



Quantenmechanik

Eine Einführung des Nobelpreisträgers
Steven Weinberg

Steven Weinberg

EXTRAS
ONLINE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Lernziele

1 Rotationen

- Endliche Rotationen, Wirkung auf physikalische Zustände
- Infinitesimale Rotationen
- Kommutatorrelationen, Gesamtdrehimpuls, Spin

2 Multipletts des Drehimpulses

- Aufsteige- und Absteigeoperatoren
- Spektrum von \mathbf{J}^2 und J_3 , Spinmatrizen, Pauli-Matrizen, J_3 -Unabhängigkeit
- Stern-Gerlach-Experiment

3 Addition von Drehimpulsen

- Basiswahl, Clebsch-Gordan-Koeffizienten
- Summenregeln, Zustände des Wasserstoffs, $SU(2)$ -Formalismus

4 Das Wigner-Eckart-Theorem

- Transformationseigenschaften von Operatoren
- Theorem für Matrixelemente, parallele Matrixelemente
- Auswahlregeln der Photonenemission

5 Bosonen und Fermionen

- Symmetrische und antisymmetrische Zustände, Verbindung zum Spin
- Hartree-Näherung, Paulis Ausschlussprinzip
- Periodensystem der Elemente, Magische Zahlen für Atomkerne
- Temperatur und chemisches Potenzial, Statistik
- Isolatoren, Leiter, Halbleiter

6 Innere Symmetrien

- Ladungssymmetrie, Isospin-Symmetrie
- Pionen, Δ s, Strangeness, $U(1)$ -Symmetrien, $SU(3)$ -Symmetrie

7 Inversionen

- Räumliche Inversion
- Bahnparität, Intrinsische Parität, Parität von Pionen
- Verletzungen der Paritätserhaltung, \mathbf{P} , \mathbf{C} und \mathbf{T}

8 Algebraische Herleitung des Wasserstoffspektrums

- Runge-Lenz-Vektor, $SO(3) \otimes SO(3)$ -Vertauschungsrelationen
- Energieniveaus, Streuzustände

Spin et cetera

4

4.1 Rotationen	127
4.2 Multipletts des Drehimpulses	132
4.3 Addition von Drehimpulsen	137
4.4 Das Wigner-Eckart-Theorem	145
4.5 Bosonen und Fermionen	149
4.6 Innere Symmetrien	158
4.7 Inversionen	165
4.8 Algebraische Herleitung des Wasserstoffspektrums . .	170
Aufgaben	174

ÜBERBLICK

» Die Wellenmechanik versagte vollkommen bei der Begründung der Vielzahl der atomaren Energieniveaus. Am auffälligsten war dies im Fall der Alkalimetalle, Lithium, Natrium, Kalium und so weiter. Man wusste, dass man ein Atom irgendeines dieser Elemente als einen mehr oder weniger inerten Kern, bestehend aus dem eigentlichen Atomkern und den $Z - 1$ inneren Elektronen, zusammen mit einem einzelnen äußeren Elektron behandeln kann, wobei die Übergänge des einzelnen Elektrons zwischen den Energieniveaus für die Spektrallinien verantwortlich sind. Da das vom äußeren Elektron erfahrene elektrostatische Feld kein Coulomb-Feld ist, hängen seine Energieniveaus von der Drehimpulsquantenzahl ℓ ebenso ab wie von der Radialquantenzahl n , aber aufgrund der sphärischen Symmetrie des Atoms nicht von der z -Komponente des Drehimpulses, $\hbar m$ (siehe Gleichung (2.1.29)). Für jeden Satz von n , ℓ und m sollte es gerade ein Energieniveau geben. Beobachtungen atomarer Spektren zeigten jedoch, dass in Wirklichkeit alle Zustände bis auf die s -Zustände verdoppelt waren. Zum Beispiel zeigt schon ein schwach auflösendes Spektrometer, dass die D -Linie des Natriums, die durch einen Übergang $3p \rightarrow 3s$ erzeugt wird, ein Dublett mit Wellenlängen 5896 und 5890 Angström ist. Dies motivierte Pauli vorzuschlagen, dass es für Elektronen in solchen Atomen eine vierte Quantenzahl zusätzlich zu n , ℓ und m gibt, wobei die vierte Quantenzahl in allen Zuständen außer in den s -Zuständen genau zwei Werte annehmen kann. Aber « die physikalische Bedeutung dieser vierten Quantenzahl blieb obskur.

