Das pascalsche Dreieck

Klassenstufen: 7–8 **Mathematische Leitidee:** Zahl, funktionale Zusammenhänge

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Systematisches Bestimmen von Anzahlen
- Untersuchen der Teilbarkeit mithilfe von Teilbarkeitsregeln
- Binomische Formeln und ihre Verallgemeinerung
- Entwickeln und Anwenden von verschiedenen heuristischen Strategien (systematisches Probieren, Nutzen von Zahlbeziehungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten)
- Begründen und Argumentieren, Beweisen von Zahlbeziehungen

Lernmaterialien: **Zeit:** 90 Minuten
- Kopiervorlagen 1 und 2 (KV 2 ggf. häufiger für verschiedene Lösungsansätze)
- Tippseite
- ggf. 4x4-Geobretter und Schnur für jede Gruppe
- ggf. Taschenrechner für jedes Kind
- ggf. Buntstifte

Empfehlungen zum Ablauf:

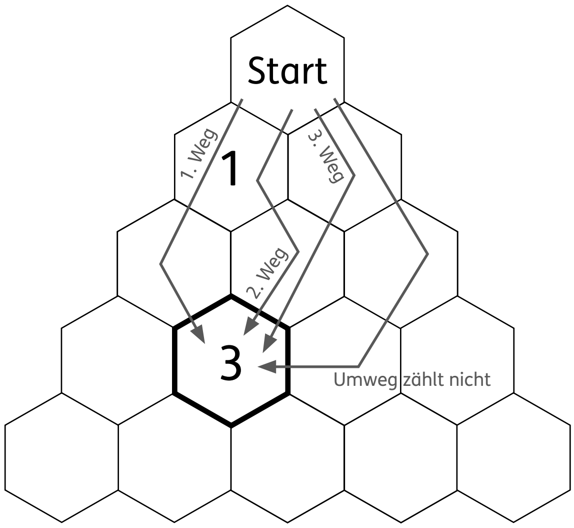
Phase	Inhalt	Material Sozialform
Einstieg 10 min	Die L präsentiert das pascalsche Dreieck von KV 1 und erläutert, wie die Zahlen eingetragen werden: *Die Zahl, die eingetragen wird, nennt die Anzahl der kürzesten Wege von der obersten Wabe bis zu diesem Feld.* Die L und SuS zählen gemeinsam den kürzesten Weg anhand eines Beispiels ab. Dabei können Geobretter zur Veranschaulichung eingesetzt werden: An einer Ecke wird eine Schnur befestigt. Mit der Schnur können die Wege entlang der anderen Nägel ausprobiert werden. Die L weist darauf hin, dass nur kürzeste Wege gezählt werden und keine Umwege.	Plenum KV 1
Forscherphase 60 min	Die SuS vervollständigen selbstständig die Anzahl weiterer Wege auf KV 1. Eventuell entdecken sie dabei schon das Bildungsgesetz zum Aufbau des pascalschen Dreiecks, dass jeder Eintrag die Summe der darüberstehenden Zahlen ist. Zur Kontrolle und Weiterarbeit gibt die L individuell je nach Arbeitsgeschwindigkeit KV 2 früher oder später aus. Die SuS, die keine eigenen Ideen zum Erforschen haben, können die Tippseite nutzen. Es können auch gezielt einzelne Gruppen zur Erforschung je einer der Ideen auf der Tippseite angehalten werden. Diese kann zu diesem Zweck zerschnitten und einzeln verteilt werden.	Einzel-/Partner-/ Gruppenarbeit KV 1 KV 2 ggf. Tippseite
Auswertung 20 min	Einige SuS präsentieren ihre Ergebnisse an der Tafel oder auf ihren KVs. Dabei werden verschiedene Lösungsstrategien und Lösungsdarstellungen besprochen, sodass die Arbeit aller SuS gewürdigt und die Faszination des pascalschen Dreiecks deutlich wird. Werden in der Stunde nur einzelne Ideen erkundet, kann dies auch den Ausgangspunkt für eine langfristige, projektartige Erforschung des pascalschen Dreiecks bilden.	Plenum

Wege im pascalschen Dreieck

Starte deinen Weg in der obersten Wabe.

Zum Feld links darunter gibt es nur einen kürzesten Weg – Umwege sind nicht erlaubt. Wir schreiben dorthin eine 1.

Zu anderen Feldern gibt es mehr als einen Weg. Zum Beispiel kommen wir auf drei verschiedene Arten zum dick umrandeten Feld (s. Abb. rechts).

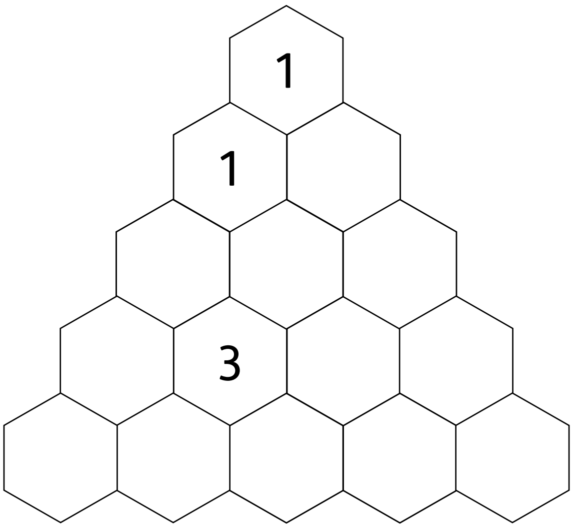


Beispiel: Drei verschiedene kürzeste Wege führen zum markierten Feld.

