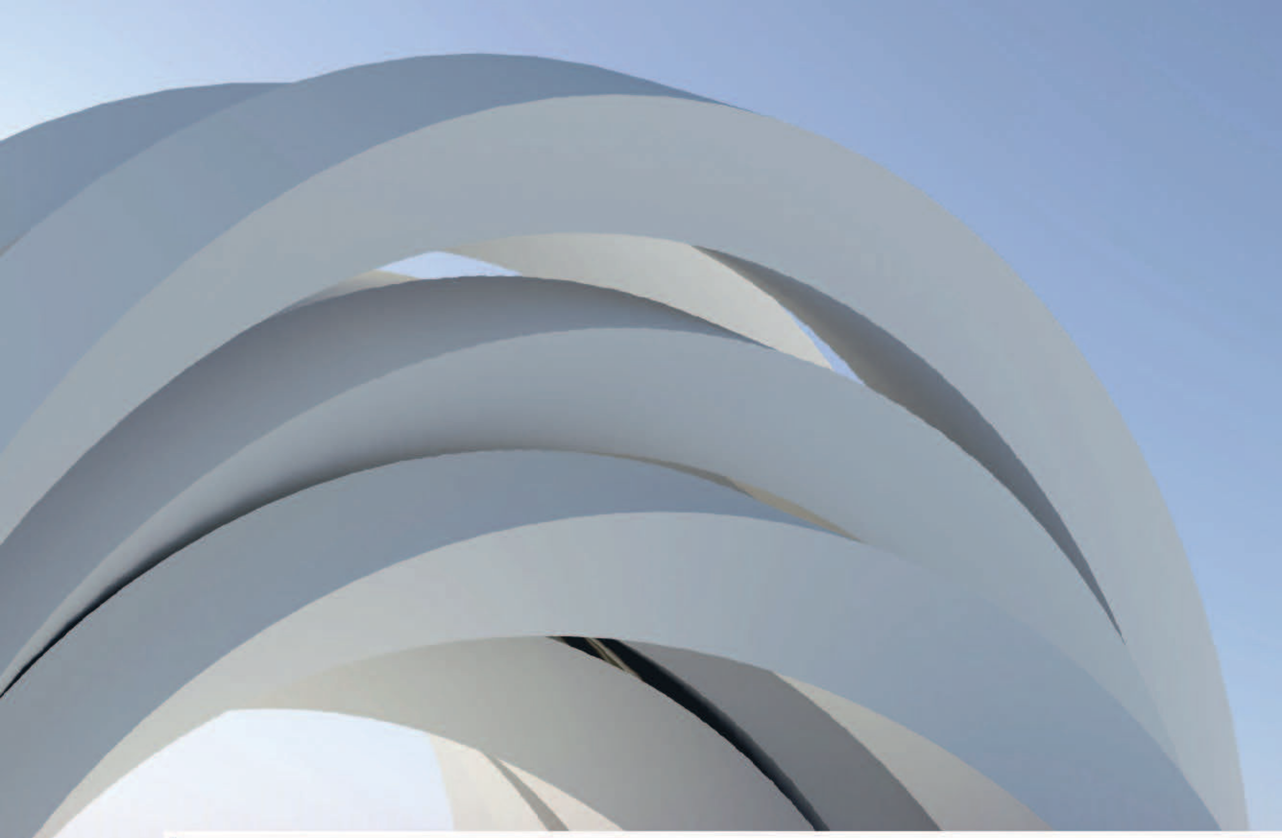


Analysis

2., aktualisierte Auflage

Theo de Jong

Pearson

EXTRAS ONLINE

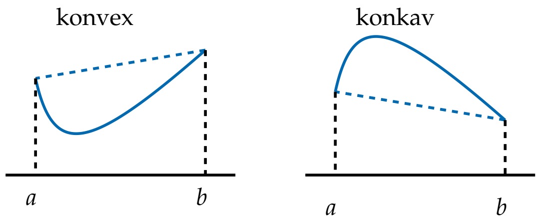
4.9 Konvexität, Konkavität und Wendepunkte

Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f konvex, wenn für $a < x < b$ gilt:

$$f(x) \leq (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a) \ .$$

Gilt statt $\leq$ die Ungleichung $\geq$, so nennen wir f konkav.

Die geometrische Interpretation von Konvexität ist, dass die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ zwischen a und b oberhalb des Graphen von f liegt. Bei konkaven Funktionen liegt die Sekante unterhalb des Graphen von f.