Im Jahr 1925 schlugen dann zwei junge Physiker, der Theoretiker George Uhlenbeck (1900–1988) und der Experimentator Samuel Goudsmit (1902–1978), vor,¹ dass die Verdoppelung der Energieniveaus auf einen intrinsischen Drehimpuls des Elektrons zurückzuführen sei, dessen Komponente in der Richtung von \mathbf{L} (für $\mathbf{L} \neq 0$) nur zwei Werte annehmen kann und dessen Wechselwirkung mit dem schwachen magnetischen Feld, das von der Bahnbewegung des Elektrons erzeugt wird, alle Zustände außer den s -Zuständen in fast entartete Dublette aufspaltet. Jede Komponente eines Drehimpulses s würde $2s + 1$ Werte annehmen, daher müsste die Größe s , die ℓ für den intrinsischen Drehimpuls entspricht, den ungewöhnlichen Wert $1/2$ annehmen. Dieser intrinsische Drehimpuls wurde schließlich **Spin** des Elektrons genannt.

Zunächst stieß diese Idee auf großen Unglauben. Wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, kann der Bahndrehimpuls nicht den Wert $\ell = 1/2$ annehmen. Ein weiteres Problem war, dass eine Kugel mit der Masse des Elektrons und einem Drehimpuls $\hbar/2$ an ihrer Oberfläche nur dann eine Rotationsgeschwindigkeit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit hat, wenn ihr Radius größer als $\hbar/2m_e c \simeq 2 \times 10^{-11}$ cm ist, und man nahm an, dass ein so großer Elektronenradius der Beobachtung nicht entgangen wäre. Der Spin des Elektrons wurde ein wenig später respektabler, als mehrere Autoren² zeigten, dass die Kopplung zwischen dem Spin des Elektrons und seiner Bahnbewegung die Feinstruktur des Wasserstoff erklärte – die Aufspaltung der Zustände mit $\ell \neq 0$ in Dublette. (Wir besprechen das in Abschnitt 4.2.)

Die Zweifel an Modellen rotierender Elektronen rührten von dem bleibenden Wunsch, Quantenphänomene in klassischen Begriffen zu verstehen. Wir sollten stattdessen die Existenz sowohl von Bahndrehimpuls als auch von Spin als Konsequenzen eines Symmetriepinzips auffassen. Wir haben in den Abschnitten 3.4–3.6 gesehen, wie sich aus Symmetriepinzipien die Existenz von Erhaltungsgrößen wie Energie und Impuls ergibt. Es gibt noch eine andere klassische Symmetrie in nichtrelativistischer und relativistischer Physik, nämlich die Invarianz unter räumlichen Rotationen. In Abschnitt 4.1 werden wir zeigen, wie Rotationsinvarianz in der Quantenmechanik auf die Existenz eines erhaltenen Drehimpuls-Dreivektors \mathbf{J} führt. Die Vertauschungsrelationen dieser Operatoren werden in Abschnitt 4.2 verwendet, um das Eigenwertspektrum von \mathbf{J}^2 und J_3 herzuleiten und herauszufinden, wie alle drei Komponenten von \mathbf{J} auf die entsprechenden Eigenzustände wirken. Es stellt sich heraus, dass die Eigenwerte von J_3 ganzzahlige oder halb-ganzzahlige Vielfache von \hbar sein können. Im Allgemeinen ist der Drehimpuls \mathbf{J} eines Teilchens die Summe aus seinem Bahndrehimpuls, den wir bereits in Abschnitt 2.1 diskutiert haben, und einem Spindrehimpuls, der sowohl halb-ganzzahlige als auch ganzzahlige Werte annehmen kann. Außerdem ist in einem Vielteilchensystem der Gesamtdrehimpuls des Systems die Summe der Drehimpulse der einzelnen Teilchen. Aus beiden Gründen werden wir in Abschnitt 4.3 überlegen, wie die Eigenzustände von \mathbf{J}^2 und J_3 für die Summe von zwei Drehimpulsen aus den entsprechenden Eigenzuständen für die ein-

¹ S. Goudsmit und G. Uhlenbeck, Naturwiss. **13**, 953 (1925); Nature **117**, 264 (1926).

