Analysis 2

Lehr- und Übungsbuch

12., aktualisierte Auflage

George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass

Inklusive

MyMathLab Deutsche Version
E-Learning für Analysis 2

Integrierter E-Text des Lehrbuchs Analysis 2 sowie über 2.000 interaktive Übungsaufgaben, Tutorien und Prüfungssimulationen für

- Naturwissenschaftler
- Ingenieure
- Wirtschaftswissenschaftler

Nutzungsdauer 24 Monate

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

16 15 14

ISBN 978-3-86894-172-2 (Buch)

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Fachlektorat: Prof. Dr. Daniel Rost, LMU München
Korrektorat: Carsten Heinisch, Kaiserslautern
Übersetzung: Micaela Krieger-Hauwede, Leipzig; Ulrike Klein, Berlin
Herstellung: Claudia Bäurle, cbaeurle@pearson.de
Coverdesign: Martin Horngacher, München
Coverbild: Gettyimages, www.gettyimages.de
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: Firmengruppe APPL, aprinta druck, Womding

Printed in Germany

18. Bestimmen Sie eine Gleichung für den Krümmungskreis der Kurve $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ im Punkt $(\pi/2, 1)$. (Dies ist eine Parameterdarstellung des Graphen $y = \sin x$ in der xy-Ebene.)

Die Gleichung

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}},$$

die wir in Aufgabe 5 hergeleitet haben, drückt die Krümmung $\kappa(x)$ einer zweimal differenzierbaren ebenen Kurve $y = f(x)$ als Funktion von x aus. Berechnen Sie in den Aufgaben 19–22 die Krümmungsfunktion. Zeichnen Sie dann die Graphen von $f(x)$ und $\kappa(x)$ im gegebenen Intervall. Es ergeben sich einige Überraschungen.

19. $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$

20. $y = x^4/4, \quad -2 \le x \le 2$

21. $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

22. $y = \mathrm{e}^x, \quad -1 \le x \le 2$

Computerberechnungen Untersuchen Sie in den Aufgaben 23–30 mit einem CAS den Krümmungskreis der Kurve in einem Punkt P, für den $\kappa \neq 0$ ist. Führen Sie die folgenden Schritte aus:

a. Zeichnen Sie die Kurve (gegeben in Parameterdarstellung oder als Funktion) in dem angegebenen Intervall und sehen Sie sich den Verlauf an.

b. Berechnen Sie die Krümmung κ der Kurve bei t_0 mithilfe der passenden Gleichung aus den Aufgaben 5 oder 6. Verwenden Sie die Parameterdarstellung $x = t$ und $y = f(t)$, wenn die Kurve als Funktion $y = f(x)$ gegeben ist.

c. Bestimmen Sie den Hauptnormalenvektor $\boldsymbol{N}$ bei t_0. Das Vorzeichen der Komponenten von $\boldsymbol{N}$ hängt davon ab, ob der Tangentialeinheitsvektor $\boldsymbol{T}$ sich bei $t = t_0$ im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn dreht (vgl. Aufgabe 7).

d. Es sei $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ der Vektor vom Urspung zum Mittelpunkt $(a,\ b)$ des Krümmungskreises. Berechnen Sie $\boldsymbol{C}$ aus der Vektorgleichung

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{N}(t_0).$$

Der Punkt $P(x_0,\ y_0)$ auf der Kurve ist durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t_0)$ gegeben.

e. Zeichnen Sie den Graphen zu der (implizit gegebenen) Gleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1/\kappa^2$ des Krümmungskreises; fügen Sie dann die Kurve im gleichen Bild hinzu. Vielleicht müssen Sie ein wenig herumprobieren, um einen passenden Ausschnitt darzustellen, der Ausschnitt sollte aber immer quadratisch sein.

23. $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (5\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$ $t_0 = \pi/4$

24. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi,\ t_0 = \pi/4$

25. $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t^3 - 3t)\boldsymbol{j}, \quad -4 \le t \le 4,\ t_0 = 3/5$

26. $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\boldsymbol{i} + \dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 5,$ $t_0 = 1$

27. $\boldsymbol{r}(t) = (2t - \sin t)\boldsymbol{i} + (2 - 2\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi,$ $t_0 = 3\pi/2$

28. $\boldsymbol{r}(t) = \left(\mathrm{e}^{-t}\cos t\right)\boldsymbol{i} + \left(\mathrm{e}^{-t}\sin t\right)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi,$ $t_0 = \pi/4$

29. $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5,\ x_0 = 1$

30. $y = x(1-x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2,\ x_0 = 1/2$

