Statistische Methoden in der Experimentalphysik

Martin Erdmann
Thomas Hebbeker
Alexander Schmidt

Pearson

Beispiel 3.11: 2-dimensionale Gaußverteilung

In der ► Abbildung 3.16 ist eine 2-dimensionale Gaußverteilung mit den Werten $\mu = 7$, $\nu = 6$, $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$ und $\rho = 0{,}25$ gezeigt.

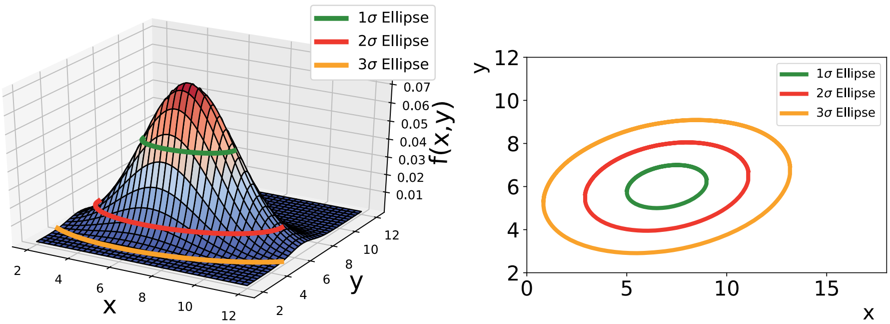

Abbildung 3.16 Zweidimensionale Gaußwahrscheinlichkeitsdichte

Dieses Beispiel einer zweidimensionalen Gaußwahrscheinlichkeitsdichte (3.87) hat ihren Maximalwert bei ($x = 7; y = 6$). Die Ellipsen zeigen Bereiche mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Drehung der Ellipsen entsteht durch den Korrelationskoeffizienten $\rho \neq 0$ und die Stauchung durch die voneinander verschieden Standardabweichungen $\sigma_x > \sigma_y$. (Python-Code: `Fig_2DGaus.py`, `Fig_2DEllipse.py`)

EXTRAS ONLINE Quellcode

Die Kontur können wir uns durch das Abfallen der Verteilung auf $f_{\max}/\sqrt{e}$ veranschaulichen. Zunächst wählen wir in der Gaußverteilung (3.87) wieder zur besseren Übersicht den Ursprung des Koordinatensystems (Mittelwerte $\mu = \nu = 0$) und verwenden unabhängige Zufallsvariable ($\rho = 0$). Die zweidimensionale Gaußverteilung fällt vom Maximum auf ihren $1/\sqrt{e}$-ten Teil bei:

$$e^{-\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right)$$

Der Term in eckigen Klammern muss demnach 1 ergeben:

$$\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2 = 1$$

Das heißt, die Kontur entspricht hier der Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen σ_x und σ_y. Für korrelierte Variablen ($\rho \neq 0$) erhalten wir die Gleichung einer in der x, y-Ebene gedrehten Ellipse:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\,\rho\,\frac{x \cdot y}{\sigma_x \cdot \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1 - \rho^2\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Zufallsvariablen x und y jeweils innerhalb der Standardabweichungen σ_x und σ_y liegen, berechnen wir mit dem Integral:

$$P(\mu - \sigma_x \leq x \leq \mu + \sigma_x, \nu - \sigma_y \leq y \leq \nu + \sigma_y) = \int_{\mu-\sigma_x}^{\mu+\sigma_x} \int_{\nu-\sigma_y}^{\nu+\sigma_y} f(x,y)\, dx\, dy \qquad (3.88)$$

Lösungen dafür, beide Zufallsvariablen innerhalb ihrer $\pm 1\ \sigma$-, $\pm 2\ \sigma$- und $\pm 3\ \sigma$-Bereiche um ihre Mittelwerte zu finden, sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Intervall in x, y	Wahrscheinlichkeit P
$\lvert x-\mu\rvert \leq 1\ \sigma_x$ und $\lvert y-\nu\rvert \leq 1\ \sigma_y$	39%
$\lvert x-\mu\rvert \leq 2\ \sigma_x$ und $\lvert y-\nu\rvert \leq 2\ \sigma_y$	86%
$\lvert x-\mu\rvert \leq 3\ \sigma_x$ und $\lvert y-\nu\rvert \leq 3\ \sigma_y$	99%

(3.89)

Die Integration über die Fläche liefert Werte, die geringer als im Fall der eindimensionalen Gaußverteilung (3.64) sind. Die Mehrzahl der Zufallswerte liegt bei der zweidimensionalen Gaußverteilung außerhalb des Bereichs von einer Standardabweichung!