² W. Heisenberg und P. Jordan, Z. f. Physik **37**, 263 (1926); C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. Lond. **A116**, 227 (1927).

zelen Drehimpulse konstruiert werden können. In Abschnitt 4.4 werden die Regeln für die Drehimpulsaddition verwendet, um eine als Wigner-Eckart-Theorem bekannte Formel für die Matricelemente von Operatoren zwischen Multipletts von Drehimpulseigenzuständen herzuleiten. Abschnitt 4.5 behandelt die Beziehung zwischen dem Spin eines Teilchens und der Symmetrie oder Antisymmetrie des Zustandsvektors in Vielteilchenzuständen und leitet Konsequenzen für Atom- und Kernphysik ab.

Es stellt sich heraus, dass nicht nur das Elektron, sondern auch das Proton und Neutron Spin $1/2$ haben. Manchmal wird gesagt, dass dieser Wert des Spins des Elektrons und anderer Teilchen eine Konsequenz der Relativitätstheorie ist. Das kommt daher, dass Dirac 1928 eine Art von relativistischer Wellenmechanik³ entwickelte, bei der die Teilchen der Theorie Spin $1/2$ haben mussten. Aber Diracs relativistische Wellenmechanik ist nicht der einzige Weg, Relativitätstheorie und Quantenmechanik zu verbinden. In der Tat zeigten Pauli und Victor Weisskopf (1908–2002) im Jahr 1934,⁴ wie man eine relativistische Quantenmechanik für Teilchen ohne Spin konstruieren könnte. Heute kennen wir Teilchen wie die Z - und W -Teilchen, die ebenso elementar wie das Elektron zu sein scheinen und Spin $j = 1$ und nicht $j = 1/2$ zeigen. Es gibt nichts beim Spin, für das man die Relativitätstheorie berücksichtigen muss, und nichts in der Relativitätstheorie, dass verlangt, dass Elementarteilchen Spin $1/2$ haben müssen.

Obwohl man es zunächst nicht wusste, legt der Spin eines Teilchens fest, ob die Wellenfunktion von mehreren Teilchen des gleichen Typs in den Ortskoordinaten symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Wir besprechen dies in Abschnitt 4.5, zusammen mit einigen der Konsequenzen für Atome, Gase und Kristalle.

Unter Verwendung unseres Wissens zum Drehimpuls werden wir in den Abschnitten 4.6 und 4.7 zwei andere Arten von Symmetrie betrachten: innere Symmetrien wie etwa die Isospin-Symmetrie und die Symmetrie unter Rauminversion. Abschnitt 4.8 zeigt, dass es für das Coulomb-Potenzial zwei unterschiedliche Dreiervektoren mit den Eigenschaften eines Drehimpulses gibt, und nutzt die Eigenschaften solcher in Abschnitt 4.2 hergeleiteter Dreiervektoren, um eine algebraische Berechnung des Wasserstoffspektrums durchzuführen.

³ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, 610 (1928).

⁴ W. Pauli und V. F. Weisskopf, Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).