Satz 4.11 Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn die Ableitung f' eine monoton wachsende Funktion ist, und konkav genau dann, wenn f' eine monoton fallende Funktion ist.

Sei f konvex und $a < x < b$. Aus der Konvexität folgt $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Durch Übergang zum Grenzwert: $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Auf ähnliche Weise zeigt man $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$ und die Monotonie folgt.

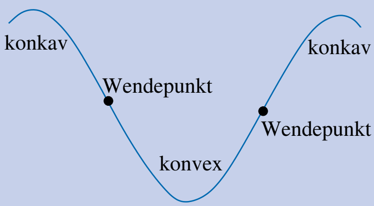
Sei umgekehrt f' eine monoton wachsende Funktion, $a, b, x \in I$ mit $a < x < b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ξ, η mit $a < \xi < x < \eta < b$ mit

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \ .$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Auflösen nach $f(x)$, dass f konvex ist. ∎

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, I ein Intervall. Man sagt, dass für $c \in I$ der Punkt $(c, f(c))$ ein Wendepunkt von f ist, wenn es $a, b \in I$ mit $a < c < b$ gibt, sodass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. f ist in (a, c) konvex und in (c, b) konkav.
2. f ist in (a, c) konkav und in (c, b) konvex.



Ist f differenzierbar, so bedeutet dies, dass die Tangente an dem Graphen von f in $(c, f(c))$ den Graphen durchquert (Wendetangente).

Aufgaben

EXTRAS ONLINE
Lösungen

Aufgabe 4.48

1. Die Funktion f sei in (a, b) zweimal differenzierbar und hat einen Wendepunkt in c. Zeigen Sie, dass $f''(c) = 0$.
2. Die Funktion f sei in (a, b) dreimal differenzierbar mit $f^{(3)}$ stetig, es sei $c \in (a, b)$ mit $f''(c) = 0$ und $f^{(3)}(c) \neq 0$. Zeigen Sie, dass f in c einen Wendepunkt hat.
3. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Tangente tatsächlich den Graphen „durchquert".

Aufgabe 4.49 Bestimmen Sie die Wendepunkte der nachfolgenden Funktionen.

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x + \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$
5. $f(x) = (x+1)^{2/3} - (x-3)^{2/3}$
6. $f(x) = (x+1) \cdot x^{-7/3}$
7. $f(x) = x/\sqrt{1-x^2} - 125x/27$
8. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$
9. $f(x) = \sin(x)$
10. $f(x) = (x^2 - x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$
11. $f(x) = x^3 e^{-2x}$
12. $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}$

Aufgabe 4.50 Es sei f eine auf $[a, b]$ konvexe Funktion und $\xi \in (a, b)$ mit:

$$f(\xi) = (\xi - a)\frac{(f(b) - f(a))}{(b-a)} + f(a)\,.$$

Zeigen Sie, dass f eine lineare Funktion ist.

Aufgabe 4.51 Zeigen Sie, dass $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex (konkav) ist, wenn für alle $a, b \in I$ und $0 < \lambda, \mu < 1$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt:

$$f(\lambda a + \mu b) \leq (\geq) \lambda f(a) + \mu f(b)\,.$$

Tipp: Schreibe $x = \lambda a + \mu b$.

Aufgabe 4.52

1. Zeigen Sie, dass $f(x) = \ln(x)$ auf $(0, \infty)$ konkav ist.
2. Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und x, y positive Zahlen. Zeigen Sie:

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}\,.$$

4.10 Kurvendiskussion

Ist eine Funktion $f(x)$ durch eine Formel gegeben, so könnte man als Aufgabe stellen, den Graphen dieser Funktion zu zeichnen. Obwohl es heutzutage möglich ist, eine solche Aufgabe von einem Rechner durchführen zu lassen, ist es dennoch wichtig, dass man selbst in der Lage ist, solche Graphen zu zeichnen. Bei einer solchen Kurvendiskussion ist es ratsam, die nachfolgenden Punkte zu bearbeiten.

1 Für welche x ist die Funktion überhaupt definiert?

2 Bestimmen Sie die eventuellen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

3 Untersuchen Sie, ob die Funktion symmetrisch ist.

4 Gibt es Asymptoten?

5 Untersuchen Sie $f'(x)$ und bestimmen Sie, wo die Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Gibt es Extremwerte? Wo liegen diese?

