < 0$: Dann ist die allgemeine Lösung von $v'' - \lambda v = 0$ gegeben durch

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot x).$$

Um die Randbedingungen zu erfüllen, müssen c_1, c_2 so gewählt werden, dass

$$0 = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) \text{ und } 0 = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot l) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot l)$$

gelten, also $c_1 = 0$ und $c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot l) = 0$. Dies ist möglich für beliebige $c_2 \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{-\lambda} \cdot l = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, also für λ von der Form $\lambda_n = -(n\pi/l)^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Zusammenfassend können wir sagen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$v_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (c_n \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

Lösungen von $v'' - \lambda_n v = 0$ sind, welche der Randbedingung (1.1) genügen.

Anschließend bestimmt man für jeden Wert $\lambda_n = -(n\pi/l)^2$ die allgemeine Lösung von $\ddot{w} - \lambda_n c^2 w = 0$ und erhält ganz analog die Lösungen

$$w_n(t) = a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right).$$

Mit dem Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ ergibt sich als n -te Eigenschwingung der Saite

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \right)$$

($n \in \mathbb{N}$; die Faktoren c_n von v_n sind den Faktoren a_n, b_n zugeschlagen).

Die n -te Eigenschwingung besitzt die Kreisfrequenz $\omega_n = cn\pi/l$. Durch Einsetzen in die Anfangsbedingungen sieht man, dass eine Eigenschwingung $u_n(x,t)$ eine Lösung des Problems ist, wenn gilt:

$$f(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{cn\pi}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).$$

Trigonometrische Polynome, d.h. Linearkombinationen der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=1}^N \frac{cn\pi}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

sind im mathematischen Modell Näherungen für die exakten Anfangsbedingungen der Saitenschwingung. Die resultierende Linearkombination von Eigenschwingungen mit den Koeffizienten a_n und b_n der Anfangsbedingungen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right)$$

ist dann eine Näherungslösung für die exakte Saitenauslenkung. Um gute Näherungen für verschiedene physikalische Bedingungen zu erhalten, möchte man möglichst allgemeine Anfangsbedingungen f und g behandeln können. Je mehr trigonometrische Funktionen man zur Nachbildung von f und g verwendet, desto bessere Näherungen wird man erwarten dürfen. Man setzt daher f und g als *unendliche trigonometrische Reihen* an,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

und versucht, eine Lösung durch *Überlagerung unendlich vieler Eigenschwingungen* in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right)$$

zu finden. Wenn die Reihe gegen eine hinreichend glatte Funktion konvergiert, stellt sie einen möglichen Bewegungsablauf mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(l,t) = 0$ dar. Die Größen a_n und b_n sind dadurch bestimmt, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sein sollen. Sie haben die gleiche physikalische Einheit wie $u(x,t)$. Einsetzen der Reihe in die Anfangsbedingungen ergibt bei gliedweiser Differentiation und Vertauschung der Grenzwertbildung $t \rightarrow 0+$ mit der Reihen-Grenzwertbildung:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = g(x).$$

An diesem Punkt nun erheben sich zwangsläufig folgende Fragen, um das Problem endgültig zu lösen:

Frage 1: Welche Funktionen f und g auf $[0,l]$ können überhaupt durch trigonometrische Reihen dargestellt werden?

Es war Bernoullis und Fouriers Grundgedanke, dass durch geeignete Wahl der unendlich vielen Koeffizienten a_n und b_n nahezu jede praktisch relevante Funktion als Überlagerung harmonischer Schwingungen nachgebildet werden könne. Damit wäre das Saitenproblem mit der Reihenmethode für nahezu „beliebige“ Anfangsbedingungen zu lösen.

Frage 2: Wenn man davon ausgehen kann, dass gegebene Funktionen f und g solche Darstellungen als trigonometrische Reihen besitzen, wie kann man dann die dafür notwendigen Koeffizienten a_n und b_n berechnen?