4.1 Rotationen

Eine Rotation (Drehung) ist eine reelle lineare Transformation $x_i \mapsto \sum_j R_{ij}x_j$ der kartesischen Koordinaten x_i , die das Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_i x_i y_i$ invariant lässt. Das heißt,

$$\sum_i \left(\sum_j R_{ij}x_j \right) \left(\sum_k R_{ik}y_k \right) = \sum_i x_i y_i,$$

wobei die Summen über i, j, k , usw. die Werte 1, 2, 3 durchlaufen. Indem wir die Koeffizienten von $x_j y_k$ auf beiden Seiten der Gleichung gleich setzen, erhalten wir die grundlegende Bedingung für eine Rotation:

$$\sum_i R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \quad (4.1.1)$$

oder in Matrixschreibweise

$$R^T R = 1, \quad (4.1.2)$$

wobei R^T für das Transponierte einer Matrix steht, $[R^T]_{ji} = R_{ij}$; 1 ist hier die Einheitsmatrix, $[1]_{jk} = \delta_{jk}$.

Nicht alle Transformationen $x_i \mapsto \sum_j R_{ij}x_j$, bei denen R_{ij} Gleichung (4.1.2) genügt, sind Rotationen. Berechnet man die Determinante von Gleichung (4.1.2) und nutzt, dass die Determinante des Produkts von Matrizen gleich dem Produkt der Determinanten ist und dass die Determinante der Transponierten einer Matrix gleich der Determinante der Matrix ist, so sieht man, dass $[\text{Det } R]^2 = 1$ ist; somit kann $\text{Det } R$ nur +1 oder -1 sein. Die Transformationen mit $\text{Det } R = -1$ sind Rauminversionen; ein Beispiel ist die einfache Transformation $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$. Wir werden diese Transformationen in Abschnitt 4.7 betrachten. Die Transformationen mit $\text{Det } R = +1$ sind die Rotationen, die uns hier interessieren. Die Rotationen bilden untereinander eine Gruppe, da jedes Produkt von Matrizen mit Determinanten 1 wieder Determinante 1 hat. Diese Gruppe bezeichnet man als die spezielle orthogonale Gruppe in drei Dimensionen oder $SO(3)$; dabei bedeutet »orthogonal«, dass sie aus reellen (3×3) -Matrizen besteht, die Gleichung (4.1.1) genügen, und »speziell« steht dafür, dass diese Matrizen Determinante 1 haben.

Wie andere Symmetrietransformationen auch, induziert eine Rotation R eine unitäre Transformation im Hilbertraum physikalischer Zustände, in diesem Fall $\Psi \mapsto U(R)\Psi$. Führen wir eine Rotation R_1 und dann eine Rotation R_2 aus, so erfahren die physikalischen Zustände die Transformation $\Psi \mapsto U(R_2)U(R_1)\Psi$, was aber dasselbe sein muss, wie wenn wir eine Rotation $R_2 R_1$ ausgeführt hätten, es gilt also⁵

$$U(R_2)U(R_1) = U(R_2 R_1). \quad (4.1.3)$$

⁵ Im Allgemeinen könnte ein Phasenfaktor $\exp[i\alpha(R_1, R_2)]$ auf der rechten Seite dieser Beziehung auftauchen. Aber das ist nicht der Fall für Rotationen, die aus Rotationen um sehr kleine Winkel aufgebaut werden können, was der uns hier interessierende Fall ist. Für eine detaillierte Diskussion dieses Punkts siehe S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. I (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), S. 52–53 und Abschnitt 2.7.

Wirkt $U(R)$ auf den Operator \mathbf{V} , der eine vektorielle Observable darstellt (wie den Ortsvektor \mathbf{X} oder den Impulsvektor \mathbf{P}), so induziert es eine Rotation

$$U^{-1}(R)V_i U(R) = \sum_j R_{ij} V_j. \quad (4.1.4)$$

Im Gegensatz zu Inversionen können Rotationen infinitesimal sein. In diesem Fall gilt