13.5 Tangentiale und normale Komponenten der Beschleunigung

Wenn man sich entlang einer Kurve im Raum bewegt, dann sind die kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{k}$ nicht am besten geeignet, um die Bewegungsvektoren zu beschreiben. Relevant für die Bewegung sind der Vektor, der die Bewegungsrichtung angibt (der Tangentialeinheitsvektor $\boldsymbol{T}$), die Richtung, in die die Bahn sich dreht (dargestellt durch den Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{N}$) und die Angabe, ob die Bewegung sich aus der Ebene herausdreht, die durch diese beiden Vektoren aufgespannt wird. Dann hat sie auch eine Komponente in Richtung eines Vektors senkrecht zu dieser Ebene. Dieser Vektor ist der sogenannte *Binormaleneinheitsvektor* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$. Man beschreibt den Beschleunigungsvektor oft als Linearkombination von drei Vektoren, die in die Richtung dieser paarweise zueinander senkrechten $\boldsymbol{TNB}$-Vektoren zeigen. Diese $\boldsymbol{TNB}$-Vektoren (▶Abbildung 13.23) laufen entlang der Bahn und verändern sich mit der Bewegung. Man nennt sie das „begleitende Dreibein". Drückt man die Beschleunigung mit diesen Vektoren aus, so lassen sich die Eigentümlichkeiten der Bahn und der Bewegung gut erkennen.

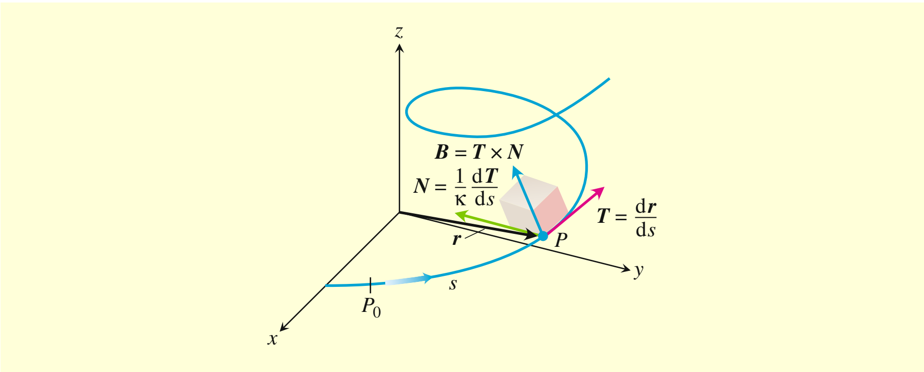

Abbildung 13.23 Das begleitende Dreibein besteht aus drei Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen, und bewegt sich entlang einer Kurve im Raum.

Das begleitende Dreibein

Der **Binormaleneinheitsvektor** einer Kurve im Raum ist $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$; er ist ein Einheitsvektor und steht senkrecht sowohl auf $\boldsymbol{T}$ als auch auf $\boldsymbol{N}$ (▶Abbildung 13.24). Die drei Vektoren $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$ bilden zusammen ein bewegtes rechtshändiges Vektorsystem, das oft bei der Beschreibung der Bahnen von Teilchen im Raum verwendet wird. Man nennt es die **Frenet-Formeln** (nach dem französischen Mathematiker Jean-Frédéric Frenet, 1816–1900) oder das **begleitende Dreibein**.

Tangential- und Nomalkomponente der Beschleunigung

Wird ein Objekt beschleunigt – sei es durch die Gravitation, Bremsen oder Raketenmotoren – wollen wir normalerweise wissen, welcher Anteil der Beschleunigung in der Bewegungsrichtung wirkt, also in die tangentiale Richtung $\boldsymbol{T}$. Wir berechnen diesen Anteil, indem wir $\boldsymbol{v}$ mit der Kettenregel umschreiben:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{T}\frac{ds}{dt}.$$

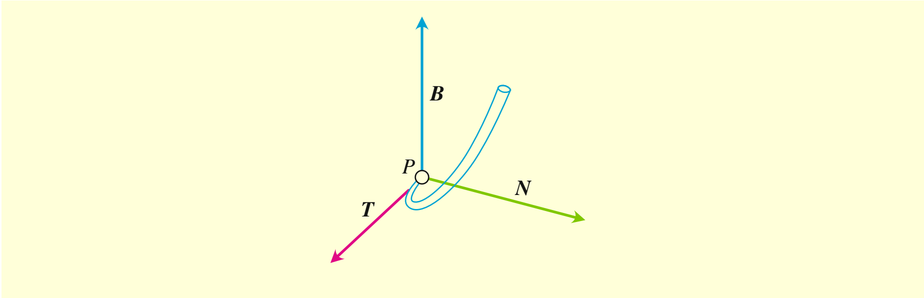

Abbildung 13.24 Die Vektoren $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$ bilden – in dieser Reihenfolge – ein rechtshändiges System aus drei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren im Raum.