6 Untersuchen Sie $f''(x)$. Wo ist die Funktion konvex, wo konkav? Gibt es Wendepunkte?

7 Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion.

8 Fertigen Sie eine Skizze des Graphen an.

Beispiel: Wir führen die Kurvendiskussion für $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}/x$ durch. Die jeweiligen Berechnungen sollten Sie selbst durchführen.

1 Die Funktion ist für $x \neq 0$ definiert.

2 Es gibt keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

3 Es gibt keine offensichtlichen Symmetrien.

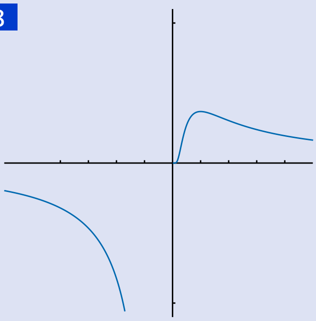
4 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Die Gerade $y = 0$ ist eine waagerechte Asymptote.
$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$: $x = 0$ ist eine senkrechte Asymptote.

5 $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x}$. Die Funktion ist streng monoton fallend für $x < 0$ und $x > 1$. Sie ist streng monoton wachsend für $0 < x < 1$. Sie hat ein Maximum für $x = 1$.

6 $f''(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^5}\mathrm{e}^{-1/x}$. Dann ist die Funktion konkav für $x < 0$ und $1-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Sie ist konvex für $0 < x < 1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $x > 1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wendepunkte gibt es für $x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

7 Der Wertebereich ist $(-\infty, 0) \cup (0, \mathrm{e}^{-1})$.

8



Aufgaben

EXTRAS ONLINE

Lösungen

Aufgabe 4.53 Führen Sie eine Kurvendiskussion für die nachfolgenden Funktionen durch. (Manchmal müssen Sie die Wendepunkte nur näherungsweise finden.)

1. $f(x) = x^4 - 4x^2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$
4. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x - 4)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - 2}$
7. $f(x) = \sqrt{3 + 2x} - x$
8. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$
9. $f(x) = (x + 2)\sqrt{4 - x^2}$
10. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 1}$
11. $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$
12. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
13. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$
14. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^{3/2}}$
15. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
16. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$
17. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$
18. $f(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} - 4\mathrm{e}^{-x}$
19. $f(x) = x^{-x}$
20. $f(x) = (x^2)^{1/x}$
    (keine Wendepunkte berechnen)
21. $f(x) = (x^2)^x$
    (keine Wendepunkte berechnen)
22. $f(x) = \dfrac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}, \quad 0 < x < 2\pi$
23. $f(x) = \mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^x}$
    (keine Wendepunkte berechnen)
24. $f(x) = x^2 - 4x + 4\ln(x + 1)$

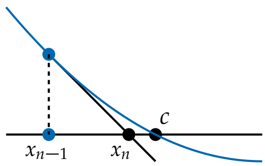
4.11 *Das Newton-Verfahren*

Satz 4.12 Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''(x)$ stetig und

1. $f(a)\cdot f(b) < 0$; 2. $f'(x) \neq 0$ und $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Sei $x_0 = a$ (wenn $f(a)f''(a) > 0$) und $x_0 = b$ (wenn $f(a)f''(a) < 0$). Dann definiert

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$



eine Folge (x_n), die monoton gegen die Nullstelle $c \in (a,b)$ von f konvergiert. Ist m das Minimum von $|f'|$ und M das Maximum von $|f''|$ auf $[a,b]$, so gilt

$$0 \leq |x_n - c| \leq \tfrac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2 \,.$$

Wir nehmen im Beweis an, dass $f(a) < 0$, $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, also $x_0 = b$. Nehmen wir induktiv an $x_{n-1} \in (c,b]$. Da f streng monoton wachsend ist, ist c die einzige Nullstelle in $[a,b]$, also $f(x_{n-1}) > 0$ und $x_n < x_{n-1}$. Definitionsgemäß ist $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$. Wegen der Taylorformel und der Definition von x_n gibt es ein $\xi \in (x_n, x_{n-1})$ mit

$$f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2 \,.$$

Es folgt $f(x_n) > 0$, $x_n > c$ und die fallende Folge (x_n) konvergiert. Weiterhin

$$f(x_n) < \frac{M}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \,.$$

Wegen des Mittelwertsatzes gibt es ein $\eta \in (c, x_n) \subset (c,b)$ mit

$$0 < x_n - c = \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(\eta)} = \frac{f(x_n)}{f'(\eta)} \leq \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2 \,. \tag{4.1}$$