Im Abschnitt 7.1 werden wir ein Verfahren zur Bestimmung des Bereichs kennenlernen, in dem z. B. 68% der Ereignisse liegen (7.36).

Das Wichtigste zum Mitnehmen

- Zufällige Vorgänge während eines Messprozesses sind unvermeidbar. Wir erfassen diese Zufallsprozesse eines Experiments quantitativ durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der die Messwerte stammen. Sie enthält die Information über den wahren Wert einer Messgröße und die experimentellen Unsicherheiten.

- Natürlich kennen wir die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Experiments vor der Messung nicht. Wir verwenden daher die Messdaten des Experiments, um zumindest Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung zu rekonstruieren.

  Der aus den Messdaten bestimmte Mittelwert der rekonstruierten Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt häufig bereits eine Schätzung des wahren Werts der gesuchten Messgröße (siehe Gesetz der großen Zahlen und Zentraler Grenzwertsatz im folgenden Kapitel).

  Ebenfalls rekonstruieren wir mit den Messdaten die Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie ist ein Maß für die Breite der Verteilung und damit die erwartete Streuung der Messwerte.

- Nützliche Kenngrößen für Verteilungen sind Lokalisierungsparameter (Mittelwert, Median, wahrscheinlichster Wert) und Dispersionsparameter (Standardabweichung, Varianz, Root-Mean-Square, Full-Width-Half-Maximum).

- Folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind für viele experimentelle Fragestellungen geeignet. Bei diskreten Messwerten (Anzahlen) werden oft die Binomialverteilung oder die Poissonverteilung verwendet. Für kontinuierliche Messwerte stehen z.B. die Gleichverteilung, die Gaußverteilung und die Exponentialverteilung zur Verfügung.

Python Quellcode: Verteilungen

Für alle genannten Verteilungen können mit der `scipy.stats` Bibliothek viele Berechnungen sehr einfach durchgeführt werden.

Wahrscheinlichkeiten diskreter Verteilungen werden mit `.pmf()` bestimmt, während Wahrscheinlichkeitsdichten kontinuierlicher Verteilungen mit `.pdf()` bestimmt werden. Die Beispiele in diesem Kapitel haben dies gezeigt.

Integrierte Wahrscheinlichkeiten, z. B. $P(x < x_0)$ können mit `.cdf()` berechnet werden. Beispiele dafür sind

`stats.poisson.cdf(r,mu)` für die Poissonverteilung und
`stats.expon.cdf(t, scale=mu)` für die Exponentialverteilung.

Nützlich sind auch die inversen integrierten Funktionen `.ppf()`, zum Beispiel

```
stats.poisson.ppf(p,mu)
stats.expon.ppf(p, scale=mu),
```

womit der Wert der Zufallsvariablen berechnet wird, der zur angegebenen integrierten Wahrscheinlichkeit `p` gehört.

Kenngrössen aller Verteilungen berechnen sich zum Beispiel mit `.mean()` für den Mittelwert, mit `.var()` für die Varianz und `.median()` für den Median.

Von besonderem Interesse z. B. für die Simulation von Experimenten ist das Erzeugen von Zufallszahlen, die festgelegten Verteilungen folgen. Dies wird mit der Funktion `.rvs()` erreicht. Beispiele für entsprechende Zufallswerte sind

```
stats.poisson.rvs(mu)
stats.expon.rvs(scale=mu).
```

Aufgabe 3.1: Mensch-ärgere-Dich-nicht

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Spiel Mensch-ärgere-Dich-nicht in zehn Runden kein einziges Mal die Augenzahl 6 zu würfeln.

Aufgabe 3.2: Binomialtheorem mit $n = 3$

Berechnen Sie die kubische Anwendung des Binomialtheorems $(a + b)^3$.