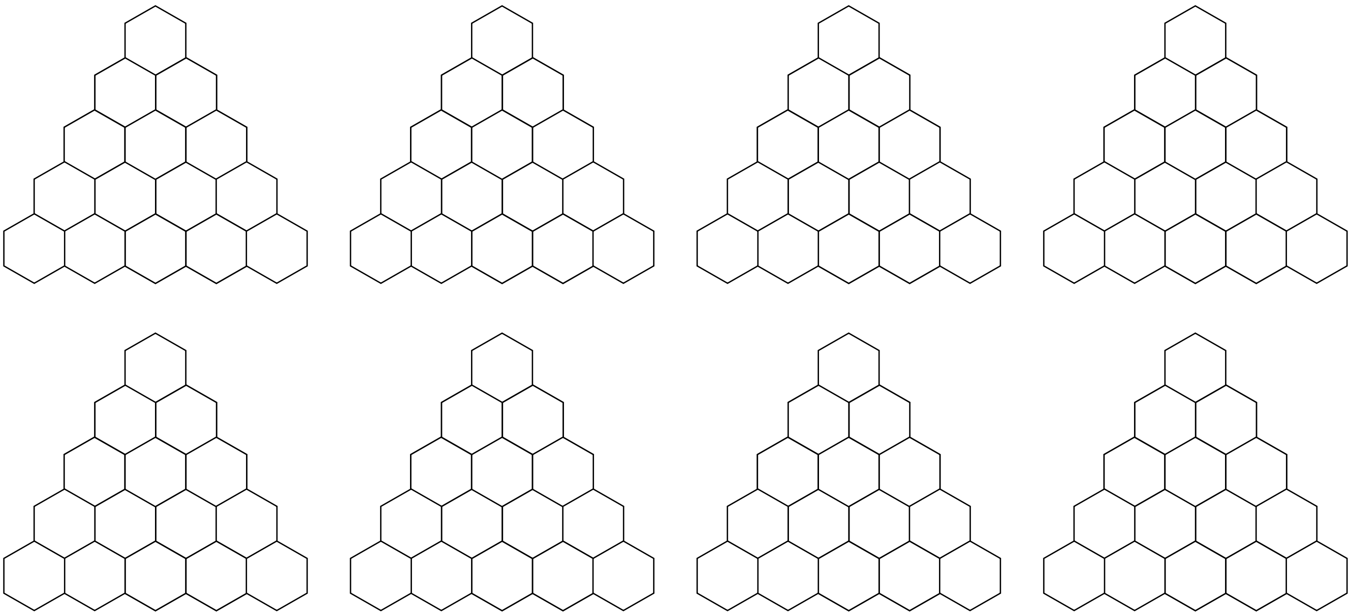
Verfahre genauso für die anderen Waben:

Starte immer in der obersten Wabe. Wie viele kürzeste Wege gibt es? Trage jeweils die Anzahl ein.

Was fällt dir auf?



Platz zum Ausprobieren verschiedener Wege:



Forschen im pascalschen Dreieck

Dieses Dreieck wird pascalsches Dreieck genannt, benannt nach dem französischen Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662). Es ist faszinierend, weil es darin so viel zu entdecken gibt.

Was entdeckst du?

Wie erhält man jeweils die Zahlen der nächsten Reihe?

Suche weitere Gesetzmäßigkeiten, interessante Zahlenfolgen oder Muster.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 927 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1 001 2 002 3 003 3 432 3 003 2 002 1 001 364 91 14 1

1 15 105 455 1 365 3 003 5 005 6 435 6 435 5 005 3 003 1 365 455 105 15 1

1 16 120 560 1 820 4 368 8 008 11 440 12 870 11 440 8 008 4 368 1 820 560 120 16 1

KV 2

Tipp 1

Addiere die Zahlen der waagerechten Reihen, d. h. von links nach rechts.

STOP STOP STOP

KV 2

Tipp 2

Addiere und subtrahiere alle Zahlen einer waagerechten Reihe abwechselnd, z. B.
1 – 3 + 6 – 3 + 1. Begründe!

STOP STOP STOP

KV 2

Tipp 3

Addiere die ersten Zahlen aus einer schräg nach unten verlaufenden Reihe. Das Ergebnis findest du schräg daneben, z. B. 1 + 3 + 6 + 10 = 20. Probiere an verschiedenen Stellen aus. Begründe!

STOP STOP STOP

KV 2

Tipp 4

Markiere in einer neuen Vorlage des pascalschen Dreiecks alle Vielfachen von 5. Nimm dir jeweils eine neue Vorlage und probiere auch die Vielfachen anderer Zahlen aus.

STOP STOP STOP

KV 2

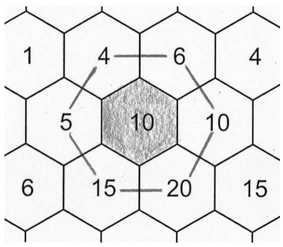
Tipp 5

Du kannst im pascalschen Dreieck alle Potenzen von 11 ablesen, d. h. 11, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, … Bestimme so auch 11^5.

STOP STOP STOP

KV 2

Tipp 6



Bilde das Produkt der Zahlen, die ringförmig eine andere Zahl einschließen (s. Abb.), z. B. $4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 5 = 360000 = 600^2$.

Funktioniert das auch an anderen Stellen? Begründe deine Beobachtung!