Erst mit der Angabe dieser Koeffizienten wäre das Schwingungsproblem explizit gelöst. Frage 2 wird in den beiden folgenden Kapiteln beantwortet. Dabei ist auch das Problem zu lösen, ob die errechnete Reihendarstellung für die gesuchte Funktion $u(x,t)$ tatsächlich eine eindeutige, zweimal differenzierbare Lösung des Ausgangsproblems ist. Die obige Lösung wurde ja errechnet aufgrund der Annahme der sehr speziellen Form der Lösung $u(x,t) = v(x)w(t)$ mit getrennten Variablen. Außerdem hat man einmal gelernt, dass man Funktionenreihen nicht ohne weiteres gliedweise differenzieren und Grenzwertbildungen vertauschen darf, was wir aber bei der Lösungsberechnung unterstellt haben. Dieses Problem führt deshalb auf

Frage 3: In welchem Sinn – abhängig von den Anfangsbedingungen f und g – konvergiert überhaupt die trigonometrische Reihe zur Darstellung von $u(x,t)$? Ist die Reihe eigentlich zweimal gliedweise differenzierbar? Ist die vorgelegte Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die Schwingungsgleichung eindeutig?

Diese Fragen zeigen direkt die Bedenken, die man Anfang des 19. Jahrhunderts Fouriers Lösungsansatz entgegenbringen musste. Eine Konvergenztheorie für unendliche Reihen wurde erst zu Fouriers Zeiten um 1821 von A. L. Cauchy (1789-1857) entwickelt.

Befriedigende Aussagen über die Lösbarkeit linearer, partieller Differentialgleichungen ergaben sich erst gegen Mitte des 20. Jahrhunderts mit der Behandlung solcher Probleme im Rahmen der Theorie der verallgemeinerten Funktionen oder, wie man auch sagt, der Distributionen.

Zur schrittweisen Beantwortung der aufgeworfenen Fragen beginnen wir im nächsten Abschnitt mit einigen Grundlagen über trigonometrische Polynome. Dabei erweisen sich vielfach Darstellungen mit Hilfe der komplexen Zahlen als sehr nützlich. Lesern, die bisher im Wesentlichen nur mit der reellen Analysis vertraut sind, seien daher die Abschnitte über komplexe Zahlen und komplexe Elementarfunktionen zum Beispiel in den Lehrbüchern von K. Meyberg, P. Vachenauer (2001) vorab zur Lektüre empfohlen. Auch eine Formelsammlung wie die von L. Råde, B. Westergren (2000) kann sehr hilfreich sein. Wir werden insbesondere die komplexe Exponentialfunktion und ihre enge Verbindung mit den trigonometrischen Funktionen laufend benutzen. Vertiefte Kenntnisse über die Theorie komplexer Funktionen werden im Folgenden nicht vorausgesetzt. Der Residuensatz, auf den in Kapitel 10 im Zusammenhang mit der z-Transformation Bezug genommen wird, ist im Anhang des Buches formuliert. Dort findet sich auch eine elementare Herleitung des Fundamentalsatzes der Algebra, den wir mehrfach im weiteren Verlauf verwenden werden.

Zu Referenzen im Text – wie oben K. Meyberg, P. Vachenauer (2001) – sei an dieser Stelle angemerkt, dass Namensangaben, gefolgt von einer Jahreszahl in Klammern, sich stets auf Quellen beziehen, die im Literaturverzeichnis am Ende des Buches zu finden sind. Die Angabe A. L. Cauchy (1789-1857) ist dagegen keine Literaturreferenz, sondern gibt die Lebenszeit von Cauchy an, hier dem Jahr der französischen Revolution bis zur ersten Weltwirtschaftskrise 1857.

2 Trigonometrische Polynome, Fourierkoeffizienten

2.1 Darstellungen trigonometrischer Polynome

Als trigonometrisches Polynom der Periode T bezeichnet man eine Funktion f mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C} der Gestalt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

mit $N \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = 2\pi/T$.