Dann leiten wir die beiden äußeren Seiten dieser Gleichung nach der Zeit ab und erhalten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{N}. \end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\boldsymbol{N}$

Definition

Schreibt man den Beschleunigungsvektor als

$$\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} + a_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}, \tag{13.21}$$

dann sind

$$a_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}| \quad \text{und} \quad a_{\mathrm{N}} = \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{13.22}$$

die **Tangentialkomponente** und die **Normalkomponente** der Beschleunigung.

Der Binormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{B}$ taucht in Gleichung (13.21) nicht auf. Unabhängig davon, wie sehr sich die Bahn des Teilchens im Raum zu krümmen und winden scheint, liegt der Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}$ *immer in der Ebene von* $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$ und ist senkrecht zu $\boldsymbol{B}$. Der Gleichung kann man genau entnehmen, welcher Anteil der Beschleunigung tangential zur Bewegung wirkt ($\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$) und welcher senkrecht zur Bewegungsebene steht $[\kappa(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2]$ (▶Abbildung 13.25).

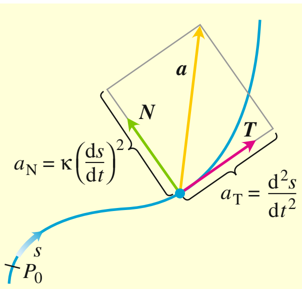

Abbildung 13.25 Die Tangential- und die Normalkomponente der Beschleunigung. Der Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}$ liegt in der Ebene von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$, senkrecht zu $\boldsymbol{B}$.

Welche Informationen lassen sich Gleichung (13.22) entnehmen? Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{a}$ die Änderung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, und im Allgemeinen ändern sich sowohl der Betrag als auch die Richtung von $\boldsymbol{v}$, wenn sich ein Teilchen entlang einer Bahn bewegt. Die Tangentialkomponente a_{T} gibt dabei die Änderungsrate der *Länge* von $\boldsymbol{v}$ an (also die Änderung des Betrags der Geschwindigkeit). Die Normalkomponente der Beschleunigung a_{N} beschreibt die Änderung der *Richtung* von $\boldsymbol{v}$.

Die (skalare) Normalkomponente der Beschleunigung ist die Krümmung mal dem *Quadrat* des Geschwindigkeitsbetrags. Damit wird klar, warum man sich festhalten muss, wenn man in einem Auto eine scharfe Kurve (großes κ) mit hohem Tempo (großes $|\boldsymbol{v}|$) durchfährt. Verdoppelt man das Tempo des Autos, so vervierfacht sich die Normalkomponente der Beschleunigung für die gleiche Kurve.

Bewegt sich ein Teilchen mit konstantem Tempo entlang eines Kreises, so ist $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$ gleich null, und die gesamte Beschleunigung zeigt entlang von $\boldsymbol{N}$ in Richtung des Kreismittelpunkts. Wird das Teilchen schneller oder langsamer, dann hat $\boldsymbol{a}$ auch eine Tangentialkomponente ungleich null (▶Abbildung 13.26).

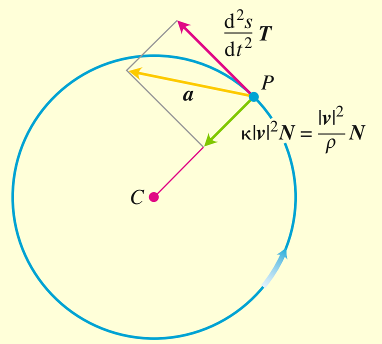

Abbildung 13.26 Die Tangentialkomponente und die Normalkomponente der Beschleunigung eines Teilchens, das sich entgegen dem Uhrzeigersinn entlang einer Kreisbahn mit Radius ρ bewegt und dabei schneller wird.

Wir berechnen a_{N} normalerweise mit der Gleichung $a_{\mathrm{N}} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_{\mathrm{T}}^2}$, die man erhält, wenn man die Gleichung $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{T}}^2 + a_{\mathrm{N}}^2$ nach a_{N} auflöst. Mit dieser Gleichung lässt sich a_{N} berechnen, ohne zunächst κ bestimmen zu müssen.

