

IN DIESEM KAPITEL

erfahren Sie, wofür natürliche Zahlen gebraucht werden

beantworten Sie mit Zahlen ganz unterschiedliche Fragen

bewundern Sie die Eleganz unserer Zahlschreibweise

Kapitel 1

Was sind überhaupt Zahlen?

Finden Sie die Frage, was Zahlen überhaupt sind, merkwürdig? Klar wissen Sie, was Zahlen sind, sie kommen schließlich ständig und überall vor. Dennoch lohnt es sich, der vermeintlich simplen Frage nachzugehen und einige wesentliche Merkmale und Aspekte festzuhalten.

Natürliche Zahlen und ihre Darstellung

Nehmen wir die Zahl zwölf. Je nach Kontext hat diese Zahl sehr unterschiedliche Bedeutungen.

- ✓ Es kann zunächst die Anzahl der Elemente einer Menge sein. Denken Sie zum Beispiel daran, dass noch 12 Bonbons in einer Packung sind. Die dazu passende Frage ist: Wie viele Bonbons sind noch in der Packung? (Fachausdruck: *kardinaler Aspekt*).
- ✓ Oder Sie stehen an der Supermarktkasse in der Schlange. Sie sind dummerweise an zwölfter Stelle. Die Zahl gibt also an, der oder die wievielte Sie sind (Fachausdruck: *ordinaler Aspekt*).
- ✓ In Ihrer Geldbörse befinden sich noch 12 Euro. Oder Sie stemmen im Fitnessstudio eine Hantel mit 12 kg, oder Ihr Wohnhaus ist 12 m lang. Dies sind Beispiele dafür, dass mit Zahlen auch Maße angegeben werden (Fachausdruck: *Maßzahl- oder Größenaspekt*).
- ✓ Einfache Verhältnisse drückt man häufig so aus: »Meine Großmutter ist zwölf Mal so alt wie ich.« (Fachausdruck: *Operatoraspekt*)
- ✓ Ihre Hausnummer ist 12. Damit können Sie Besuchern oder der Post mitteilen, wo man Sie finden kann (Fachausdruck: *Codierungsaspekt*).

Mit natürlichen Zahlen können also je nach Kontext ganz unterschiedliche Informationen vermittelt werden.

Was aber ist nun eine natürliche Zahl?

Der eben erläuterte kardinale Aspekt bietet eine Möglichkeit, diese Frage zu beantworten. In Abbildung 1.1 sehen Sie drei Mengen mit gleich vielen Elementen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Elemente der Menge Gemeinsamkeiten haben oder komplett verschieden sind.

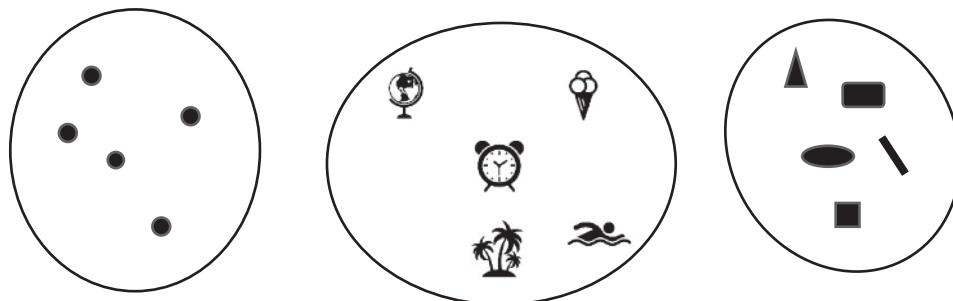


Abbildung 1.1: Drei Mengen mit gleicher Elementanzahl

Illustrationen: © dlyastokiv – stock.adobe.com



Mengen mit gleich vielen Elementen

Ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben, wird geprüft, indem man sie paarweise einander zuordnet (*Eins-zu-Eins-Zuordnung*). Bleiben dann keine Elemente übrig, sind die Mengen gleich groß. Wohlgemerkt braucht man dafür keine Zahlen, sondern nur den gerade beschriebenen direkten Vergleich.

Zahlen sind das, was alle Mengen mit gleich vielen Elementen gemeinsam haben. In Abbildung 1.1 wird die Zahl fünf repräsentiert, aber das Wort »fünf« oder das Zeichen »5« spielen keine Rolle. Die Römer sagten dafür »quinque« und schrieben »V«. In Japan heißt diese Zahl »go«, als Zeichen »五«. Sie sehen den Unterschied zwischen der mathematischen Bedeutung einer Zahl und der Art und Weise, wie man sie schreibt oder spricht.