Aufgabe 3.3: Exponentialverteilung

Ein Auto erleide im Mittel alle 10.000 km eine Panne. Die zeitlichen Abstände zwischen den Pannen seien exponentialverteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Panne zu erleiden, wenn Sie 3.000 km in den Urlaub fahren?

Sie haben nun bereits eine Strecke von 9.000 km zurück gelegt. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten 3.000 km eine Panne zu erleiden?

Messwerte und Stichproben

4

ÜBERBLICK

» Eine Stichprobe besteht aus einer Anzahl von Werten, die einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig entnommen wurden. Einen Satz von Messwerten aus einem Experiment können wir als Stichprobe auffassen, die wir der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieses Experiments entnommen haben. Im idealen Fall würde man die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Experiments rekonstruieren. Wichtige Informationen erhält man aber bereits mit der Bestimmung von Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Zunächst ist unser Ziel, Mittelwert und Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung mithilfe der Stichprobe von Messwerten zu schätzen. Außerdem wollen wir die Genauigkeit unserer Schätzung der Kenngrößen bestimmen. Danach lernen wir den für die Interpretation von Messdaten entscheidenden »zentralen Grenzwertsatz« der Mathematik kennen und wenden ihn bei der Bestimmung von Mittelwerten und Standardabweichungen an. Schließlich erweitern wir unsere Überlegungen zu Kombinationen von Messwerten unterschiedlicher Genauigkeit und bilden gewichtete Kenngrößen. «

4.1 Stichproben aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Eine **Stichprobe** ist ein Satz zufälliger Werte $x_1, ..., x_n$ aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$. Die Anzahl der Werte n wird als Stichprobenumfang bezeichnet. In ► Abbildung 4.1 sind Beispiele für solche Stichproben gezeigt.

Für die in Abschnitt 3.2 eingeführten Kenngrössen Mittelwert und Standardabweichung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich Schätzwerte aus Stichproben bestimmen. In Abschnitt 1.2.1 haben wir einen ersten Eindruck von der Interpretation von Stichproben im Zusammenhang mit dem Messvorgang vorgenommen. Hier begründen wir unser Vorgehen.

Die Definition des Mittelwerts $\overline{x}$ einer Stichprobe ist naheliegend:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.1}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\overline{x}$ selbst eine Zufallsgröße ist, denn bei einer Wiederholung der Stichprobe kann $\overline{x}$ einen anderen Wert annehmen.

In ► Abbildung 4.1 ist links oben eine Stichprobe im Umfang von $n = 4$ Messwerten gezeigt, die der Wahrscheinlichkeitsdichte (gestrichelte Kurve) zufällig entnommen wurden. Ihr Stichprobenmittelwert $\overline{x}_1$ ist in der unteren Abbildung gezeigt. Wie erwartet stimmt $\overline{x}_1$ nicht exakt mit dem wahren Mittelwert $\langle x\rangle$ der Wahrscheinlichkeitsdichte überein, aus der die Stichprobe entnommen wurde.

In der rechten Abbildung wurden neun zusätzliche Stichproben genommen, deren Mittelwerte $\overline{x}_i$ in der unteren Abbildung zusammen mit dem Mittelwert $\overline{x}_1$ der ersten Stichprobe gezeigt sind. Alle Stichprobenmittelwerte sind verschieden. Der Mittelwert aller 10 Stichprobenmittelwerte ist durch den schwarzen Balken dargestellt. Er zeigt eine geringere Abweichung vom wahren Mittelwert $\langle x\rangle$ der Wahrscheinlichkeitsdichte als der einzelne Stichprobenmittelwert $\overline{x}_1$.