Für rechnerische Zwecke ist meist eine komplexe Darstellung nützlicher. Mit der komplexen Einheit j , $j^2 = -1$, und den Formeln für Real- und Imaginärteil von $e^{jn\omega_0 t}$

$$\begin{aligned} \cos(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) = \Re(e^{jn\omega_0 t}), \\ \sin(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) = -\frac{j}{2} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) = \Im(e^{jn\omega_0 t}) \end{aligned}$$

folgt durch Einsetzen mit $b_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} a_n e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} a_n e^{-jn\omega_0 t} - \frac{j}{2} b_n e^{jn\omega_0 t} + \frac{j}{2} b_n e^{-jn\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \underbrace{\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right)}_{=c_n} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^N \underbrace{\left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right)}_{=c_{-n}} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=0}^N c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Die Konstanten c_n bzw. a_n und b_n heißen *Fourierkoeffizienten* von f . Für

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_0 t}$$

gelten daher folgende Umrechnungsformeln zwischen den Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2}, & c_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2}, \\ b_0 &= 0, & a_0 &= 2c_0, & a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= j(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

2.2 Die Fourierkoeffizienten trigonometrischer Polynome

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Die Antwort auf die Frage nach der Berechnung der Fourierkoeffizienten ergibt sich aus folgenden *Orthonormalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen*:

Für alle $n, k \in \mathbb{Z}$ gilt mit der konjugiert komplexen Funktion $e^{jk\omega_0 t} = e^{-jk\omega_0 t}$ zu $e^{jk\omega_0 t}$ ($j^2 = -1$)

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{jn\omega_0 t} \overline{e^{jk\omega_0 t}} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k, \end{cases}$$

denn

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{jn\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt &= \int_0^T 1 dt = T \quad \text{für } k = n; \\ \int_0^T e^{j(n-k)\omega_0 t} dt &= \frac{1}{j(n-k)\omega_0} \left[\underbrace{e^{j(n-k)\cdot 2\pi}}_1 - 1 \right] = 0 \quad \text{für } k \neq n. \end{aligned}$$

Wenn $f(t)$ von der Form $f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega_0 t}$ ist, so berechnet man c_k durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

denn

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{\int_0^T e^{jn\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt}_{\begin{array}{l} T \text{ für } n = k \\ 0 \text{ sonst} \end{array}} = c_k.$$

Hieraus folgt für die Berechnung der Fourierkoeffizienten $a_n, b_n, n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \underbrace{[e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}]}_{2 \cos(n\omega_0 t)} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= j(c_n - c_{-n}) = \frac{j}{T} \int_0^T f(t) \underbrace{[e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}]}_{-2j \sin(n\omega_0 t)} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

Gleichheit trigonometrischer Polynome, Koeffizientenvergleich

Setzt man für je zwei stetige T -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle f|g \rangle = \langle f(t)|g(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt,$$

so ist dadurch ein *inneres Produkt* im Vektorraum V der stetigen T -periodischen Funktionen definiert. Es hat die gleichen Eigenschaften wie das Skalarprodukt für Vektoren im \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n und gestattet, geometrische Begriffe wie Orthogonalität von Vektoren auf Funktionen zu übertragen. Für stetige T -periodische Funktionen f, g und h gelten

$$\begin{aligned} \langle f + g|h \rangle &= \langle f|h \rangle + \langle g|h \rangle \\ \langle f|g + h \rangle &= \langle f|g \rangle + \langle f|h \rangle \\ \langle \alpha f|g \rangle &= \alpha \langle f|g \rangle \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \\ \langle f|\beta g \rangle &= \overline{\beta} \langle f|g \rangle \quad (\beta \in \mathbb{C}) \\ \langle f|g \rangle &= \overline{\langle g|f \rangle} \\ \langle f|f \rangle &\geq 0 \\ \langle f|f \rangle = 0 &\iff f(t) = 0 \text{ für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Daher zeigen die Orthonormalitätsrelationen $\langle e^{jn\omega_0 t} | e^{jk\omega_0 t} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k \end{cases}$, dass die Funktionen $(e^{jn\omega_0 t})_{n \in \mathbb{Z}}$ ein *linear unabhängiges Funktionensystem* im Vektorraum V bilden ($\omega_0 = 2\pi/T$). Der Untervektorraum der T -periodischen trigonometrischen Polynome bis zum Grad N besitzt damit die Dimension $2N + 1$ und er wird aufgespannt von den Funktionen $e^{jn\omega_0 t}$, $-N \leq n \leq N$, $\omega_0 = 2\pi/T$. Sie bilden eine Orthonormalbasis dieses Untervektorraumes bezüglich des oben eingeführten inneren Produktes. Der k -te Fourierkoeffizient c_k eines T -periodischen trigonometrischen Polynoms f ist in dieser Schreibweise¹ gegeben durch