Eine natürliche Zahl ist so etwas wie die Beschriftung von Schubladen, in denen Mengen mit gleich vielen Elementen liegen.

Startet man mit einer Menge, die ein Element enthält, und legt schrittweise jeweils ein weiteres Element dazu, so wird dieser Vorgang »Zählen« genannt.

Vorschau »Negative Zahlen und Brüche«: Die oben genannten Aspekte natürlicher Zahlen lassen sich für negative Zahlen und Brüche allenfalls eingeschränkt übertragen. So gibt es

keine negativen Maße und Mengen mit negativer Elementanzahl sind auch mit viel Phantasie nicht vorstellbar. Zudem kann man mit Brüchen nicht zählen. Andere Aspekte aber sind auch bei diesen Zahlen wichtig: Mit Formulierungen wie: »in einer dreiviertel Stunde« (Maßzahlaspekt) oder »zweieinhalb mal so viel« (Operatoraspekt) sind wir vertraut.

Zahlsysteme und Zahldarstellungen

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie wir Zahlen aufschreiben. Sie schreiben Zahlen sicher, ohne groß darüber nachzudenken, aber Sie werden sehen, wie elegant die mathematischen Ideen sind, die unseren Gewohnheiten zugrunde liegen.

Wie wir heute mit Zahlen umgehen, ist Ergebnis einer Entwicklung über viele Jahrtausende. Stellen Sie sich einen Schafhirten vor, der am Abend prüfen möchte, ob alle Tiere im Stall sind. Hat er wenige Schafe, fällt das leicht, weil er alle mit Namen kennt. Sind es aber dafür zu viele, nutzt er Objekte oder Zeichen als Hilfsmittel – das ist praktisch. Er ordnet jedem einzelnen Schaf ein Objekt oder Zeichen zu. Es eignen sich die Finger, vielleicht Kieselsteine oder Markierungen auf einem Holzstock (»Kerbholz«). Dieses Vorgehen beim Vergleich der Anzahl an Elementen von verschiedenen Mengen nennt man »Eins-zu-Eins-Zuordnung«. Je größer die Herde ist, umso mehr stößt dieses Vorgehen jedoch an seine Grenzen und die Verwendung von Zahlen zum Zählen zeigt ihre unschlagbaren Vorteile.

Bündelungsprinzip

Beim Zählen größerer Mengen kommt die erste geniale Idee eines Zahlsystems zum Zug: Das Prinzip der *Bündelung*. Mit folgendem Beispiel soll die Bündelungsidee erläutert werden:



In Abbildung 1.2 sehen Sie links Schafe, die zu zählen sind. Vielleicht würden Sie Zweiergruppen zählen: zwei, vier, sechs, acht, ... Das ist dann eine Zweier-Bündelung. Im Bild ist rechts eine Achter-Bündelung dargestellt. Man zählt dann vier Achtergruppen und fünf einzelne Schafe. Diese Idee hilft dem Hirten, die Schafe einer größeren Herde schnell und sicher zu zählen, egal, welche Bündelungseinheit er verwendet.

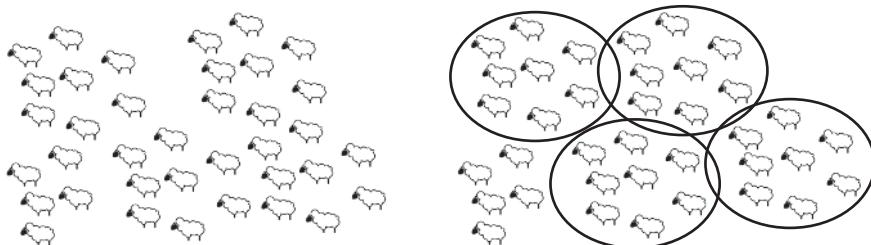


Abbildung 1.2: Eine Schafherde ohne und mit »Bündelung«
Illustration Schaf: © ahmadwahyu27 – stock.adobe.com

In der Praxis sind heute vor allem zwei Bündelungseinheiten gebräuchlich: Die Zehner-Bündelung im Dezimalsystem und die Zweier-Bündelung im Dualsystem, das in digitalen Geräten verwendet wird. Für die Schafherde in Abbildung 1.2 würden wir im Dezimalsystem angeben, dass es sich um drei Zehnergruppen und acht einzelne Schafe handelt. Die alten Römer verwendeten eine Mischung aus Fünfer- und Zehner-Bündelung. Sie hätten gesagt, dass es drei Zehnergruppen, eine Fünfergruppe und drei einzelne Schafe sind.