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij} + O(\omega^2) \quad (4.1.5)$$

mit infinitesimalem ω_{ij} . Die Bedingung (4.1.2) gibt in diesem Fall

$$1 = \left(1 + \omega^T + O(\omega^2)\right) \left(1 + \omega + O(\omega^2)\right) = 1 + \omega^T + \omega + O(\omega^2),$$

somit gilt $\omega^T = -\omega$, beziehungsweise

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij}. \quad (4.1.6)$$

Für solche infinitesimalen Drehungen muss der unitäre Operator $U(R)$ die Gestalt

$$U(1 + \omega) \rightarrow 1 + \frac{i}{2\hbar} \sum_{ij} \omega_{ij} J_{ij} + O(\omega^2) \quad (4.1.7)$$

annehmen, wobei $J_{ij} = -J_{ji}$ ein Satz hermitescher Operatoren ist. (Der Faktor $1/\hbar$ wird in der Definition (4.1.7) eingeführt, um den Operatoren J_{ij} Einheiten von \hbar zu geben, die denen von Abstand mal Impuls entsprechen.)

Wie bei den Generatoren von Symmetrietransformationen üblich, kann die Transformationseigenschaft anderer Observablen durch Vertauschungsrelationen dieser Observablen mit den Generatoren der Symmetrie ausgedrückt werden. Wenden wir Gleichung (4.1.7) etwa in der Transformationsregel (4.1.4) für einen Vektor \mathbf{V} an, so erhalten wir

$$\frac{i}{\hbar} [V_k, J_{ij}] = \delta_{ik} V_j - \delta_{jk} V_i. \quad (4.1.8)$$

Wir können auch die Transformationsregel der Operatoren J_{ij} und ihre Kommutatorrelationen untereinander herleiten. Als eine Anwendung von Gleichung (4.1.3) erhalten wir

$$U(R'^{-1})U(1 + \omega)U(R') = U(R'^{-1}(1 + \omega)R') = U(1 + R'^{-1}\omega R')$$

für beliebige $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ und beliebiges R' , und zwar unabhängig von ω . In erster Ordnung in ω haben wir dann

$$\sum_{ij} \omega_{ij} U(R'^{-1})J_{ij}U(R') = \sum_{kl} (R'^{-1}\omega R')_{kl} J_{kl} = \sum_{ijkl} R'_{ik} R'_{jl} \omega_{ij} J_{kl},$$

wobei wir Gleichung (4.1.2) verwendet haben, die $R'^{-1} = R'^T$ ergibt. Setzen wir die Koeffizienten von ω_{ij} auf beiden Seiten dieser Gleichung gleich, so erhalten wir die Transformationsregel für den Operator J_{ij} :

$$U(R'^{-1})J_{ij}U(R') = \sum_{kl} R'_{ik} R'_{jl} J_{kl}. \quad (4.1.9)$$

Somit ist J_{ij} ein **Tensor**. Wir können das noch einen Schritt weitertreiben und R' selbst als infinitesimale Rotation der Gestalt $R' \rightarrow 1 + \omega'$ annehmen, wobei $\omega'_{ij} = -\omega'_{ji}$ infinitesimal sind. Dann ergibt Gleichung (4.1.9) in erster Ordnung in ω'

$$\frac{i}{2\hbar} \left[J_{ij}, \sum_{kl} \omega'_{kl} J_{kl} \right] = \sum_{kl} \left(\omega'_{ik} \delta_{jl} + \omega'_{jl} \delta_{ik} \right) J_{kl} = \sum_k \omega'_{ik} J_{kj} + \sum_l \omega'_{jl} J_{il}.$$

Setzen wir die Koeffizienten von ω'_{kl} auf beiden Seiten dieser Gleichung gleich, so bekommen wir die Kommutatorrelation der J :

$$\frac{i}{\hbar} [J_{ij}, J_{kl}] = -\delta_{il} J_{kj} + \delta_{ik} J_{lj} + \delta_{jk} J_{il} - \delta_{jl} J_{ik}. \quad (4.1.10)$$