Formel zur Berechnung der Normalkomponente der Beschleunigung

Merke

$$a_{\mathrm{N}} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_{\mathrm{T}}^2} \tag{13.23}$$

Beispiel 13.19 Schreiben Sie die Beschleunigung von

Tangential- und Normalkomponente der Beschleunigung

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

in der Form $\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} + a_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}$, ohne zuvor $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$ berechnet zu haben. (Diese Bahn ist die Evolvente des Kreises in ▶Abbildung 13.27. Vgl. hierzu auch Aufgabe 15 in Abschnitt 13.3.)

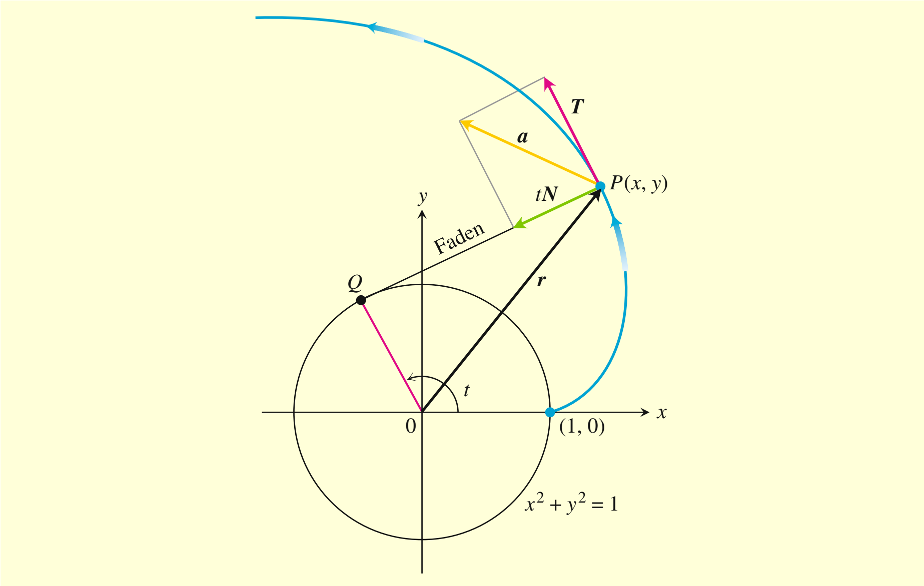

Abbildung 13.27 Die Tangential- und Normalkomponente der Beschleunigung von $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t \cos t)\boldsymbol{j}$ für $t > 0$. Wird ein Faden, der um einen Kreis gewickelt ist, abgewickelt und dabei gespannt in der Ebene des Kreises gehalten, so bescheibt sein Ende P eine Evolvente (Abwicklungskurve) des Kreises.

Lösung Wir berechnen a_T mit der ersten der beiden Gleichungen (13.22):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t - \cos t + t \sin t)\boldsymbol{j} \\
&= (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t \sin t)\boldsymbol{j}, \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t, && t > 0 \\
a_T &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = 1. && \text{Gleichung (13.22)}
\end{aligned}$$

Wenn a_T bekannt ist, lässt sich mit Gleichung (13.23) a_N berechnen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (\cos t - t \sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{j}, \\
|\boldsymbol{a}|^2 &= t^2 + 1 && \text{Nach einigen algebraischen Berechnungen} \\
a_N &= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \\
&= \sqrt{(t^2+1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t.
\end{aligned}$$

Mithilfe von Gleichung (13.21) kann man dann $\boldsymbol{a}$ berechnen:

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}.$$

Windung (Torsion) einer Kurve

Wie verhält sich $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$? Mit den Regeln zur Ableitung eines Kreuzprodukts erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}.$$

$\boldsymbol{N}$ zeigt in die Richtung von $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$, daher ist $(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s) \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$, und es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}.$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ ist also orthogonal zu $\boldsymbol{T}$, weil ein Kreuzprodukt immer senkrecht auf seinen Faktoren steht.

Weil $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ auch senkrecht auf $\boldsymbol{B}$ steht ($\boldsymbol{B}$ hat einen konstanten Betrag), folgt daraus, dass $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ senkrecht auf der Ebene steht, die von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannt wird. Das bedeutet, dass $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ parallel zu $\boldsymbol{N}$ ist; also ist $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ ein skalares Vielfaches von $\boldsymbol{N}$. Als Gleichung geschrieben:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{N}.$$

Das negative Vorzeichen beruht auf Konvention. Den Skalar τ nennt man die *Windung* oder *Torsion* einer Kurve. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau.$$

Mit dieser Gleichung definieren wir nun τ.

Definition

Es sei $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$. Die **Windung** oder **Torsion** einer glatten Kurve ist dann

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}. \tag{13.24}$$

Im Gegensatz zu der Krümmung κ, die immer positiv ist, kann die Windung τ positiv, negativ oder null sein.