Nun gibt es natürlich auch Mengen mit viel mehr Elementen. Dann setzt man die Bündelung fort: Im Dezimalsystem bilden 10 Zehnerbündel ein Hunderterbündel, 10 Hunderterbündel werden zu einem Tausenderbündel zusammengefasst und so fort.

Die Bündelungseinheiten 1, 10, 100, 1000, ... nennt man *Stufenzahlen*. Die Stufenzahlen des Dualsystems sind dann entsprechend 1, 2, 4 (2 Zweierbündel), 8 (2 Viererbündel), 16 (2 Achterbündel) und so weiter.

Stellenwertprinzip

Die römische Art, Zahlen zu schreiben, soll hier nicht vertieft werden, da gibt es ziemlich viele seltsame Regeln zu beachten. Wichtig ist nur die Idee, dass Sie die für bestimmte Anzahlen verwendeten Zeichen nebeneinander schreiben und die Werte addieren beziehungsweise subtrahieren. Die Anzahl der Schafe in Bild 1.2 wird dann so angegeben: XXXVII. X steht für einen Zehner, V für einen Fünfer und I für einen Einer. Die so aufgeschriebene Zahl bedeutet also übersetzt: $10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 37$. Das kann für manche Zahlen recht kompliziert werden, vermutlich schreibt deshalb heute niemand mehr so.

Die zweite geniale Idee, die zu einer Schreibweise führt, mit der man auch große Zahlen übersichtlich und leicht handhabbar darstellen kann, ist das *Stellenwertprinzip*. Dieses Prinzip ist Ihnen sehr vertraut, Sie verwenden es, vielleicht ohne darüber nachzudenken.

Im Dezimalsystem haben wir zehn Zeichen – in unserem Kulturkreis sind das die *Ziffern* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Eine Zahl wird so dargestellt, dass die Ziffern je nach Position einen anderen Wert repräsentieren. Jede Position entspricht einer Bündelungseinheit (= Stufenzahl). Von rechts nach links sind das Einer (einzelne Schafe), Zehner (zehn Schafe), Hunderter (zehn Zehnerbündel), Tausender (zehn Hunderter beziehungsweise 100 Zehner) und so weiter.



Mit der Zeichenfolge »1234« ist also gemeint: 1 Tausender (T), 2 Hunderter (H), 3 Zehner (Z), 4 Einer (E). Um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten, kann man Ziffern in eine *Stellenwerttafel* eintragen. In Abbildung 1.3 wurden die Zahlen 1234 und 50 006 dargestellt. An der Zahl 50 006 kann man sehen, wie wichtig die 0 für ein Stellenwertsystem ist. Man muss die nicht vorkommenden Stellenwerte »ausblenden« können.

ZT	T	H	Z	E
	1	2	3	4
5	0	0	0	6

Abbildung 1.3: Stellenwerttafel



Beachten Sie den Unterschied zwischen »Zahlen« und »Ziffern«! Ziffern sind die Zeichen, mit denen wir Zahlen schreiben und haben je nach ihrer Position einen anderen (Stellen-)Wert.

Sprechweisen

Es ist schon komisch, wie wir beim Zählen sprechen – finden Sie nicht? Sobald es über die Zehn hinausgeht, fangen wir mit der Einerstelle an und sprechen dann die Zehner, zum Beispiel Sieb-Zehn. Geht es über 100, springen wir von der Hunderter- zur Einer- und dann zur Zehnerstelle: Dreihundert-Vier-und-Zwanzig. Da sollen Kinder nicht durcheinander kommen!



Im Englischen zählt man nur zwischen 11 und 20 »verdreht« und die Kapriolen der französischen Zählweise (»quatre-vingt-dix-sept« – übersetzt: »Vier-Zwanzig-Zehn-Sieben« für 97) sind vielleicht amüsant, vereinfachen das Lernen aber auch nicht gerade.

Es ist übrigens interessant, dass die meisten Menschen immer in ihrer Muttersprache zählen, auch wenn sie eine Fremdsprache perfekt beherrschen.