Bis jetzt war alles auf rotationsinvariante Theorien in Räumen beliebiger Dimension anwendbar. In drei Dimensionen ist es sehr praktisch, J_{ij} durch einen dreikomponentigen Operator \mathbf{J} auszudrücken, der durch

$$J_1 \equiv J_{23}, \quad J_2 \equiv J_{31}, \quad J_3 \equiv J_{12}$$

definiert ist. Kompakter schreibt man

$$J_k \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} J_{ij}, \quad J_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk} J_k, \quad (4.1.11)$$

wobei ϵ_{ijk} eine vollständig antisymmetrische Größe ist, deren einzige nicht-verschwindenden Komponenten $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$ und $\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$ sind. Der unitäre Operator für infinitesimale Drehungen (4.1.7) nimmt dann die Gestalt

$$U(1 + \omega) \rightarrow \mathbf{1} + \frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{O}(\omega^2) \quad (4.1.12)$$

an mit $\omega_k \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \omega_{ij}$. Hier wird um einen infinitesimalen Winkel $|\boldsymbol{\omega}|$ um eine Achse entlang der Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ gedreht.

Durch \mathbf{J} ausgedrückt, bekommt die charakteristische Eigenschaft (4.1.8) eines Dreiervektors \mathbf{V} die Gestalt

$$[J_i, V_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} V_k. \quad (4.1.13)$$

(Gleichung (4.1.8) ergibt zum Beispiel $[J_1, V_2] = [J_{23}, V_2] = i\hbar V_3$.) Ferner wird die Vertauschungsrelation (4.1.10) zu

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k. \quad (4.1.14)$$

(Gleichung (4.1.10) ergibt zum Beispiel $[J_1, J_2] = [J_{23}, J_{31}] = -i\hbar J_{21} = i\hbar J_3$.) Somit ist \mathbf{J} selbst ein Dreiervektor. Man mag sich erinnern, dass Gleichung (4.1.14) der gleiche Kommutator wie (2.1.11) ist, der vom Bahndrehimpulsoperator \mathbf{L} erfüllt wird, hier aber aus der Annahme der Rotationsinvarianz ohne Annahmen über Orte oder Impulse hergeleitet wurde. Diese Kommutatorrelation wird die Grundlage unserer Behandlung des Drehimpulses in den folgenden Abschnitten sein.

Es sei am Rande bemerkt, dass es keine Überraschung sein sollte, dass die durch Gleichung (4.1.11) definierte Größe \mathbf{J} ein Vektor ist: Obwohl die Komponenten von ϵ_{ijk} in allen Koordinatensystemen identisch sind, handelt es sich um einen Tensor, das heißt

$$\epsilon_{ijk} = \sum_{i'j'k'} R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \epsilon_{i'j'k'}. \quad (4.1.15)$$

Das kommt daher, dass die rechte Seite vollständig antisymmetrisch in i, j , und k ist und somit proportional zu ϵ_{ijk} sein muss. Aufgrund der Definition von Determinanten ist der Proportionalitätsfaktor gerade $\text{Det } R$, was für Rotationen $+1$ ist. Weiß man, dass ϵ_{ijk} und J_{ij} Tensoren sind, so wird aus Gleichung (4.1.11) klar, dass J_i ein Dreiervektor ist.

Kehren wir nun zu dem Punkt zurück, den wir in der Einführung zu diesem Kapitel aufgebracht haben, nämlich dass sich der Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} eines Teilchens von seinem Bahndrehimpuls \mathbf{L} unterscheiden kann. Wenn \mathbf{J} der wahre Generator der Drehungen ist, so besteht die Kommutatorbeziehung (4.1.13) zu *jedem* Vektor mit \mathbf{J} , nicht mit \mathbf{L} . Wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, zeigt eine direkte Berechnung, dass für ein Teilchen in einem Zentralpotenzial der Operator $\mathbf{L} \equiv \mathbf{X} \times \mathbf{P}$ die gleiche Vertauschungsrelation (4.1.14) wie \mathbf{J} erfüllt:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k, \quad (4.1.16)$$

und da \mathbf{L} ein Vektor ist, muss

$$[J_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (4.1.17)$$

gelten. Wenn wir also einen Operator $\mathbf{S} \equiv \mathbf{J} - \mathbf{L}$ definieren, sodass