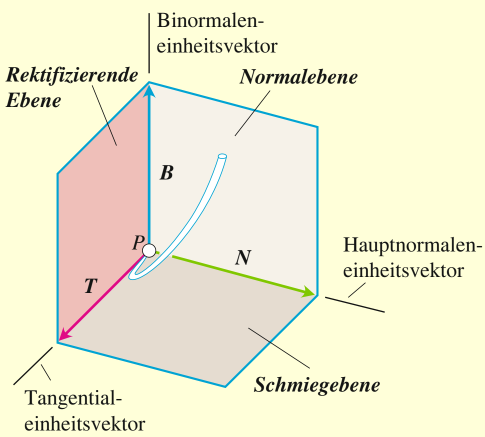

Abbildung 13.28 Die Namen der drei Ebenen, die von $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$ bestimmt werden.

►Abbildung 13.28 zeigt die drei Ebene, die von $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$ bestimmt werden. Die Krümmung $\kappa = |\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ kann man auch als die Geschwindigkeit interpretieren, mit der die Normalebene sich mit der Bewegung von P entlang der Bahn dreht. Dementsprechend ist die Windung $\tau = -(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s) \cdot \boldsymbol{N}$ die Geschwindigkeit, mit der sich die Schmiegebene um $\boldsymbol{T}$ dreht, wenn P sich entlang der Kurve bewegt. Die Windung gibt an, wie sehr sich die Kurve aus der Ebene herausdreht.

Wir betrachten nun ►Abbildung 13.29. Wenn wir uns P als einen Zug vorstellen, der auf einer kurvigen Strecke eine Steigung hinauffährt, dann entspricht die Geschwindigkeit, mit der die Scheinwerfer pro Streckeneinheit von einer zur anderen Seite schwenken, der Krümmung der Strecke. Die Geschwindigkeit, mit der die Lokomotive sich aus der Ebene herausdreht, die von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$ aufgespannt wird, ist die Windung. Man kann zeigen (wenn auch nur mit fortgeschrittener Mathematik), dass eine Kurve im Raum dann und nur dann eine Helix ist, wenn die Krümmung und die Windung konstant und ungleich null sind.

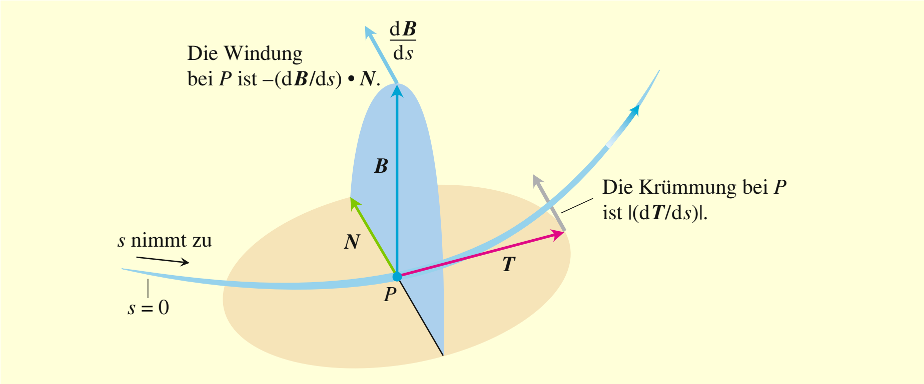

Abbildung 13.29 Das begleitende Dreibein bewegt sich mit einem Teilchen entlang der Bahn und beschreibt seine Geometrie.

Formeln zur Berechnung der Bewegungsgrößen

Für die Windung gibt es eine oft verwendete Determinantengleichung, die mit höherer Analysis hergeleitet werden kann. Sie lautet

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2} \qquad (\text{für } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}). \tag{13.25}$$

Die Punkte in Gleichung (13.25) stehen für Ableitungen nach der Zeit, jeder Punkt für jeweils eine Ableitung. $\dot{x}$ („x Punkt") bedeutet also dx/dt, $\ddot{x}$ („x zwei Punkt") steht für d^2x/dt^2 und $\dddot{x}$ („x drei Punkt") für d^3x/dt^3. Entsprechend gilt $\dot{y} = dy/dt$ und so weiter.

Es gibt auch eine ähnlich einfach anzuwendende Gleichung für die Krümmung, die zusammen mit anderen in der folgenden Zusammenfassung angegeben ist.