Wie genau unsere Schätzung des wahren Mittelwerts $\langle x\rangle$ ist, untersuchen wir mithilfe des Mittelwerts w von m Stichprobenmittelwerten $\overline{x}_j$ mit Stichprobenumfang n und ihrer Varianz. Jede Stichprobe j hat den Satz von Messwerten $[x_1+x_2+\ldots+x_n]_j$. Der Mittelwert ist der Erwartungswert für das erste algebraische Moment (3.11):

$$\begin{aligned} w &= E[\overline{x}] \\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\overline{x}_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)_j \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}[x_1+x_2+\ldots+x_n]_1+\ldots+\frac{1}{n}[x_1+x_2+\ldots x_n]_m\right) \\ &= \frac{1}{m\cdot n}\sum_{k=1}^{m\cdot n}x_k = E[x] \quad \overset{m\cdot n\to\infty}{=} \quad \langle x\rangle \end{aligned} \tag{4.2}$$

Der Mittelwert der Stichprobenmittelwerte ist der Erwartungswert $E[x]$ (gleichbedeutend mit Mittelwert) aller zufälligen Werte aus der Wahrscheinlichkeitsdichte. Bei unendlich

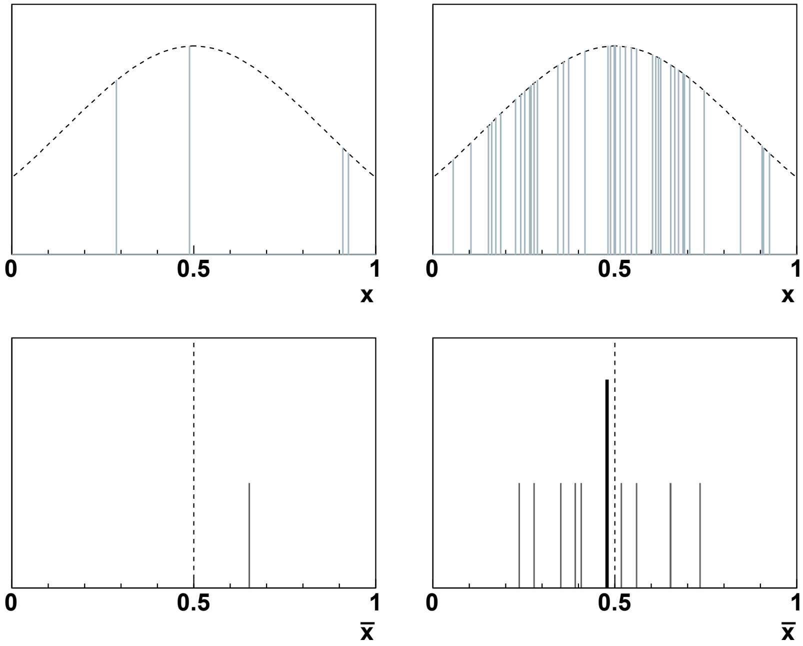

Abbildung 4.1 Stichproben und Mittelwerte

Eine Stichprobe mit einem Stichprobenumfang von $n = 4$ zufälligen Zahlen aus der Wahrscheinlichkeitsdichte (gestrichelte Kurve) ist in der linken oberen Abbildung gezeigt. Die untere Abbildung zeigt den Stichprobenmittelwert (Balken) im Vergleich zum wahren Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsdichte (gestrichelte Linie). Die rechte Abbildung zeigt diese Stichprobe zusammen mit neun weiteren Stichproben mit jeweils dem Stichprobenumfang $n = 4$. Die rechte untere Abbildung zeigt die Mittelwerte der insgesamt 10 Stichproben und den Mittelwert der Stichprobenmittelwerte (schwarzer Balken) im Vergleich zum wahren Wert (gestrichelte Linie).

vielen Werten erwarten wir, dass ihr Mittelwert $E[x]$ dem wahren Mittelwert $\langle x \rangle$ der Wahrscheinlichkeitsdichte entspricht (► Abbildung 4.1 rechts).

Die Varianz (3.20) der Stichprobenmittelwerte $\overline{x}_j$ aus den Werten x_i entspricht dem zweiten zentralen Moment (3.12). Mit $\langle x \rangle$ bezeichnen wir wieder den wahren Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$
\begin{aligned}
V[\overline{x}] &= E[(\overline{x} - \langle x \rangle)^2] = E[\overline{x}^2] - \langle x \rangle^2 \\
&= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)^2\right] - \langle x \rangle^2 = E\left[\frac{1}{n^2}(x_1 + \ldots + x_n)^2\right] - \langle x \rangle^2 \\
&= E\left[\frac{1}{n^2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + \ldots + x_{n-1} x_n\right)\right] - \langle x \rangle^2
\end{aligned}
$$

Die Werte x_i sind unabhängige Zufallswerte aus der Wahrscheinlichkeitsdichte. Daher entspricht der Erwartungswert von jedem Wert x_i dem wahren Mittelwert $\langle x \rangle$ der Wahrscheinlichkeitsdichte (4.2). Genauso ist der Erwartungswert $E[x_{n-1}x_n]$ der Produkte aus den gemischten Termen $E[x_{n-1}x_n] = E[x_n x_{n-1}] = E[x_{n-1}]E[x_n] = \langle x \rangle^2$.