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (4.1.18)$$

dann erhalten wir durch Subtraktion von Gleichung (4.1.16) von Gleichung (4.1.17), dass

$$[S_i, L_j] = 0 \quad (4.1.19)$$

gilt. Aus den Gleichungen (4.1.19), (4.1.18), (4.1.16) und (4.1.14) bekommen wir

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} S_k. \quad (4.1.20)$$

Somit wirkt \mathbf{S} wie eine neue Art von Drehimpuls und kann als eine intrinsische Eigenschaft eines Teilchens aufgefasst werden, die man **Spin** nennt. In Abschnitt 2.1 haben wir letztlich angenommen, dass das behandelte Teilchen $\mathbf{S} = 0$ hat, was aber für das Elektron und verschiedene andere Teilchen nicht zutrifft.

Der Spinoperator wird nicht aus den Orts- und Impulsoperatoren des Teilchens gebildet. Er kommutiert vielmehr mit ihnen. Eine direkte Rechnung ergibt

$$[L_i, X_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} X_k, \quad [L_i, P_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} P_k, \quad (4.1.21)$$

während als Spezialfall von Gleichung (4.1.13)

$$[J_i, X_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} X_k, \quad [J_i, P_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} P_k \quad (4.1.22)$$

gilt. Die Differenz der Gleichungen (4.1.21) und (4.1.22) ergibt dann

$$[S_i, X_j] = [S_i, P_j] = 0. \quad (4.1.23)$$

Ein System, das mehrere Teilchen enthält, hat einen Gesamtdrehimpuls, der durch die Summe der Bahndrehimpulse \mathbf{L}_n und Spins \mathbf{S}_n der einzelnen Teilchen (hier mit Indizes n, n' bezeichnet) gegeben ist:

$$\mathbf{J} = \sum_n \mathbf{L}_n + \sum_n \mathbf{S}_n. \quad (4.1.24)$$

Weil sie auf verschiedene Teilchen wirken, nehmen die Kommutatorrelationen für die Beiträge zu \mathbf{J} die allgemeine Gestalt

$$[L_{ni}, L_{n'j}] = i\hbar \delta_{nn'} \sum_k \epsilon_{ijk} L_{nk}, \quad (4.1.25)$$

$$[L_{ni}, S_{n'j}] = 0, \quad (4.1.26)$$

$$[S_{ni}, S_{n'j}] = i\hbar \delta_{nn'} \sum_k \epsilon_{ijk} S_{nk} \quad (4.1.27)$$

an, sodass \mathbf{J} Gleichung (4.1.14) genügt. Ferner wirkt \mathbf{L}_n nur auf die Koordinaten des n -ten Teilchens, somit gilt

$$[L_{ni}, X_{n'j}] = i\hbar \delta_{nn'} \sum_k \epsilon_{ijk} X_{nk}, \quad [L_{ni}, P_{n'j}] = i\hbar \delta_{nn'} \sum_k \epsilon_{ijk} P_{nk}, \quad (4.1.28)$$

während

$$[S_{ni}, X_{n'j}] = [S_{ni}, P_{n'j}] = 0 \quad (4.1.29)$$

gilt.

Da wir keinen expliziten Ausdruck für \mathbf{S} oder \mathbf{J} haben, ist es wichtig, nur mithilfe der Vertauschungsrelationen berechnen zu können, wie Drehimpulsoperatoren auf physikalische Zustände im Allgemeinen wirken. Wir werden dies im nächsten Abschnitt für \mathbf{J} berechnen, aber das gleiche Vorgehen gilt auch für \mathbf{S} und \mathbf{L} sowie den Gesamtdrehimpuls, den Spin oder den Bahndrehimpuls einzelner Teilchen.

4.2 Multipletts des Drehimpulses

Wir werden nun die Eigenwerte von \mathbf{J}^2 und J_3 berechnen, sowie die Wirkung von \mathbf{J} auf ein Multiplett von Eigenvektoren dieser Operatoren, wobei \mathbf{J} ein beliebiger hermitescher Operator ist, der den Vertauschungsrelationen (4.1.14) genügt.