Es folgt aus (4.1) und dem Einschließungssatz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. ■

Beispiel: Wir betrachten $f(x) = x^3 - 4$ auf dem Intervall $[1,2]$ und $x_0 = 2$. Es gilt

$$x_n = \frac{2x_{n-1}^3 + 4}{3x_{n-1}^2} \,.$$

Wir berechnen deshalb näherungsweise $\sqrt[3]{4}$. Es gilt $m = 3$ und $M = 12$. In der nachfolgenden Tabelle runden wir in jedem Schritt ab. Dies ist nicht schlimm, denn es bleibt $x_n > c$ und wir dürfen den abgerundeten Wert als neuen Startwert nehmen.

n	1	2	3	4
x_n	1,666	1,591	1,58740969	1,58740105201527
$\frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2 \leq$	0,23	0,012	$2{,}8 \cdot 10^{-5}$	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$

Aufgaben

EXTRAS ONLINE
Lösungen

Benutzen Sie in den nachfolgenden Aufgaben ein Rechengerät.

Aufgabe 4.54 Finden Sie sechzehn Nachkommastellen der positiven Lösungen der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Aufgabe 4.55 Zeigen Sie, dass $x^3 + 3x + 1 = 0$ nur eine reelle Nullstelle hat und benutzen Sie das Newton-Verfahren, um eine Annäherung dieser Nullstelle zu finden.

Aufgabe 4.56 Finden Sie eine Annäherung von $\sqrt[5]{10}$ mithilfe der newtonschen Methode.

Aufgabe 4.57 Berechnen Sie mithilfe der Tangensfunktion sechs Nachkommastellen von π.

Aufgabe 4.58 Finden Sie sechs Nachkommastellen der Lösung der Gleichung $\cos(x) = x$.

Aufgabe 4.59 Versuchen Sie, mithilfe der newtonschen Methode die Nullstelle von $(x-1)^{20}$ mit Startwert 2 anzunähern. Warum funktioniert das so schlecht?

Aufgabe 4.60 Wenden Sie die newtonsche Methode für $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 2$ mit Startwert $x_0 = 2$ an. Zeichnen Sie ein Bild und erklären Sie, was passiert.

Aufgabe 4.61 Schreiben Sie ein SAGEMATH-Programm

```
newton(f,a,n),
```

welches das Newton-Verfahren umsetzt. Hierbei ist a der Startwert und n die Anzahl der Iterationen.

4.12 *Die komplexe Exponentialfunktion*

In diesem Abschnitt definieren wir e^z für komplexe Zahlen z. Aus

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\ln(1+tx)}{t} = x \text{ folgt } \lim_{t\downarrow 0}(1+tx)^{1/t} = e^x \text{ und daraus}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n = e^x\,.$$

Diese Beschreibung verallgemeinern wir. Wir brauchen hierzu den Begriff konvergenter Folgen komplexer Zahlen. Wir sagen, dass eine Folge komplexer Zahlen $(z_n) = (x_n + iy_n)$ gegen $z = x + iy$ konvergiert genau dann, wenn (x_n) gegen x und (y_n) gegen y konvergiert. Die üblichen Rechenregeln (Aufgabe 4.63) sind gültig.

Satz 4.13 Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x\cdot\big(\cos(y)+i\sin(y)\big)$.

Aus $(1+\frac{z}{n})^n = |1+\frac{z}{n}|^n\cdot(\cos(n\cdot\operatorname{Arg}(1+\frac{z}{n})) + i\sin(n\cdot\operatorname{Arg}(1+\frac{z}{n})))$ folgt, dass es reicht zu zeigen (nehme $h = 1/n$):

$$\lim_{h\to 0}|1+hz|^{1/h} = e^x \text{ und } \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Arg}(1+hz)}{h} = y\,.$$

1 Man berechnet $|1+hz|^2 = (1+hx)^2 + (hy)^2 = 1 + 2hx + h^2(x^2+y^2)$. Es folgt

$$\ln\left(\lim_{h\to 0}|1+hz|^{2/(2h)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+2hx+h^2(x^2+y^2))}{2h} = x$$

(benutze l'Hôpital), woraus $\lim\limits_{h\to 0}|1+hz|^{1/h} = e^x$ folgt.