Formeln zur Berechnung von Bewegungsgrößen von Kurven im Raum **Merke**

Tangentialeinheitsvektor: $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\boldsymbol{N} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|}$

Binormaleneinheitsvektor: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$

Krümmung: $\kappa = \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \dfrac{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3}$

Windung: $\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2}$

Tangential- und Normalkomponente der Beschleunigung: $\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} + a_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}$

$a_{\mathrm{T}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|$

$a_{\mathrm{N}} = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_{\mathrm{T}}^2}$

Aufgaben zum Abschnitt 13.5

Berechnung von Tangential- und Normalkomponenten Schreiben Sie in den Aufgaben 1 und 2 $\boldsymbol{a}$ in der Form $\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} + a_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}$, ohne zuvor $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$ zu berechnen.

1. $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$

2. $\boldsymbol{r}(t) = (1+3t)\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$

Schreiben Sie in den Aufgaben 3–6 $\boldsymbol{a}$ in der Form $\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} + a_{\mathrm{N}}\boldsymbol{N}$ für den angegebenen Wert von t, ohne zuvor $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{N}$ zu berechnen.

3. $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

4. $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

5. $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t + (1/3)t^3)\boldsymbol{j} + (t - (1/3)t^3)\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

6. $\boldsymbol{r}(t) = \left(\mathrm{e}^t\cos t\right)\boldsymbol{i} + \left(\mathrm{e}^t\sin t\right)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\mathrm{e}^t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

Bestimmen des begleitenden Dreibeins Berechnen Sie in den Aufgaben 7 und 8 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{B}$ für den gegebenen Wert von t. Stellen Sie dann Gleichungen für die Normalebene, die Schmiegebene und die rektifizierende Ebene bei diesem Wert von t auf.

7. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad t = \pi/4$

8. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

In den Aufgaben 9–13 aus Abschnitt 13.4 haben Sie für Kurven im Raum $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ und κ berechnet. Bestimmen Sie in den hier folgenden Aufgaben 9–13 für die gleichen Kurven noch $\boldsymbol{B}$ and τ.

9. $\boldsymbol{r}(t) = (3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

10. $\boldsymbol{r}(t) = \left(\mathrm{e}^t\cos t\right)\boldsymbol{i} + \left(\mathrm{e}^t\sin t\right)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

11. $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^3/3\right)\boldsymbol{i} + \left(t^2/2\right)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$

12. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (a\cosh(t/a))\boldsymbol{j}, \quad a > 0$

13. $\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t)\boldsymbol{i} - (\sinh t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$

Physikalische Anwendungen 14. Der Tachometer Ihres Autos zeigt dauerhaft 55 km/h an. Kann es sein, dass Ihre Bewegung trotzdem beschleunigt ist? Erläutern Sie.

15. Kann man allgemein etwas zur Beschleunigung eines Teilchens aussagen, das sich mit konstantem Tempo (konstantem Betrag) bewegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

16. Kann man allgemein etwas zum Betrag der Geschwindigkeit eines Teilchens aussagen, dessen Beschleunigung immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht? Begründen Sie Ihre Antwort.

17. Ein Teilchen der Masse m bewegt sich entlang der Parabel $y = x^2$, der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant 10 Einheiten pro Sekunde. Welche Kraft wirkt auf das Teilchen aufgrund seiner Beschleunigung im Punkt $(0, 0)$ und im Punkt $(2^{1/2}, 2)$? Geben Sie Ihre Antworten als Vielfaches von $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ an. (Verwenden Sie das Newton'sche Gesetz $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.)

Theorie und Beispiele

18. **Vektorgleichung für die Krümmung** Leiten Sie für eine glatte Kurve mithilfe von Gleichung (13.21) die folgende Gleichung für die Krümmung her:

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3}.$$

19. Zeigen Sie: Ein Teilchen bewegt sich entlang einer Geraden, wenn die Normalkomponente der Beschleunigung gleich null ist.

20. **Ein abgekürztes Verfahren zur Berechnung der Krümmung** Wenn $|a_N|$ und $|\boldsymbol{v}|$ bekannt sind, lässt sich die Krümmung einfach mit der Gleichung $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2$ berechnen. Bestimmen Sie damit die Krümmung und den Krümmungsradius der Kurve

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t \cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0.$$

(a_N und $|\boldsymbol{v}|$ wurden bereits in Beispiel 13.19 bestimmt.)

21. Zeigen Sie, dass für die Gerade

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + At)\boldsymbol{i} + (y_0 + Bt)\boldsymbol{j} + (z_0 + Ct)\boldsymbol{k}$$

sowohl κ als auch τ gleich null sind.