Zunächst halten wir fest, dass

$$[J_3, (J_1 \pm iJ_2)] = i\hbar J_2 \pm i(-i\hbar J_1) = \pm \hbar (J_1 \pm iJ_2) \quad (4.2.1)$$

gilt. Somit wirken $J_1 \pm iJ_2$ als **Aufsteige- und Absteigeoperatoren**: Für einen Zustandsvektor Ψ^m , der die Eigenwertbedingung $J_3\Psi^m = \hbar m\Psi^m$ (für beliebiges m) erfüllt, haben wir

$$J_3 (J_1 \pm iJ_2) \Psi^m = (m \pm 1) \hbar (J_1 \pm iJ_2) \Psi^m,$$

somit ist der Zustand $(J_1 \pm iJ_2)\Psi^m$, sofern er nicht verschwindet, ein Eigenzustand von J_3 mit Eigenwert $\hbar(m \pm 1)$. Da \mathbf{J}^2 mit J_3 vertauscht, können wir Ψ^m als Eigenvektor von \mathbf{J}^2 und J_3 zugleich wählen. Da \mathbf{J}^2 mit $(J_1 \pm iJ_2)$ vertauscht, haben alle Zustandsvektoren, die untereinander mit Absteige- und/oder Aufsteigeoperatoren verbunden sind, den gleichen Eigenwert für \mathbf{J}^2 .

Es muss nun ein Maximum und ein Minimum für die Eigenwerte von J_3 geben, die auf diese Weise erreicht werden können, denn das Quadrat eines beliebigen Eigenwerts von J_3 ist zwangsläufig *kleiner* als der Eigenwert von \mathbf{J}^2 . Das ist so, weil in einem normierten Zustand Ψ , der einen Eigenwert a für J_3 und einen Eigenwert b für \mathbf{J}^2 hat, die Ungleichung

$$b - a^2 = (\Psi, (\mathbf{J}^2 - J_3^2)\Psi) = (\Psi, (J_1^2 + J_2^2)\Psi) \geq 0$$

gilt. Es ist üblich, eine Größe j als den Maximalwert der Eigenwerte von J_3/\hbar für eine bestimmte Menge von Zustandsvektoren einzuführen, die untereinander durch Auf- und Absteigeoperatoren verbunden sind. Wir werden auch zwischenzeitlich j' als den minimalen Eigenwert von J_3/\hbar für diese Zustandsvektoren definieren. Der Zustandsvektor Ψ^j , für den J_3 seinen maximalen Eigenwert $\hbar j$ annimmt, muss

$$(J_1 + iJ_2)\Psi^j = 0 \quad (4.2.2)$$

erfüllen, denn sonst wäre $(J_1 + iJ_2)\Psi^j$ ein Zustandsvektor mit einem größeren Eigenwert für J_3 . In gleicher Weise erhält man durch Anwendung von $(J_1 - iJ_2)$ auf den Zustandsvektor Ψ^j einen Eigenzustand von J_3 mit Eigenwert $\hbar(j - 1)$, natürlich vorausgesetzt, dass dieser Zustandsvektor nicht verschwindet. Machen wir auf diese Weise weiter, so gelangen wir schließlich zu einem Zustandsvektor $\Psi^{j'}$ mit dem minimalen Eigenwert $\hbar j'$ von J_3 , der

$$(J_1 - iJ_2)\Psi^{j'} = 0 \quad (4.2.3)$$

genügt, denn sonst wäre $(J_1 - iJ_2)\Psi^{j'}$ ein Zustandsvektor mit einem noch kleineren Eigenwert von J_3 . Wir kommen zu $\Psi^{j'}$ von Ψ^j ausgehend, indem wir den Absteigeoperator $(J_1 - iJ_2)$ mehrfach anwenden, somit muss $j - j'$ eine ganze Zahl sein.

Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwort- und DRM-Schutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: **info@pearson.de**

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten oder ein Zugangscode zu einer eLearning Plattform bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.** Zugangscodes können Sie darüberhinaus auf unserer Website käuflich erwerben.

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

<https://www.pearson-studium.de>