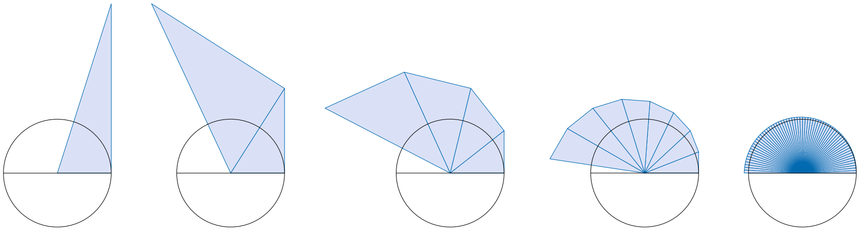
2 Es gilt $\operatorname{Arg}(1+hz) = \arctan\left(\dfrac{h\cdot y}{1+h\cdot x}\right)$ und daraus mit l'Hôpital:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Arg}(1+hz)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\arctan\left(\frac{h\cdot y}{1+h\cdot x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{y}{(hy)^2+(1+hx)^2} = y\,.$$

∎

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Wir zeichnen hier $(1+\pi i/n)^n$ für $n = 1, 2, 4, 8, 64$. Wir „sehen", dass $e^{\pi i} = -1$.



Aufgaben

EXTRAS ONLINE

Lösungen

Aufgabe 4.62 Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Ebene.

1. $e^{\pi i}$ 2. $2e^{i\pi/2}$
3. $e^{2\pi i}$ 4. $3e^{2i}$

Aufgabe 4.63 Es seien (z_n) und (w_n) konvergente Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie, dass $(z_n + w_n)$ und $(z_m \cdot w_n)$ konvergent sind und dass

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n ,$$
$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n .$$

Aufgabe 4.64 Zeigen Sie die Rechenregel $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für komplexe Zahlen z, w.

Aufgabe 4.65

1. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} ,$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

2. Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man nun $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ und $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Zeigen Sie: Für komplexe Zahlen z, w gilt:

   1. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
   2. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

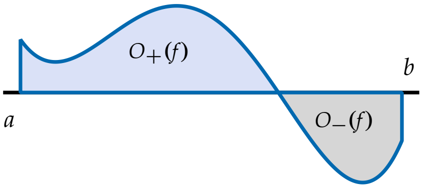
Integralrechnung

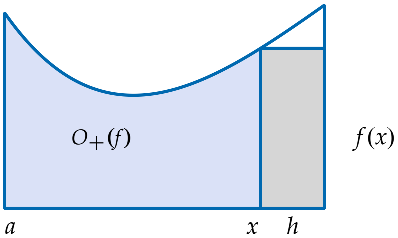
5

ÜBERBLICK

LERNZIELE

- Definition des Integrals: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
- Partielle Integration und Substitutionsregel
- Partialbruchzerlegung: Integrieren von rationalen Funktionen
- Trapezregel und simpsonsche Regel





Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind die Ordinatenmengen

$$\begin{aligned} O_+(f) &= \{(x,y)\colon a < x < b\,, \quad 0 < y < f(x)\} \text{ und} \\ O_-(f) &= \{(x,y)\colon a < x < b\,, \quad f(x) < y < 0\} \end{aligned}$$

beides offene Mengen. Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist nun nichts anderes als die Differenz der Flächen der Ordinatenmengen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \mu(O_+(f)) - \mu(O_-(f))\,.$$

Die Bedeutung des Integrals liegt im Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Dieser besagt, dass die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar ist mit Ableitung $F'(x) = f(x)$. Man nennt F eine **Stammfunktion** von f. Der Grund für diese Tatsache ist einleuchtend, ohne auf technische Details einzugehen. Aus dem Bild oben rechts ist ersichtlich, dass

$$F(x+h) \approx F(x) + h \cdot f(x)\,, \text{ also } \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,.$$

Zwei Stammfunktionen **auf einem Intervall** unterscheiden sich nur durch eine Konstante.[1]

1 Wenn eine Funktion definiert ist auf zwei Intervallen, wie z. B. $f(x) = 1/x$, darf die Konstante auf den jeweiligen Intervallen verschieden sein. So ist für jedes Paar (C_1, C_2) von reellen Zahlen die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = 1/x$.