$$c_k = \langle f(t) | e^{jk\omega_0 t} \rangle \quad (\omega_0 = 2\pi/T).$$

Die Fourierkoeffizienten sind daher gerade die Koordinaten des Polynoms bezüglich dieser Orthonormalbasis. Sie sind eindeutig bestimmt, mit anderen Worten,

$$f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = 0$$

für alle t genau dann, wenn alle $c_k = 0$ bzw. alle $a_n = b_n = 0$ sind.

¹ Die Schreibweise $f(t)$ wird hier wie in allem Folgenden nicht nur für den Wert einer Funktion f bei t verwendet, sondern häufig auch zur Notation einer Funktion oder später Distribution f , um den Parameter t mit anzugeben. Trotz dieser ambivalenten Notation – an Stelle von f oder etwa $f(\cdot)$ – erkennt man die Bedeutung leicht aus dem jeweiligen Zusammenhang.

Zwei T -periodische trigonometrische Polynome sind also genau dann gleich, wenn alle ihre Fourierkoeffizienten beim Koeffizientenvergleich übereinstimmen.

Die Formel für die Fourierkoeffizienten zeigt außerdem, dass jedes T -periodische trigonometrische Polynom f vom Grad N folgende *Integraldarstellung* besitzt:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) D_N(t-s) \, ds \quad \text{mit} \quad D_N(t-s) = \sum_{k=-N}^N e^{jk\omega_0(t-s)}.$$

Reellwertige trigonometrische Polynome, komplexe Amplituden, Polarform

Für reellwertige T -periodische trigonometrische Polynome gilt $f(t) = \overline{f(t)}$, also

$$f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-N}^N c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-N}^N \overline{c_k} e^{-jk\omega_0 t} = \overline{f(t)}$$

mit $\omega_0 = 2\pi/T$. Koeffizientenvergleich zeigt:

$$f \text{ ist reellwertig genau dann, wenn } c_k = \overline{c_{-k}} \quad (-N \leq k \leq N).$$

Wegen $c_k = |c_k| e^{j \arg(c_k)}$ und $\arg(c_{-k}) = -\arg(c_k)$ für $k \neq 0$ erhält man dann

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^N |c_k| e^{j(k\omega_0 t + \arg(c_k))} + \sum_{k=1}^N |c_{-k}| e^{-j(k\omega_0 t - \arg(c_{-k}))} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^N |c_k| \cdot 2 \Re \left(e^{j(k\omega_0 t + \arg(c_k))} \right); \end{aligned}$$

es gilt deshalb für diesen Fall die *Darstellung in Polarform*

$$f(t) = c_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^N |c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg(c_k)).$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten beinhalten die Information über die Amplituden und über die Phasen der am Aufbau von f beteiligten Teilschwingungen. Man bezeichnet daher die Größen c_k als *komplexe Amplituden*. \mathbb{C} -wertige trigonometrische Polynome kann man darstellen als zirkuläre Schwingungen (wie auf S. 13 unten), als Ortskurve in \mathbb{C} , durch getrennte Darstellung von Real- und Imaginärteil oder durch Betrags- und Phasen-Verlauf.

Anzahl der Nullstellen trigonometrischer Polynome

Ein T -periodisches trigonometrisches Polynom vom Grad $N > 0$

$$f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$