22. Was lässt sich zur Windung einer glatten ebenen Kurve $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ sagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

23. **Die Windung einer Helix** Zeigen Sie, dass die Windung der Helix

$$\boldsymbol{r}(t) = (a \cos t)\boldsymbol{i} + (a \sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0$$

gleich $\tau = b/(a^2 + b^2)$ ist. Welchen Maximalwert kann τ für einen gegebenen Wert von a haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

24. **Differenzierbare Kurven mit der Windung null liegen in einer Ebene** Eine (ausreichend oft differenzierbare) Kurve mit der Windung null liegt in einer Ebene. Dies ist ein Spezialfall der Tatsache, dass ein Teilchen, dessen Geschwindigkeit immer senkrecht zu einem festen Vektor $\boldsymbol{C}$ ist, sich in einer Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{C}$ bewegt. Dies kann man umgekehrt auch mit dem folgenden Ergebnis erklären.

Es sei $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ zweimal differenzierbar für alle t im Intervall $[a, b]$, es sei $\boldsymbol{r} = 0$ für $t = a$ und $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ für alle t in $[a, b]$. Zeigen Sie, dass dann $h(t) = 0$ für alle t in $[a, b]$ gilt. (*Hinweis:* Gehen Sie von $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ aus und betrachten Sie die Angangsbedingungen in umgekehrter Reihenfolge.)

25. **Eine Gleichung zur Berechnung von τ aus $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{v}$.** Wenn wir von der Definition $\tau = -(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s) \cdot \boldsymbol{N}$ ausgehen und zweimal die Kettenregel anwenden, können wir $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Lösen wir nach τ auf, erhalten wir die Gleichung

$$\tau = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{N}\right).$$

Diese Gleichung hat gegenüber Gleichung (13.25) den Vorteil, dass sie einfacher hinzuschreiben und zu merken ist. Ihr Nachteil ist, dass die Berechnung von τ mit ihr (ohne Computer) viel Rechenaufwand bedeuten kann. Bestimmen Sie mit dieser Gleichung die Windung der Helix aus Aufgabe 23.

Computerberechnungen Berechnen Sie mit einem CAS in den Aufgaben 26–29 für die gegebenen Kurven $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, den Betrag der Geschwindigkeit, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{B}$, κ, τ sowie die Tangential- und Normalkomponente der Beschleunigung, jeweils für den gegebenen Wert von t. Runden Sie auf vier Dezimalstellen.

26. $\boldsymbol{r}(t) = (t \cos t)\boldsymbol{i} + (t \sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = \sqrt{3}$

27. $\boldsymbol{r}(t) = \left(\mathrm{e}^t \cos t\right)\boldsymbol{i} + \left(\mathrm{e}^t \sin t\right)\boldsymbol{j} + \mathrm{e}^t\boldsymbol{k}, \quad t = \ln 2$

28. $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{-t}\boldsymbol{k}, \quad t = -3\pi$

29. $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^2)\boldsymbol{i} + (3t^2)\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

13.6 Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt leiten wir Gleichungen für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Polarkoordinaten her. Diese Gleichungen sind besonders nützlich bei der Berechnung von Planeten- und Satellitenbahnen im Weltraum. Wir untersuchen mit ihnen hier die drei Kepler'schen Gesetze zur Planetenbewegung.

Bewegung in Polar- und Zylinderkoordinaten

Bewegt sich ein Teilchen $P(r, \theta)$ entlang einer Kurve in der polaren Koordinatenebene, dann drücken wir seinen Ort, seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung mit den sich mitbewegenden Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{13.26}$$

aus, die in ▶Abbildung 13.30 zu sehen sind. Der Vektor $\boldsymbol{u}_r$ zeigt in Richtung des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$, es gilt also $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$. Der Vektor $\boldsymbol{u}_\theta$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{u}_r$ und zeigt in die Richtung von ansteigendem θ.

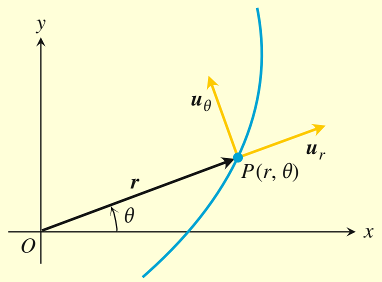

Abbildung 13.30 Die Länge von $\boldsymbol{r}$ entspricht der positiven Polarkoordinate r des Punkts P. $\boldsymbol{u}_r$ ist gleich $\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ und damit gleich $\boldsymbol{r}/r$. In Gleichung (13.26) werden $\boldsymbol{u}_r$ und $\boldsymbol{u}_\theta$ mit den Vektoren $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ geschrieben.