Die Erwartungswerte $E[x_i^2]$ der quadrierten Werte können so nicht weiter aufgelöst werden, da jeder einzelne Wert x_i mit sich selbst korreliert ist. Da x_i^2 und x_j^2 für $i \neq j$ voneinander unabhängig sind, haben sie den gemeinsamen Erwartungswert $E[x^2]$, genauso wie $E[x_i]$ den Erwartungswert $E[x] = \langle x \rangle$ haben. Damit können wir wie folgt vorgehen, wobei wir im letzten Schritt wieder die Definition (3.20) der Varianz nutzen:

$$\begin{aligned} V[\overline{x}] &= \frac{1}{n^2}\left(E[x_1^2] + \dots + E[x_n^2] + E[x_1x_2] + E[x_2x_1] + \dots + E[x_{n-1}x_n]\right) - \langle x \rangle^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\,E[x^2] + n(n-1)\langle x \rangle^2\right) - \langle x \rangle^2 \\ &= \frac{1}{n}\,E[x^2] + \langle x \rangle^2 - \frac{1}{n}\langle x \rangle^2 - \langle x \rangle^2 \\ &= \frac{1}{n}\left(E[x^2] - \langle x \rangle^2\right) = \frac{1}{n}\,V[x] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Varianz $V[\overline{x}]$ der Stichprobenmittelwerte lässt sich demnach direkt aus der Varianz $V[x]$ der einzelnen Werte berechnen. Je größer der Stichprobenumfang n ist, desto geringer ist die Varianz der Stichprobenmittelwerte. Dieser Zusammenhang wird auch als das »Gesetz der großen Zahlen« bezeichnet.

Für die Standardabweichung schreiben wir entsprechend

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_x \tag{4.4}$$

Wir interpretieren die Standardabweichung $\sigma_{\overline{x}}$ des Stichprobenmittelwerts $\overline{x}$ als die statistische Unsicherheit des Stichprobenmittelwerts. Das Gesetz der großen Zahl bedeutet hier ebenfalls, dass die statistische Unsicherheit $\sigma_{\overline{x}}$ des Stichprobenmittelwerts mit grösserem n kleiner wird, also durch wiederholtes Messen verringert werden kann.

Hier ist zu beachten, dass σ_x die wahre Standardabweichung der zugrunde liegenden Verteilung ist, die a priori nicht bekannt sein muss. In diesem Fall muss auch σ_x aus der Stichprobe geschätzt werden. Der entsprechende Schätzwert ist die Stichprobenstandardabweichung s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{4.5}$$

Hier wird nicht durch den Stichprobenumfang n geteilt, sondern durch $n-1$, da nicht der wahre Mittelwert $\langle x \rangle$, sondern der Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ zur Berechnung der quadratischen Differenzen $(x_i - \overline{x})^2$ verwendet wird. Dadurch, dass wir $\overline{x}$ ebenfalls aus der Stichprobe berechnet haben, verlieren wir eine unabhängige Information und dividieren durch $n-1$. Häufig bezeichnet man diese unabhängigen Informationen auch als »Freiheitsgrade« N_F. In diesem Fall ist $N_F = n-1$.

Den Verlust eines Freiheitsgrades kann man auch verstehen, indem man sich klar macht, dass bei bekanntem Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ der n-te Stichprobenwert x_n aus den $n-1$ anderen Werten $(x_1, \dots, x_{n-1})$ berechnet werden kann. Die Stichprobe ist daher vollständig bekannt, wenn $n-1$ x-Werte und der Stichprobenmittelwert gegeben sind.