Aus Gleichung (13.26) folgt

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta} &= -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}_\theta \\ \frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta} &= -(\cos\theta)\boldsymbol{i} - (\sin\theta)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r.\end{aligned}$$

Wir leiten $\boldsymbol{u}_r$ und $\boldsymbol{u}_\theta$ nach t ab und bestimmen so ihre Änderung mit der Zeit. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r = \frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = \frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r. \tag{13.27}$$

Der Geschwindigkeitsvektor lässt sich also als Vielfaches von $\boldsymbol{u}_r$ und $\boldsymbol{u}_\theta$ schreiben; es ergibt sich (▶Abbildung 13.31)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{u}_r) = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\boldsymbol{u}}_r = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta.$$

Wie im vorausgehenden Abschnitt verwenden wir die Schreibweise mit einem Punkt für die Ableitung nach der Zeit, um die Gleichungen möglichst einfach zu halten: $\dot{\boldsymbol{u}}_r$ steht für $d\boldsymbol{u}_r/dt$, $\dot{\theta}$ für $d\theta/dt$ und so weiter.

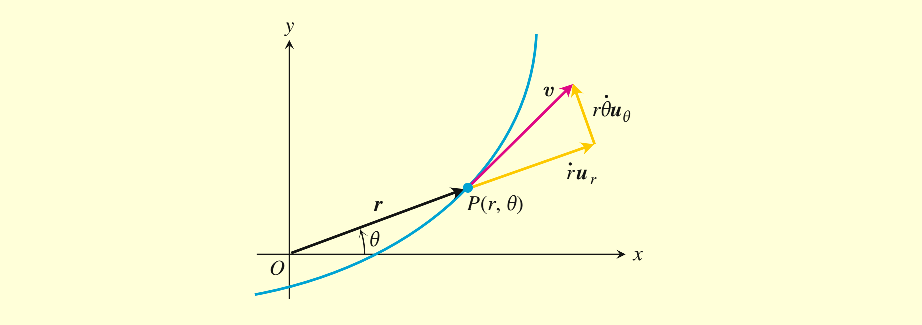

Abbildung 13.31 Der Geschwindigkeitsvektor in Polarkoordinaten ist $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$.

Die Beschleunigung ist dann

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{u}}_\theta).$$

Wir beschreiben $\dot{\boldsymbol{u}}_r$ und $\dot{\boldsymbol{u}}_\theta$ mithilfe von Gleichung (13.27) und ordnen die Komponenten neu. Die Gleichung für die Beschleunigung als Vielfaches der Vektoren $\boldsymbol{u}_r$ und $\boldsymbol{u}_\theta$ wird dann

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta.$$

Um mit diesen Gleichungen auch Bewegungen im Raum beschreiben zu können, fügen wir auf der rechten Seite der Gleichung $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ den Term $z\boldsymbol{k}$ hinzu. Damit haben wir *Zylinderkoordinaten* erzeugt. Für die Gleichungen gilt nun

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}.
\end{aligned} \tag{13.28}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{u}_\theta$ und $\boldsymbol{k}$ bilden ein Rechtssystem (►Abbildung 13.32), in dem gilt

$$\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{u}_\theta \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_\theta.$$

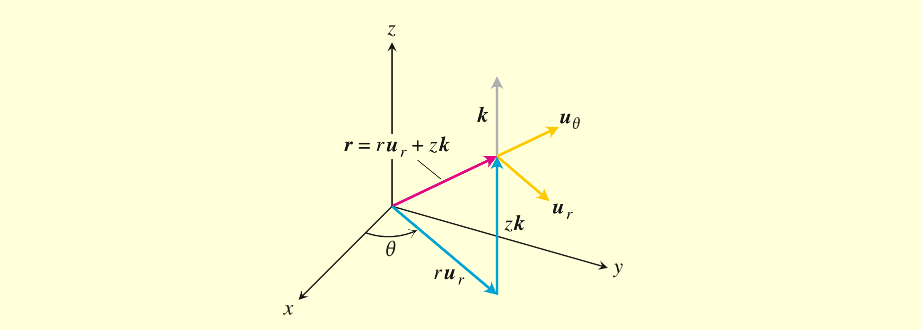

Abbildung 13.32 Der Ortsvektor und die Einheitsvektoren in zylindrischen Koordinaten. Es gilt $|\boldsymbol{r}| \neq r$ für $z \neq 0$.

Planeten bewegen sich in einer Ebene

Ist $\boldsymbol{r}$ der Vektor vom Mittelpunkt der Sonne mit der Masse M zum Mittelpunkt eines Planeten mit der Masse m, dann ist laut dem Newton'schen Gravitationsgesetz die